

## PEMODELAN ALIRAN DARAH PADA ANEURISMA DI LINGKARAN WILLIS

Usman Hardianto

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya  
e-mail: usmanhardianto@mhs.unesa.ac.id

Abadi

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya  
e-mail: abadi@unesa.ac.id

### Abstrak

Aneurisma adalah penyakit yang mematikan yang terjadi pada otak dan umumnya diderita oleh orang dewasa berusia lebih dari 20 tahun dengan persentase 6% di seluruh dunia dan angka kematian lebih dari 50%. Gejala penyakit aneurisme dapat dideteksi pada usia 40 – 60 tahunan. Di era modern seperti sekarang ini telah banyak metode untuk mendeteksi penyakit aneurisma yang dilihat dari faktor – faktor fisiologis pada aliran darah, seperti yang dilakukan oleh Austin, (1971) dalam artikelnya yang berjudul “Biometrical Model of Aneurysm of the Circle of Willis, I : The Duffing Equation and Some Approximate Solutions”. Austin (1971) mengembangkan model matematika aliran darah pada aneurisma di lingkaran Willis menggunakan pengembangan model fisika. Model fisika yang digunakan oleh Austin (1971) adalah menggunakan listrik analog dengan arus bolak – balik/Alternating Current (AC). Akhirnya, dari listrik analog diperoleh sebuah persamaan differensial nonlinier yang dibentuk dari nilai awal dan analisis grafis yang menyediakan beberapa informasi ke beberapa mekanisme pelebaran. Persamaan differensial nonlinear yang digunakan adalah persamaan duffing. Karena pentingnya mendeteksi penyakit aneurisma sejak awal, maka diperlukan pemodelan aliran darah pada aneurisma di lingkaran Willis. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui rekonstruksi model matematika dari aliran darah pada aneurisma di lingkaran Willis, mengetahui solusi dari model matematika dari aliran darah pada aneurisma di lingkaran Willis dengan menggunakan pendekatan deret Fourier, dan mengetahui simulasi hasil solusi model matematika dari aliran darah pada aneurisma di lingkaran Willis dengan MATLAB R2009b. Berdasarkan analisis data, hasil rekonstruksi model rangkaian listrik dari aliran darah pada aneurisma di lingkaran Willis, diperoleh sebuah model matematika dengan persamaan  $\ddot{i}_2 + \alpha i_2 - \beta i_2^2 + \gamma i_2^3 = F \cos \omega t$ , model matematika dari aliran darah pada aneurisma di lingkaran Willis dapat ditentukan solusi dari model matematika tersebut menggunakan pendekatan deret Fourier yaitu  $\left(\frac{-\beta^2}{\alpha} + \frac{3\gamma}{4}\right) A^3 = (\omega^2 + \omega_0^2)A + F$ , serta pemodelan fisika dapat membantu dalam mencegah pecahnya aneurisma secara sekunder, yaitu adanya frekuensi kritis atau denyut nadi yang dapat mengakibatkan meningkatnya aliran amplitudo di dalam aneurisma secara tiba-tiba, bisa menyebabkan getaran pada dinding aneurisma.

**Kata Kunci:** Pemodelan Aliran Darah, Aneurisma, Aneurisma di Lingkaran Willis.

### Abstract

An aneurysm is a deadly disease that occurs in the brain and is commonly suffered by adults aged over 20 years with the percentage 6% worldwide and a mortality rate of over 50%. Aneurysm disease symptoms can be detected at the age of 40 – 60 years. In the modern era as it is today have many methods to detect disease aneurysm is viewed from physiological factors on blood flow, as done by Austin, (1971) in his article entitled "Biometrical Model of Aneurysm of the Circle of Willis, i: The Duffing Equation and Some Approximate Solutions". Austin (1971) developed a mathematical model of blood flow in aneurysm in the circle of Willis on using the development of physics model. The physics model is used by Austin (1971) is analogous to electric current using alternating – reverse/Alternating Current (AC). Finally, the electrical analog of a nonlinear differential equation is obtained which is formed from the initial value and the graphic analysis provides some information to many mechanisms of dilation. Nonlinear differential equation is the equation of Duffing. Because of the importance of detecting aneurysm disease early on, then the required modeling blood flow in aneurysms in the circle of Willis. This research aims to know reconstruction the mathematical model of the blood flow in an aneurysm in the circle of Willis, know the solution of mathematical models of blood flow in aneurysms in the circle of Willis by using Fourier series approximation, simulation results and find out the solution of mathematical models of blood flow in aneurysms in the circle of Willis with MATLAB R2009b. Based on the data analysis, the results of reconstruction of the electrical circuit model of blood flow in aneurysms in the circle of Willis, acquired a

mathematical model with equations  $\ddot{i}_2 + \alpha i_2 - \beta i_2^2 + \gamma i_2^3 = F \cos \omega t$ , mathematical models of blood flow in aneurysms in the circle of Willis can be determined from solution of the mathematical model using Fourier series approach i.e.  $(\frac{-\beta^2}{\alpha} + \frac{3\gamma}{4})A^3 = (\omega^2 + \omega_0^2)A + F$ , as well as physics model can help in preventing aneurysm rupture in the secondary, i.e. the existence of a critical frequency or pulse which can result in increased amplitude of the flow in an aneurysm suddenly, can cause vibration in the wall of the aneurysm.

