

SUBGRUP MULTI ANTI FUZZY DAN BEBERAPA SIFATNYA

Umar Faruk

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
umar.faruk22@yahoo.com

Dr. Raden Sulaiman, M.Si.

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya

Abstrak

Skripsi ini mempelajari tentang struktur aljabar subgrup multi anti fuzzy dan beberapa sifat terkait. Tujuan skripsi ini adalah menerapkan teori himpunan fuzzy dan teori grup pada subgrup multi anti fuzzy
Kata Kunci : grup, subgrup, Subgrup multi anti fuzzy.

Abstract

This thesis studies the Algebraic Structures of Multi Anti Fuzzy Subgroup and some related properties. The purpose of this thesis is to implement the fuzzy set theory and group theory in multi-anti fuzzy subgroups.
Keywords : group, subgroup, multi-anti fuzzy subgroup.

PENDAHULUAN

Fuzzy diartikan sebagai “samar-samar”. Himpunan fuzzy merupakan himpunan yang keanggotaannya mempunyai nilai kesamaran antara salah dan benar. Konsep himpunan fuzzy diperkenalkan oleh Profesor Lotfi A. Zadeh, seorang ilmuwan Amerika Serikat berkebangsaan Iran, dari Universitas California di Berkeley, melalui tulisannya “*Fuzzy Sets*” pada tahun 1965. Zadeh (1965) mengatakan bahwa himpunan fuzzy merupakan himpunan yang keanggotaannya memiliki nilai kesamaran dengan derajat keanggotaan setiap elemennya pada interval $[0,1]$.

Konsep subgrup fuzzy diperkenalkan oleh Rosenfeld, yang menunjukkan beberapa gagasan dasar teori grup bisa diperluas dengan cara dasar untuk kelompok fuzzy. Sejak itu teori subgrup fuzzy telah dikembangkan lebih lanjut oleh banyak matematikawan seperti P.S. Das, K.C. Gupta dan B.K. Sarma, N.P. Mukherjee dan P. Bhattacharya, S. Ray dan Liu dan sebagainya.

Teori himpunan multi fuzzy di perkenalkan oleh Sabu Sebastian dan T.V.Ramakrishnan yang dikenal dengan istilah fungsi keanggotaan multi dimensi. Teori himpunan multi fuzzy adalah perluasan dari teori himpunan fuzzy. Pada skripsi ini membahas tentang subgrup multi anti fuzzy dan beberapa sifat yang terkait. Pada pendefinisian subgrup multi anti

fuzzy akan memanfaatkan konsep subgrup fuzzy dari suatu grup.

KAJIAN TEORI

A. Grup

Definisi 2.1.1

Grup G merupakan sistem aljabar yang terdiri atas himpunan tak kosong G dan suatu operasi biner yang didefinisikan pada G serta memenuhi aksioma-aksioma berikut ini :

1. Untuk setiap $h, k \in G$ berlaku $h * k \in G$.
2. Operasi biner bersifat asosiatif, yaitu $h * (k * j) = (h * k) * j$, untuk setiap $h, k, j \in G$
3. Terdapat elemen disebut identitas $e \in G$ sehingga $h * e = e * h = h$, untuk setiap $h \in G$.
4. Untuk setiap $h \in G$ terdapat elemen $h^{-1} \in G$ sehingga $h * h^{-1} = h^{-1} * h = e$.

Contoh 2.1.1

1. G adalah himpunan bilangan bulat terhadap penjumlahan, maka G membentuk grup karena memenuhi keempat aksioma.
2. $G = \{-1,1\}$ adalah sebuah grup terhadap perkalian

Definisi 2.1.2

Misal $(G,*)$ adalah grup dan $Z \subseteq G$. Jika $(Z,*)$ membentuk grup, maka $(Z,*)$ adalah subgrup dari grup $(G,*)$.

Contoh 2.1.2

$(Z, +)$ adalah grup.
 Misal $A_2 = \{x|x = 3n, n \in Z\}$. Sehingga $A_2 \subseteq Z$.
 Karena $(A_2, +)$ merupakan grup, maka $(A_2, +)$ adalah subgrup dari grup $(Z, +)$.

Definisi 2.1.3

Misalkan grup (G, \circ) dan $(G', *)$ Suatu fungsi $f: G \rightarrow G'$ disebut dengan homomorfisma grup jika berlaku $(\forall a, b \in G)$ maka $f(a \circ b) = f(a) * f(b)$.

Contoh 2.1.3

Misal \mathbb{R}^* adalah $\mathbb{R} - \{0\}$ dan \mathbb{Z} adalah himpunan bilangan bulat.
 Diberikan grup $(\mathbb{Z}, +)$ dan (\mathbb{R}^*, \cdot) . Diberikan fungsi $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^*$ dengan definisi $f(a) = 2^a, \forall a \in \mathbb{Z}$.
 fungsi f tersebut merupakan homomorfisma grup, sebab untuk sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$ berlaku $f(a + b) = 2^{a+b} = 2^a \cdot 2^b = f(a) \cdot f(b)$.

B. Subgrup Fuzzy

Definisi 2.2.1

Diberikan U sebagai himpunan semesta. Himpunan fuzzy \mathcal{A} atas U di definisikan sebagai

$$\mathcal{A} = \{(u, \mu_{\mathcal{A}}(u)): u \in U, \mu_{\mathcal{A}}(u) \in [0,1]\}$$

Fungsi $\mu_{\mathcal{A}}$ disebut fungsi keanggotaan dari \mathcal{A} dan $\mu_{\mathcal{A}}(u)$ disebut derajat keanggotaan dari u .

Definisi 2.2.2

Himpunan A merupakan himpunan bagian dari himpunan B jika setiap elemen himpunan A termuat di himpunan B , dan ditulis $A \subseteq B$.

Definisi 2.2.3

Misalk μ merupakan himpunan bagian fuzzy pada grup G . Maka μ dikatakan subgrup fuzzy pada G jika Untuk semua $x, y \in G$, berlaku

1. $\mu(xy) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$
2. $\mu(x^{-1}) = \mu(x)$
- 3.

Contoh 2.2.3

Misalkan $G = (Z_3, +_{mod\ 3})$ adalah grup, subgrup dari Z_3 adalah $\{e\}, Z_3$

Misalkan μ_1, μ_2 adalah

$$\mu_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{0\} \\ 2/5, & x \in \{1,2\} \end{cases}$$

$$\mu_2(x) = 0.8, \quad x \in \{0,1,2\}$$

Dapat ditunjukkan bahwa μ_1 dan μ_2 merupakan subgrup fuzzy.

Definisi 2.2.4

Misalkan μ adalah sebuah himpunan bagian fuzzy pada grup G . Maka μ disebut subgrup anti fuzzy pada G jika untuk semua $x, y \in G$, berlaku

1. $\mu(xy) \leq \max\{\mu(x), \mu(y)\}$
2. $\mu(x^{-1}) = \mu(x)$

Defenisi 2.2.5

Komplemen dari himpunan fuzzy μ pada himpunan X , dinotasikan dengan μ^c dan didefinisikan sebagai $\mu^c(x) = 1 - \mu(x)$ untuk setiap $x \in X$.

Proposisi 2.2.6

H adalah subgrup fuzzy pada grup G jika dan hanya jika H^c adalah subgrup anti fuzzy.

Bukti :

\Rightarrow ambil sebarang $x, y \in G$

Karena H adalah subgrup fuzzy pada G , maka berdasarkan definisi 2.2.3 :

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & H(xy) \geq \min\{H(x), H(y)\} \\ & -H(xy) \leq -\min\{H(x), H(y)\} \\ & 1 - H(xy) \leq 1 - \min\{H(x), H(y)\} \\ & H^c(xy) \leq \max\{1 - H(x), 1 - H(y)\} \\ & H^c(xy) \leq \max\{H^c(x), H^c(y)\} \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad & H(x^{-1}) = H(x) \\ & -H(x^{-1}) = -H(x) \\ & 1 - H(x^{-1}) = 1 - H(x) \\ & H^c(x^{-1}) = H^c(x) \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

Berdasarkan definisi 2.2.4, maka dari (1) dan (2) dapat disimpulkan bahwa H^c adalah subgrup anti fuzzy pada Grup G .