**Keywords:** Modeling Blood Flow, Aneurysms, Aneurysm in the Circle of Willis.

## PENDAHULUAN

Dalam kehidupan sehari-hari, sering dijumpai berbagai fenomena yang disebabkan oleh ilmu biologi. Salah satu kajian penting dalam biologi adalah organ tubuh manusia. Gabungan dari organ-organ yang saling bekerja sama untuk melakukan suatu fungsi tertentu pada tubuh manusia disebut dengan sistem organ. Salah satu sistem organ yaitu sistem peredaran darah. Sistem peredaran darah pada manusia tersusun atas jantung sebagai pusat dari peredaran darah, pembuluh-pembuluh darah dan darah itu sendiri. Pembuluh darah adalah bagian dari sistem sirkulasi yang mengangkut darah ke seluruh tubuh. Ada dua jenis pembuluh darah yang bekerja pada sistem pembuluh darah yaitu pembuluh nadi dan pembuluh vena. Dalam pembuluh darah sering terjadi kerusakan pada struktur pembuluh darah, atau dikarenakan ada kelemahan pada dinding pembuluh darah tersebut. Hal tersebut menyebabkan terjadinya pelebaran atau pembengkakan pembuluh darah yang disebut aneurisma (aneurysm). Aneurisma sering terjadi terutama di daerah persimpangan pembuluh darah arteri yang terletak di dasar otak yang disebut lingkaran Willis (Suwangto : 2011). Aneurisma adalah penyakit yang mematikan yang terjadi pada otak dan umumnya diderita oleh orang dewasa berusia lebih dari 20 tahun dengan persentase 6% di seluruh dunia dan angka kematian lebih dari 50%. Gejala penyakit aneurisme dapat dideteksi pada usia 40 – 60 tahunan namun dalam bidang medis untuk mendeteksi penyakit aneurisma dibutuhkan biaya yang relatif mahal (Suwangto : 2011). Di era modern seperti sekarang ini telah banyak metode untuk mendeteksi penyakit aneurisma yang dilihat dari faktor – faktor fisiologis pada aliran darah, seperti yang dilakukan oleh Austin, (1971), dimana mengembangkan model matematika aliran darah pada aneurisma di lingkaran Willis menggunakan pengembangan model fisika yaitu menggunakan listrik analog dengan arus bolak – balik/Alternating Current (AC). Akhirnya, dari listrik analog diperoleh sebuah persamaan differensial nonlinier yang dibentuk dari nilai awal dan analisis grafis yang menyediakan beberapa informasi kebeberapa mekanisme pelebaran. Persamaan differensial nonlinier yang digunakan adalah persamaan duffing. Persamaan duffing

digunakan oleh banyak peneliti sebagai suatu pendekatan model banyak sistem fisik, persamaan ini memperlihatkan satu jangkauan sangat luas dari perilaku dalam sistem dinamika non linier.

Berdasarkan permasalahan yang dibahas di atas tujuan dari penelitian ini adalah merekonstruksi model matematika dari aliran darah pada aneurisma di lingkaran Willis, kemudian mencari solusi dari model tersebut menggunakan deret Fourier, serta membuat simulasi hasil solusi model matematika dari aliran darah pada aneurisma di lingkaran Willis dengan menggunakan software MATLAB R2009b.

## KAJIAN PUSTAKA

### A. Sistem Peredaran Darah Manusia

Sistem peredaran darah pada manusia merupakan proses pengedaran berbagai zat yang diperlukan ke seluruh tubuh dan pengambilan zat-zat yang tidak diperlukan untuk dikeluarkan dari tubuh (Rachmawati, 2009 : 72).

#### 1. Jantung

Jantung adalah sebuah rongga organ berotot yang memompa darah ke pembuluh darah dengan berirama yang berulang dan menyebarkan darah yang mengandung oksigen ke seluruh tubuh. Jantung adalah salah satu organ manusia yang berperan penting dalam sistem peredaran darah.

#### 2. Pembuluh Darah

Pembuluh darah adalah tabung yang saling bertemu untuk menyampaikan darah dari jantung ke semua berbagai bagian tubuh dan kembali lagi, dan dari jantung ke paru-paru dan kembali lagi. Ada dua jenis pembuluh darah yang bekerja pada sistem pembuluh darah yaitu :

1. Pembuluh nadi
2. Pembuluh balik

#### 3. Darah

Darah adalah cairan berwarna merah yang terdapat di dalam pembuluh darah. Warna merah tersebut tidak selalu tetap, tetapi berubah-

ubah karena pengaruh zat kandungannya, terutama kadar oksigen dan karbondioksida.

Keempat, arteri vertebrobasilaris (15%) (Suwangto, 2011).