\Leftarrow ambil sebarang $x, y \in G$

Karena H^c adalah subgrup anti fuzzy pada grup G , maka berdasarkan definisi 2.2.4:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & H^c(xy) \leq \max\{H^c(x), H^c(y)\} \\ & 1 - H(xy) \leq \max\{1 - H(x), 1 - H(y)\} \\ & 1 - H(xy) \leq 1 - \min\{H(x), H(y)\} \\ & -H(xy) \leq -\min\{H(x), H(y)\} \\ & H(xy) \geq \min\{H(x), H(y)\} \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad & H^c(x^{-1}) = H^c(x) \\ & 1 - H(x^{-1}) = 1 - H(x) \\ & -H(x^{-1}) = -H(x) \\ & H(x^{-1}) = H(x) \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

Berdasarkan definisi 2.2.3, maka dari (1) dan (2) dapat disimpulkan bahwa H adalah subgrup fuzzy pada G .

PEMBAHASAN

A. A. Himpunan Multi Fuzzy

Definisi 3.1.1

Misalkan X adalah himpunan tidak kosong. Himpunan multi fuzzy A pada X didefinisikan sebagai berikut:

$$A = \{(x, \mu_1(x), \mu_2(x), \dots, \mu_k(x)) \mid x \in X\}$$

dimana $\mu_i : X \rightarrow [0,1]$.

Definisi 3.1.2

Himpunan multi fuzzy A pada grup G disebut subgrup multi fuzzy pada G jika untuk semua $x, y \in G$.

1. $\mu_i(xy) \geq \min\{\mu_i(x), \mu_i(y)\}, \forall i \in \{1, \dots, k\}$
2. $\mu_i(x^{-1}) = \mu_i(x), \forall i \in \{1, \dots, k\}$

B. Grup Multi Anti Fuzzy

Definisi 3. 2. 1

Sebuah himpunan multi fuzzy pada grup G dikatakan subgrup multi anti fuzzy pada G jika semua $x, y \in G$,

1. $\mu_i(xy) \leq \max\{\mu_i(x), \mu_i(y)\}, \forall i \in \{1, \dots, k\}$
2. $\mu_i(x^{-1}) = \mu_i(x), \forall i \in \{1, \dots, k\}$

(R.Muthuraj dan S.Balamurugan,2014)

Teorema 3.1.

Himpunan multi fuzzy $A = \{(x, \mu_1(x), \mu_2(x), \dots, \mu_n(x))\}$ adalah sebuah subgrup multi anti fuzzy pada G jika dan hanya jika setiap $\{(x, \mu_i(x))\}$ adalah subgrup anti fuzzy pada G, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$

(R.Muthuraj dan S.Balamurugan,2014)

Bukti :

\Rightarrow Diberikan $A = \{(x, \mu_1(x), \mu_2(x), \dots, \mu_n(x))\}$ adalah sebuah subgrup multi anti fuzzy pada G. Maka, $\forall x, y \in G, \mu_i(xy) \leq \max\{\mu_i(x), \mu_i(y)\}$ dan $\mu_i(x^{-1}) = \mu_i(x), \forall i \in \{1, \dots, n\}$ jadi $\{(x, \mu_i(x))\}$ subgrup anti fuzzy.

\Leftarrow misalkan $\{(x, \mu_i(x))\}$ adalah subgrup anti fuzzy maka berlaku

$\mu_i(xy) \leq \max\{\mu_i(x), \mu_i(y)\}$ dan $\mu_i(x^{-1}) = \mu_i(x)$ sehingga $A = \{(x, \mu_1(x), \mu_2(x), \dots, \mu_n(x))\}$ adalah subgrup multi anti fuzzy.

Teorema 3.2

Himpunan multi fuzzy $A = \{(x, \mu_1(x), \mu_2(x), \dots, \mu_n(x))\}$ adalah sebuah subgrup multi fuzzy pada grup G jika dan hanya jika A^c adalah subgrup multi anti fuzzy G.

(R.Muthuraj dan S.Balamurugan,2014)

Bukti :

Diberikan $A = \{(x, \mu_1(x), \mu_2(x), \dots, \mu_n(x))\}$ adalah subgrup multi fuzzy pada G.

$\Leftrightarrow \{(x, \mu_i(x))\}$ adalah subgrup fuzzy pada G (2.2.3).

$\Leftrightarrow \{(x, \mu_i(x))\}^c$ adalah subgrup anti fuzzy pada G (proposisi 2.2.6).

$\Leftrightarrow \{(x, \mu_1(x), \mu_2(x), \dots, \mu_n(x))\}^c$ adalah subgrup multi anti fuzzy pada G (teorema3.1). Sehingga terbukti A^c subgrup multi anti fuzzy pada G.

Teorema 3.3

Misalkan A adalah subgrup multi anti fuzzy pada grup G dan e elemen identitas pada G, maka

- I. $A(x) \geq A(e)$ untuk semua $x \in G$
- II. Subset $H = \{x \in G \mid A(x) = A(e)\}$ adalah subgrup G.

(R.muthuraj,2013)

Bukti :

I. Misalkan $x \in G$

$$\begin{aligned} A(e) &= A(xx^{-1}) \leq \max\{A(x), A(x^{-1})\} \\ &\leq \max\{A(x), A(x)\} \\ &\leq A(x) \end{aligned}$$

Sehingga, $A(x) \geq A(e)$ untuk semua $x \in G$

II. Misalkan $H = \{x \in G \mid A(x) = A(e)\}$

Sehingga, H tidak kosong karena $e \in H$

$$\begin{aligned} \text{Misalkan } x, y \in H. \text{ maka, } A(x) &= A(y) = A(e) \\ A(xy^{-1}) &\leq \max\{A(x), A(y^{-1})\} \\ &= \max\{A(x), A(y)\} \\ &= \max\{A(e), A(e)\} \\ &= A(e) \end{aligned}$$

Jadi, $xy^{-1} \in H$.

Sedemikian hingga, H sebuah subgrup pada G.

Teorema 3.4

Diketahui P subgrup multi anti fuzzy pada grup G dengan identitas e. $P(xy^{-1}) = P(e) \Leftrightarrow P(x) = P(y)$ untuk semua $x, y \in G$.

(R.muthuraj,2013)

Bukti :

Diberikan P adalah sebuah subgrup multi anti fuzzy pada grup G dan $P(xy^{-1}) = P(e)$.

Maka, untuk semua $x, y \in G$,

$$\begin{aligned} P(x) &= P(x(y^{-1}y)) \\ &= P((xy^{-1})y) \\ &\leq \max\{P(xy^{-1}), P(y)\} \\ &= \max\{P(e), P(y)\} \\ &= P(y) \end{aligned}$$

Maka, $P(x) \leq P(y)$

Karena, $P(y) = P(y^{-1})$ maka P adalah sebuah subgrup multi fuzzy pada G.

$$\begin{aligned} \text{Sehingga, } P(y) &= P(ey^{-1}) \\ &= P((x^{-1}x)y^{-1}) \\ &= P(x^{-1}(xy^{-1})) \\ &\leq \max\{P(x^{-1}), P(xy^{-1})\} \\ &= P\{A(x), P(e)\} \\ &= P(x) \end{aligned}$$

Oleh karena itu, $P(y) \leq P(x)$

Maka, $P(x) = P(y)$

Teorema 3.5

A adalah subgrup multi anti fuzzy pada grup G jika dan hanya jika

$$\mu_i(xy^{-1}) \leq \max\{\mu_i(x), \mu_i(y)\}, \text{ untuk semua } x, y \in G.$$

(R.muthuraj,2013)

Bukti :