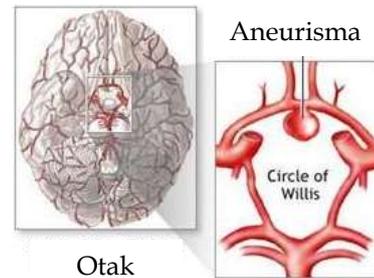
## B. Aneurisma Otak di Lingkaran willis

### 1. Aneurisma otak

Aneurisma serebral (aneurisma otak) adalah kelemahan pada dinding pembuluh darah otak, baik pembuluh darah nadi maupun pembuluh darah balik (tunika media dan tunika intima dari arteri maupun vena) yang menyebabkan penggelembungan pembuluh darah otak tersebut secara terlokalisir (Suwangto, 2011). Pembuluh darah nadi (arteri) normal memiliki 3 lapisan, yakni (1) tunika intima (lapisan terdalam yang merupakan lapisan endotelial); (2) tunika media (terdiri dari otot polos); dan (3) tunika adventisia (terdiri dari jaringan ikat).

Dinding kantung aneurisma terdiri dari tunika intima dan tunika adventisia. Sedangkan tunika media berakhir pada daerah pertemuan kantung aneurisma dengan pembuluh darah induk. Tunika intima biasanya normal walau di bawahnya sering terjadi proliferasi sel. Namun, membran elastik di dalam tunika intima, berkurang jumlahnya atau bahkan tidak ada. Sedangkan tunika adventisia pada aneurisma biasanya terinfiltrasi oleh sel-sel radang seperti limfosit dan fagosit (Suwangto, 2011).

Apabila aneurisma ini terjadi pada pembuluh darah di dasar otak, gejalanya dapat berupa sakit kepala yang hebat, berdenyut, dapat disertai atau tidak disertai dengan muntah. Komplikasi aneurisma otak dapat menyebabkan pecahnya pembuluh darah di otak sehingga terjadi pendarahan subaraknoid, intraserebral, subdural, infark serebri, atau hidrosefalus. Lokasi aneurisma biasanya terjadi pada pembuluh darah nadi (arteri) di dasar otak, yaitu di bagian depan Sirkulus Willis (kira-kira 85%) yang memberi suplai darah ke daerah depan dan tengah otak. Pertama, arteri serebri anterior dan komunikans anterior (30–35%). Kedua, percabangan arteri karotis interna dan arteri komunikans posterior (30–35%). Ketiga, percabangan arteri serebri media (20%).

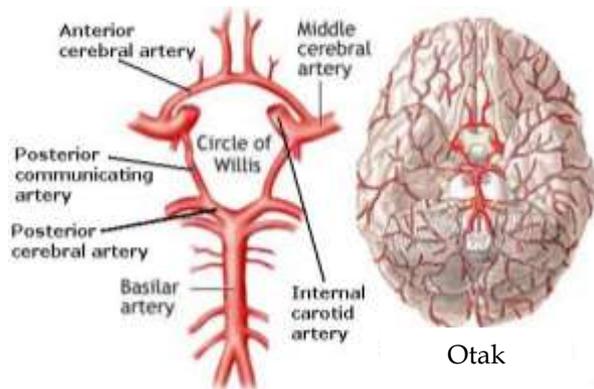


Gambar 2.1 Aneurisma Otak di Lingkaran Willis

<http://ulfahizazi.blogspot.co.id/2014/10/sistem-kardiovaskuler-kasus-aneurisma.html> diakses pada 14 Maret 2017

### 2. Lingkaran Willis (*Circle of Willis*)

Lingkaran yang berasal dari pembuluh arteri dinamakan lingkaran Willis. Lingkaran Willis berada di area di dasar otak. Lingkaran Willis adalah sistem anastomotic arteri yang berada di dasar otak. Lingkaran Willis terbentuk ketika arteri karotis internal/*internal carotid artery* (ICA) masuk rongga tengkorak bilateral dan membagi ke dalam arteri serebral anterior/*anterior cerebral artery* (ACA) dan arteri serebral tengah/*middle cerebral artery* (MCA). Arteri serebral anterior kemudian disatukan oleh arteri anterior berkomunikasi/*anterior communicating artery* (ACOM). Koneksi ini membentuk setengah bagian depan (sirkulasi anterior) dari lingkaran Willis. Posterior, arteri basilar, yang dibentuk oleh arteri vertebralis kiri dan kanan, cabang ke kiri dan kanan arteri serebral posterior/*posterior cerebral artery* (PCA), membentuk sirkulasi posterior. Para PCAs membentuk lingkaran Willis dengan bergabung dalam sistem karotid internal melalui arteri komunikasi posterior/*posterior communicating artery* (PCOM) arteri (Willis, 2010).



Gambar 2.2 Lingkaran Willis (*Circle of Willis*)

<https://www.pinterest.com/explorate/circle-of-willis/> diakses pada 14 Maret 2017

### 3. Penyebab aneurisma otak

Aneurisma otak umumnya bukan akibat faktor genetik melainkan berkembang seiring dengan penambahan usia seseorang.

Beberapa penyebab aneurisma otak adalah:

- Neurofibromatosis
- Konsumsi tembakau
- Tekanan darah tinggi
- Kolesterol tinggi
- Penyalahgunaan alkohol

### 4. Gejala aneurisma otak

Aneurisma serebral hampir tidak pernah menimbulkan gejala, kecuali terjadi pembesaran dan menekan salah satu saraf otak, sehingga memberikan gejala sebagai kelainan saraf otak yang tertekan. Aneurisma yang kecil dan tidak progresif, hanya akan menimbulkan sedikit bahkan tidak menimbulkan gejala. Pertanda awal bisa terjadi dalam beberapa menit sampai beberapa minggu sebelum aneurisma pecah (ruptur).

## C. Rangkaian Listrik

### 1. Definisi Rangkaian Listrik

Rangkaian listrik adalah suatu kumpulan elemen atau komponen listrik yang saling dihubungkan dengan cara-cara tertentu dan paling sedikit mempunyai satu lintasan

tertutup. Berdasarkan dari pengertian dari rangkaian listrik itu sendiri, rangkaian adalah interkoneksi dari sekumpulan elemen atau komponen penyusunnya ditambah dengan rangkaian penghubungnya dimana disusun dengan cara-cara tertentu dan minimal memiliki satu lintasan tertutup. Dengan satu lintasan tertutup dapat dianalisis suatu rangkaian. Sedangkan satu lintasan tertutup adalah satu lintasan saat dimulai dari titik yang dimaksud akan kembali lagi ke titik tersebut tanpa terputus dan tidak memandang seberapa jauh atau dekat lintasan yang ditempuh (Ramdhani, 2005:1).

### 2. Elemen atau Komponen Rangkaian Listrik

- Arus Listrik
- Tegangan
- Resistor
- Kapasitor
- Inductor

### 3. Rangkaian Listrik AC

Berdasarkan rangkaian arah arus listrik, rangkaian listrik dibedakan menjadi 2 yaitu rangkaian arus listrik arus searah (*Direct Current / DC*) dan rangkaian arus listrik arus bolak balik (*Alternating Current/AC*). Arus DC adalah arus yang mempunyai nilai tetap atau konstan terhadap satuan waktu, artinya dimana pun kita meninjau arus tersebut pada waktu berbeda akan mendapatkan nilai yang sama. Sedangkan Arus AC adalah arus yang mempunyai nilai yang berubah terhadap satuan waktu dengan karakteristik akan selalu berulang untuk periode waktu tertentu (mempunyai periode waktu :  $T$ ) (Ramdhani, 2005:2-3). Sebelum membahas masalah AC secara mendalam, perhatikan terlebih dahulu karakteristik dari sumber AC atau gelombang AC ini. Salah satu sifat khusus dari gelombang AC adalah mempunyai sifat periodik atau berulang dengan selang waktu tertentu atau lebih sering disebut dengan periode, dimana nilai dari periodik ini memenuhi persamaan :

$$f(t) = f(t + nT)$$

dengan  $n = 1, 2, 3, \dots$  dengan  $T$  merupakan periode waktu.

Adapun persamaan kuat arus maupun beda potensial pada listrik AC adalah seperti berikut :

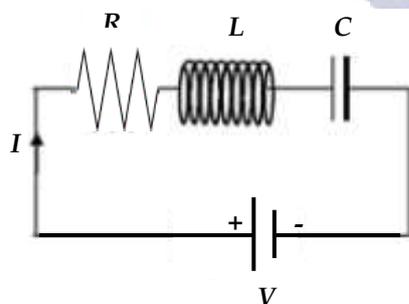
$$I = I_{max} \sin(\omega t) \quad (2.6)$$

$$V = V_{max} \sin(\omega t) \quad (2.7)$$

Generator listrik bolak balik (AC) adalah alat yang digunakan untuk memproduksi listrik bolak balik (AC). Generator ini terdiri dari dua bagian, yaitu rotor dan stator. Rotor adalah bagian generator yang bergerak, seperti kumparan. Sedangkan stator adalah bagian generator yang diam, seperti magnet permanen, cincin, dan sikat/terminal. Cobalah anda perhatikan, di manakah letak perbedaan generator ini dengan generator listrik DC. Anda dapat melihat proses dihasilkannya listrik bolak-balik (AC).

#### D. Hukum Ohm

George Simon Ohm (1789-1854) adalah seorang guru fisika dari Jerman yang berhasil mendapatkan hubungan antara besarnya beda potensial dengan besarnya arus yang mengalir. Ia menyimpulkan penemuannya ini ke dalam suatu hukum yang dikenal dengan nama Hukum Ohm, "Kuat arus yang mengalir dalam suatu rangkaian listrik sebanding dengan beda potensial antara ujung-ujung rangkaian listrik itu, asalkan suhu rangkaian listrik itu tetap".



Gambar 2.9 Merupakan gambar rangkaian listrik dengan  $V$  adalah tegangan listrik (beda potensial) yang terdapat pada kedua ujung rangkaian listrik dalam satuan Volt,  $I$  adalah kuat arus yang mengalir pada rangkaian listrik dalam

satuan Ampere,  $R$  adalah hambatan (resistor) pada rangkaian listrik dalam satuan Ohm,  $C$  adalah kapasitor pada rangkaian listrik dalam satuan Farad,  $L$  adalah induktor pada rangkaian listrik dalam satuan Henry.

#### E. Hukum I Kirchoff

Hukum Kirchoff adalah hukum yang membahas tentang kekuatan muatan pada suatu rangkaian listrik, hukum kirchoff ini pertama kali ditemukan oleh Gustav Kirchoff (1824-1887) pada tahun 1845. Hukum kirchoff ini dibagi menjadi 2 yaitu Hukum Arus Kirchoff atau yang lebih kita kenal dengan Hukum I Kirchoff dan yang kedua yaitu Hukum Tegangan Kirchoff atau yang lebih kita kenal Hukum II Kirchoff.

##### 1. Hukum I Kirchoff

**Bunyi Hukum I Kirchoff yaitu :**

"Pada rangkaian listrik yang bercabang, jumlah kuat arus yang masuk pada suatu titik cabang sama dengan jumlah kuat arus yang keluar dari titik cabang itu".

##### 2. Hukum II Kirchoff

**Bunyi Hukum II Kirchoff yaitu :**

"Jumlah aljabar perubahan tegangan suatu rangkaian tertutup yaitu sama dengan nol".

#### F. Model Rangkaian Listrik dari Aliran Darah

Pengembangan model matematika aliran darah pada aneurisma di lingkaran Willis menggunakan pengembangan model fisika. Model fisika yang digunakan oleh Austin, (1971) adalah menggunakan listrik analog dengan arus bolak-balik/Alternating Current (AC).

#### G. Sistem Persamaan Diferensial

Pengembangan model matematika aliran darah pada aneurisma di lingkaran Willis menggunakan pengembangan model fisika. Model fisika yang digunakan oleh Austin, (1971) adalah menggunakan listrik analog dengan arus bolak-balik/Alternating Current (AC).

#### H. Persamaan Duffing

Persamaan non linier yang menggambarkan osilator dengan suku ketaklinieran pangkat tiga termasuk Persamaan Duffing. Persamaan Duffing digunakan oleh banyak peneliti sebagai suatu pendekatan model banyak sistem fisik, persamaan ini memperlihatkan satu jangkauan sangat luas dari perilaku dalam sistem dinamika non linier (Kovacic dan Brennan, 2011:139).

Bentuk umum dari Persamaan Duffing adalah sebagai berikut :

$$\ddot{y} + 2\zeta\dot{y} + y + \gamma y^3 = F \cos \omega t, y \in \mathbb{R}$$

Dimana:

$y$  adalah perpindahan

$t$  adalah waktu

$\zeta$  adalah rasio redaman

$F$  adalah amplitudo eksitasi

$\omega$  adalah frekuensi eksitasi

$\gamma$  adalah parameter kekakuan kubik

(Kovacic dan Brennan, 2011:139).

Persamaan Duffing dibagi menjadi dua yaitu persamaan Duffing homogen dan persamaan.

Duffing non homogen, sebagai berikut :

1. Persamaan Duffing Homogen

Jika  $F = 0$ , maka (1) merupakan persamaan mandiri yang disebut persamaan Duffing homogen. Persamaan Duffing homogen mempunyai bentuk umum (Kovacic dan Brennan, 2011:141) :

$$\ddot{y} + 2\zeta\dot{y} + y + \gamma y^3 = 0, y \in \mathbb{R}$$

Disini, kasus dibawah redaman ( $|\zeta| < 1$ ) dianggap untuk menggambarkan adanya skala waktu yang berbeda dalam sistem.

2. Persamaan Duffing Non Homogen

Jika  $F \neq 0$ , maka (1) merupakan persamaan tidak mandiri yang disebut persamaan Duffing non homogen. Persamaan Duffing non homogen mempunyai bentuk umum (Kovacic dan Brennan, 2011:142) :

$$\ddot{y} + 2\zeta\dot{y} + y + \gamma y^3 = F \cos \omega t, y \in \mathbb{R}$$

Untuk sistem dibawah redaman ( $|\zeta| < 1$ ) dan eksitasi nonresonansi ( $\omega \neq 1$ ; eksitasi frekuensi yang tidak sama dengan frekuensi alam).

Fungsi  $f(x)$  dikatakan periodik dengan perioda  $P$ , jika untuk semua harga  $x$  berlaku :

$$f(x + P) = f(x); P \text{ adalah konstanta positif.}$$

Harga terkecil dari  $P > 0$  disebut perioda terkecil atau sering disebut perioda dari  $f(x)$ .

Contoh :

a. Fungsi  $\sin x$  mempunyai periode  $2\pi; 4\pi; 6\pi; \dots$

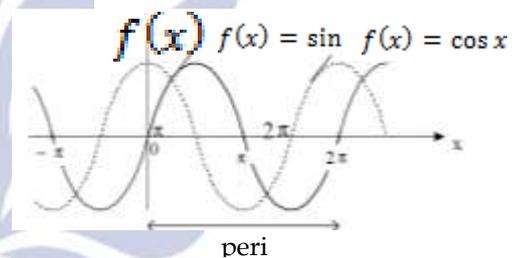
Karena

$$\begin{aligned} \sin(x + 2\pi) &= \sin(x + 4\pi) = \\ \sin(x + 6\pi) &= \dots = \sin x \end{aligned}$$

b. Periode dari  $\sin nx$  atau  $\cos nx$ ; dengan  $n$  bilangan bulat positif adalah  $2\pi/n$ .

c. Periode dari  $\tan x$  adalah  $\pi$ .

Fungsi konstan mempunyai periode sembarang bilangan positif.



Gambar 2.13 Grafik dari Fungsi yang Periodik

Gambar 2.13 Merupakan grafik dari fungsi yang periodik yaitu dari fungsi  $f(x) = \sin x$  dan  $f(x) = \cos x$  dengan periode  $2\pi$ .

2. Deret Fourier

Dalam beberapa permasalahan yang berhubungan dengan gelombang (gelombang suara, air, bunyi, panas, dsb); pendekatan dengan deret Fourier yang suku-sukunya memuat sinus dan cosinus sering digunakan. Dengan mengekspansikan ke dalam bentuk deret Fourier; suatu fungsi periodik bisa dinyatakan sebagai jumlahan dari beberapa fungsi harmonis, yaitu fungsi dari sinus dan cosinus (fungsi sinusoidal).

a. Definisi Deret Fourier

I. Deret Fourier

1. Fungsi Periodik

Jika fungsi  $f(x)$  terdefinisi pada interval  $(-L;L)$  dan di luar interval tersebut  $f(x)$  periodik atau dibuat periodik dengan periode  $2L$  ; maka deret Fourier atau ekspansi Fourier dari fungsi  $f(x)$  tersebut di definisikan sebagai :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

dengan koefisien Fourier  $a_n$  ,  $b_n$  ditentukan oleh :

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx ; a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

b. Deret Fourier Sinus dan Cosinus  
**Deret Fourier sinus**

Deret Fourier sinus dengan koefisien-koefisien  $a_0$ ,  $a_n$  dan  $b_n$  adalah:

$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

Jadi deret Fourier sinus untuk  $f(x)$  adalah:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} , n = 1,2,3, \dots$$

**Deret Fourier cosinus**

Deret Fourier cosinus dengan koefisien-koefisien  $a_0$ ,  $a_n$  dan  $b_n$  adalah:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$b_n = 0$$

Jadi deret Fourier cosinus:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \right) , n = 1,2,3, \dots$$

## HASIL DAN PEMBAHASAN

### A. Rekonstruksi Model Rangkaian Listrik dari Aliran Darah pada Aneurisma di Lingkaran Willis

Rekonstruksi model aliran darah pada aneurisma di lingkaran Willis menggunakan pengembangan model fisika. Model fisika yang digunakan oleh Austin, (1971) adalah menggunakan listrik analog dengan arus bolak – balik/*Alternating Current* (AC).

### B. Solusi Model Matematika dari Aliran Darah pada Aneurisma di Lingkaran Willis dengan Menggunakan Pendekatan Deret Fourier

### C. Simulasi Solusi Model Matematika dari Aliran Darah pada Aneurisma di Lingkaran Willis

Bagian ini merupakan bagian utama artikel hasil penelitian dan biasanya merupakan bagian terpanjang dari suatu artikel. Hasil penelitian yang disajikan dalam bagian ini adalah hasil “bersih”. Proses analisis data seperti perhitungan statistik dan proses pengujian hipotesis tidak perlu disajikan. Hanya hasil analisis dan hasil pengujian hipotesis saja yang perlu dilaporkan. Tabel dan grafik dapat digunakan untuk memperjelas penyajian hasil penelitian secara verbal. Tabel dan grafik harus diberi komentar atau dibahas.

Untuk penelitian kualitatif, bagian hasil memuat bagian-bagian rinci dalam bentuk sub topik-sub topik yang berkaitan langsung dengan fokus penelitian dan kategori-kategori.

Pembahasan dalam artikel bertujuan untuk: (1) menjawab rumusan masalah dan pertanyaan-pertanyaan penelitian; (2) menunjukkan bagaimana temuan-temuan itu diperoleh; (3) menginterpretasi/menafsirkan temuan-temuan; (4) mengaitkan hasil temuan penelitian dengan struktur pengetahuan yang telah mapan; dan (5) memunculkan teori-teori baru atau modifikasi teori yang telah ada.

Dalam menjawab rumusan masalah dan pertanyaan-pertanyaan penelitian, hasil penelitian harus disimpulkan secara eksplisit. Penafsiran terhadap temuan dilakukan dengan menggunakan logika dan teori-teori yang ada. Temuan berupa kenyataan di lapangan diintegrasikan/dikaitkan dengan hasil-hasil penelitian sebelumnya atau dengan teori yang sudah ada. Untuk keperluan ini harus ada rujukan. Dalam memunculkan teori-teori baru, teori-teori lama bisa dikonfirmasi atau ditolak, sebagian mungkin perlu memodifikasi teori dari teori lama.

Dalam suatu artikel, kadang-kadang tidak bisa dihindari pengorganisasian penulisan hasil penelitian ke

dalam “anak subjudul”. Berikut ini adalah cara menuliskan format pengorganisasian tersebut, yang di dalamnya menunjukkan cara penulisan hal-hal khusus yang tidak dapat dipisahkan dari sebuah artikel.

### Singkatan dan Akronim

Singkatan yang sudah umum seperti seperti IEEE, SI, MKS, CGS, sc, dc, and rms tidak perlu diberi keterangan kepanjangannya. Akan tetapi, akronim yang tidak terlalu dikenal atau akronim buatan penulis perlu diberi keterangan kepanjangannya. Sebagai contoh: Model pembelajaran MiKiR (Multimedia interaktif, Kolaboratif, dan Reflektif) dapat digunakan untuk melatih penguasaan keterampilan pemecahan masalah. Jangan gunakan singkatan atau akronim pada judul artikel, kecuali tidak bisa dihindari.

### Satuan

Penulisan satuan di dalam artikel memperhatikan aturan sebagai-berikut:

- Gunakan SI (MKS) atau CGS sebagai satuan utama, dengan satuan sistem SI lebih diharapkan.
- Hindari penggabungan satuan SI dan CGS, karena dapat menimbulkan kerancuan, karena dimensi persamaan bisa menjadi tidak setara.
- Jangan mencampur singkatan satuan dengan satuan lengkap. Misalnya, gunakan satuan “Wb/m<sup>2</sup>” or “webers per meter persegi”, jangan “webers/m<sup>2</sup>”.

### Persamaan

Anda seharusnya menuliskan persamaan dalam *font Times New Roman* atau *font Symbol*. Jika terdapat beberapa persamaan, beri nomor persamaan. Nomor persamaan seharusnya berurutan, letakkan pada bagian paling kanan, yakni (1), (2), dan seterusnya. Gunakan tanda agar penulisan persamaan lebih ringkas. Gunakan *font italic* untuk variabel, huruf tebal untuk vektor.

$$\alpha + \beta = \gamma. \quad (1)$$

### Gambar dan Tabel

Tempatkan label tabel di atas tabel, sedangkan label gambar di bagian bawah tabel. Tuliskan tabel tertentu secara spesifik, misalnya Tabel 1, saat merujuk suatu tabel. Contoh penulisan tabel dan keterangan gambar adalah sebagai berikut:

Tabel 1. Format Tabel

Kepala Tabel	Kepala Kolom Tabel	
	Sub-kepala Kolom	Sub-kepala Kolom
Isi	Isi tabel	Isi tabel

Disarankan untuk menggunakan fitur *text box* pada MS Word untuk menampung gambar atau grafik, karena hasilnya cenderung stabil terhadap perubahan format dan pergeseran halaman dibanding *insert* gambar secara langsung.

Gambar 1. Contoh keterangan gambar

### Kutipan dan Acuan

Salah satu ciri artikel ilmiah adalah menyajikan gagasan orang lain untuk memperkuat dan memperkaya gagasan penulisnya. Gagasan yang telah lebih dulu diungkapkan orang lain ini diacu (dirujuk), dan sumber acuannya dimasukkan dalam Daftar Pustaka.

Daftar Pustaka harus lengkap dan sesuai dengan acuan yang disajikan dalam batang tubuh artikel. Artinya, sumber yang ditulis dalam Daftar Pustaka benar-benar dirujuk dalam tubuh artikel. Sebaliknya, semua acuan yang telah disebutkan dalam artikel harus dicantumkan dalam Daftar Pustaka. Untuk menunjukkan kualitas artikel ilmiah, daftar yang dimasukkan dalam Daftar Pustaka harus cukup banyak. Daftar Pustaka disusun secara alfabetis dan cara penulisannya disesuaikan dengan aturan yang ditentukan dalam jurnal. Kaidah penulisan kutipan, acuan, dan Daftar Pustaka mengikuti buku pedoman ini.

Penyajian gagasan orang lain di dalam artikel dilakukan secara tidak langsung. Gagasan yang dikutip tidak dituliskan seperti teks asli, tetapi dibuatkan ringkasan atau simpulannya. Sebagai contoh, Suharno (1973:6) menyatakan bahwa kecepatan terdiri dari gerakan ke depan sekuat tenaga dan semaksimal mungkin, kemampuan gerakan kontraksi putus-putus otot atau segerombolan otot, kemampuan reaksi otot atau segerombolan otot dalam tempo cepat karena rangsangan.

Acuan adalah penyebutan sumber gagasan yang dituliskan di dalam teks sebagai (1) pengakuan kepada pemilik gagasan bahwa penulis telah melakukan “peminjaman” bukan penjiplakan, dan (2) pemberitahuan kepada pembacanya siapa dan darimana gagasan tersebut diambil. Acuan memuat nama pengarang yang pendapatnya dikutip, tahun sumber informasi ditulis, dan/tanpa nomor halaman tempat informasi yang dirujuk diambil. Nama pengarang yang digunakan dalam acuan hanya nama *nama belakang*. Acuan (1) dapat dituliskan di tengah kalimat atau di akhir kalimat kutipan.

Acuan ditulis dan dipisahkan dari kalimat kutipan dengan kurung buka dan kurung tutup (periksa contoh-contoh di bawah). Acuan yang dituliskan di tengah kalimat dipisahkan dengan kata yang mendahului dan kata yang mengikutinya dengan jarak. Acuan yang dituliskan diakhir kalimat dipisahkan dari kata terakhir kalimat kutipan dengan diberi jarak, namun tidak dipisahkan dengan titik. Nama pengarang ditulis tanpa jarak setelah tanda kurung pembuka dan diikuti koma. Tahun penerbitan dituliskan setelah koma dan diberi jarak. Halaman buku atau artikel setelah tahun penerbitan, dipisahkan dengan tanda titik dua tanpa jarak, dan ditutup dengan kurung tanpa jarak. Sebagai contoh: karya tulis

ilmiah adalah tulisan faktual yang digunakan penulisnya untuk memberikan suatu pengetahuan/informasi kepada orang lain (Riebel, 1978:1).

Apabila nama pengarang telah disebutkan di dalam teks, tahun penerbitan sumber informasi dituliskan segera setelah nama penulisnya. Atau, apabila nama pengarang tetap ingin disebutkan, acuan ini dituliskan di akhir teks. Contohnya: menurut Riebel (1978:1), karya tulis ilmiah adalah tulisan faktual yang digunakan penulisnya untuk memberikan suatu pengetahuan/informasi kepada orang lain.

Nama dua pengarang dalam karya yang sama disambung dengan kata 'dan'. Titik koma (;) digunakan untuk dua pengarang atau lebih dari dua pengarang dengan karya yang berbeda. Contohnya: karya tulis ilmiah adalah tulisan faktual yang digunakan penulisnya untuk memberikan suatu pengetahuan/informasi kepada orang lain (Riebel dan Roger, 1980:5). Jika melibatkan dua pengarang dalam dua karya yang berbeda, contoh penulisannya: karya tulis ilmiah adalah tulisan faktual yang digunakan penulisnya untuk memberikan suatu pengetahuan/informasi kepada orang lain (Riebel, 1978:4; Roger, 1981:5).

Apabila pengarang lebih dari dua orang, hanya nama pengarang pertama yang dituliskan. Nama pengarang selebihnya digantikan dengan 'dkk' (dan kawan-kawan). Tulisan 'dkk' dipisahkan dari nama pengarang, yang disebutkan dengan jarak, diikuti titik, dan diakhiri dengan koma. Contohnya: membaca adalah kegiatan interaksi antara pembaca dan penulis yang kehadirannya diwakili oleh teks (Susanto dkk., 1994: 8).

### Penulisan Daftar Pustaka

Daftar Pustaka merupakan daftar karya tulis yang dibaca penulis dalam mempersiapkan artikelnya dan kemudian digunakan sebagai acuan. Dalam artikel ilmiah, Daftar Pustaka harus ada sebagai pelengkap acuan dan petunjuk sumber acuan. Penulisan DaftarPustaka mengikuti aturan dalam Buku Pedoman ini.

### Ucapan Terima Kasih

Jika perlu berterima kasih kepada pihak tertentu, misalnya sponsor penelitian, nyatakan dengan jelas dan singkat, hindari pernyataan terima kasih yang berbunga-bunga.

## PENUTUP

### Simpulan

Simpulan menyajikan ringkasan dari uraian mengenai hasil dan pembahasan, mengacu pada tujuan penelitian. Berdasarkan kedua hal tersebut dikembangkan pokok-pokok pikiran baru yang merupakan esensi dari temuan penelitian.

### Saran

Saran disusun berdasarkan temuan penelitian yang telah dibahas. Saran dapat mengacu pada tindakan praktis, pengembangan teori baru, dan/atau penelitian lanjutan.

## DAFTAR PUSTAKA

- De Porter, Bobbi dan Hernacki, Mike. 1992. *Quantum Learning*. Membiasakan Belajar Nyaman dan Menyenangkan. Terjemahan oleh Alwiyah Abdurrahman. Bandung: Penerbit Kaifa.
- Sujimat, D. Agus. 2000. *Penulisan karya ilmiah*. Makalah disampaikan pada pelatihan penelitian bagi guru SLTP Negeri di Kabupaten Sidoarjo tanggal 19 Oktober 2000 (Tidak diterbitkan). MKKS SLTP Negeri Kabupaten Sidoarjo
- Suparno. 2000. *Langkah-langkah Penulisan Artikel Ilmiah* dalam Saukah, Ali dan Waseso, M.G. 2000. *Menulis Artikel untuk Jurnal Ilmiah*. Malang: UM Press.
- UNESA. 2000. *Pedoman Penulisan Artikel Jurnal*, Surabaya: Lembaga Penelitian Universitas Negeri Surabaya.
- Wahab, Abdul dan Lestari, Lies