Misalkan A adalah subgrup multi anti fuzzy pada grup G. Maka
 $\forall x, y \in G, \mu_i(xy) \leq \max\{\mu_i(x), \mu_i(y)\}$ dan $\mu_i(x^{-1}) = \mu_i(x)$
 Sehingga, $\mu_i(xy^{-1}) \leq \max\{\mu_i(x), \mu_i(y^{-1})\}$
 $= \max\{\mu_i(x), \mu_i(y)\}$
 Jadi, $\mu_i(xy^{-1}) \leq \max\{\mu(x), \mu(y)\}$

Teorema 3.6

Jika A dan B adalah subgrup multi anti fuzzy pada G, maka (A+B) adalah subgrup multi anti fuzzy pada G.
 (R.Muthuraj dan S.Balamurugan,2014)

Bukti :

Diberikan A dan B adalah subgrup multi anti fuzzy pada G.
 Maka, $\mu_i(xy) \leq \max\{\mu_i(x), \mu_i(y)\}$ dan $\beta_i(xy) \leq \max\{\beta_i(x), \beta_i(y)\}, \forall x, y \in G$ sehingga,
 $(\mu_i + \beta_i)(xy) = \mu_i(xy) + \beta_i(xy) - \mu_i(xy)\beta_i(xy)$
 $\leq \max\{\mu_i(x), \mu_i(y)\} + \{\beta_i(x), \beta_i(y)\}$
 $- \max\{\mu_i(x), \mu_i(y)\}\{\beta_i(x), \beta_i(y)\}$
 $\max\{\mu_i(x), \beta_i(x) - \mu_i(x)\beta_i(x),$
 $\mu_i(y) + \beta_i(y) - \mu_i(y)\beta_i(y)\}$
 $= \max\{(\mu_i + \beta_i)(x), (\mu_i + \beta_i)(y)\}$
 Maka
 $(\mu_i + \beta_i)(xy) \leq \max\{(\mu_i + \beta_i)(x)$
 $(\mu_i + \beta_i)(y)\}, \forall x, y \in G$
 Jadi, (A+B) adalah subgrup multi anti fuzzy.

Teorema 3.7

Jika A dan B adalah subgrup multi anti fuzzy pada G, maka (A+B) adalah subgrup multi anti fuzzy jika dan hanya jika (B+A) merupakan subgrup multi anti fuzzy pada G.
 (R.Muthuraj dan S.Balamurugan,2014)

Bukti :

\Rightarrow (A+B) adalah subgrup multi anti fuzzy (teorema3.6)
 \Leftarrow Diberikan B dan A adalah subgrup multi anti fuzzy pada G.
 Maka, $\beta_i(xy) \leq \max\{\beta_i(x), \beta_i(y)\}$ dan $\mu_i(xy) \leq \max\{\mu_i(x), \mu_i(y)\}, \forall x, y \in G$ sehingga,
 $(\beta_i + \mu_i)(xy) = \beta_i(xy) + \mu_i(xy) - \beta_i(xy)\mu_i(xy)$
 $\leq \max\{\beta_i(x), \beta_i(y)\} + \{\mu_i(x), \mu_i(y)\} -$
 $\max\{\beta_i(x), \beta_i(y)\}\{\mu_i(x), \mu_i(y)\}$
 $= \max\{\beta_i(x) + \mu_i(x) - \beta_i(x)\mu_i(x), \beta_i(y) + \mu_i$
 $- \beta_i(y)\mu_i(y)\}$
 $= \max\{(\beta_i + \mu_i)(x), (\beta_i + \mu_i)(y)\}$
 Maka, $(\beta_i + \mu_i)(xy) \leq \max\{(\beta_i + \mu_i)(x), (\beta_i +$
 $\mu_i)(y)\}, \forall x, y \in G$
 jadi, (B+A) adalah subgrup multi anti fuzzy.

Teorema 3.8

G merupakan grup dan A subgrup multi anti fuzzy pada G. Jika $\mu_i(x) < \mu_i(y), \forall x, y \in G$ maka $\mu_i(xy) = \mu_i(y) = \mu_i(yx)$.
 (R.Muthuraj dan S.Balamurugan,2014)

Bukti :

Diberikan $\mu_i(x) < \mu_i(y), \forall x, y \in G$

A adalah subgrup multi anti fuzzy pada G,

$$\mu_i(xy) \leq \max\{\mu_i(x), \mu_i(y)\} = \mu_i(y) \dots \dots \dots (1)$$

$$\begin{aligned} \mu_i(y) &= \mu_i(x^{-1}(xy)) \\ &\leq \max\{\mu_i(x^{-1}), \mu_i(xy)\} \\ &= \{\mu_i(x), \mu_i(xy)\} \\ &= \mu_i(xy), \text{ maka } \mu_i(x) < \mu_i(y), \mu_i(x) < \mu_i(xy) \end{aligned}$$

Sehingga, $\mu_i(y) \leq \mu_i(xy) \dots \dots \dots (2)$

Berdasarkan (1) dan (2) diperoleh $\mu_i(xy) = \mu_i(y)$

PENUTUP

A. SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan bab III, maka dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Himpunan multi fuzzy $A = \{x, \mu_1(x), \mu_2(x), \dots, \mu_n(x)\}$ adalah sebuah subgrup multi anti fuzzy pada G jika dan hanya jika setiap $\{(x, \mu_i(x))\}$ adalah subgrup anti fuzzy pada G, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$
2. Himpunan multi fuzzy $A = \{x, \mu_1(x), \mu_2(x), \dots, \mu_n(x)\}$ adalah sebuah subgrup multi fuzzy pada grup G jika dan hanya jika A^c adalah subgrup multi anti fuzzy G.
3. Misalkan A adalah subgrup multi anti fuzzy pada grup G dan e elemen identitas pada G, maka
 I. $A(x) \geq A(e)$ untuk semua $x \in G$
 II. Subset $H = \{x \in G | A(x) = A(e)\}$ adalah subgrup G
4. Diketahui P subgrup multi anti fuzzy pada grup G dengan identitas e . $P(xy^{-1}) = P(e) \Rightarrow P(x) = P(y)$ untuk semua $x, y \in G$.
5. A adalah subgrup multi anti fuzzy pada grup G jika dan hanya jika $\mu_i(xy^{-1}) \leq \max\{\mu(x), \mu(y)\}$, untuk semua $x, y \in G$.
6. Jika A dan B adalah subgrup multi anti fuzzy pada G, maka (A+B) adalah subgrup multi anti fuzzy pada G.
7. Jika A dan B adalah subgrup multi anti fuzzy pada G, maka (A+B) adalah subgrup multi anti fuzzy jika dan hanya jika (B+A) merupakan subgrup multi anti fuzzy pada G.
8. G merupakan grup dan A subgrup multi anti fuzzy pada G. Jika $\mu_i(x) < \mu_i(y), \forall x, y \in G$ maka $\mu_i(xy) = \mu_i(y) = \mu_i(yx)$.

B. SARAN

Pada skripsi ini, penulis hanya membahas tentang sifat-sifat grup multi anti fuzzy. Penulis menyarankan bagi pembaca untuk mengkaji lebih dalam tentang grup multi anti fuzzy dari sumber lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Kandasamy.W.B.V.2003. "Smarandanche Fuzzy algebra". *American Research Press Rehoboth*.
- Muthuraj.R dan Balamurugan.S. 2013. "Multi - Anti Fuzzy Group And Its Lower Level Subgroups". *Journal of Engineering Research and Applications*. Vol. 3: pp 1498-1501.
- Muthuraj.R dan Balamurugan.S. 2013. "Multi Fuzzy Group and its Level Subgroups". *PG and Research Department of mathematics and Department of mathematics Velammal College of Engeneering & Technology* . Vol. 17 (1). Pp 74-81.
- Muthuraj.R dan Balamurugan.S. 2014. "Some Characterization Of Multi-anti Fuzzy". *Researchjournali's Journal of Mathematics*. Vol.1 (1).
- Muthuraj.R dan Manikandan.K.H. 2013. "Some Properties of Induced Fuzzy and Induced Anti Fuzzy Subgroups on a HX Group". *International Journal of Scientific and Innovative Mathematical Research (IJSIMR)*. Volume 1, Issue 3. PP 211-224 ISSN 2347-307X.

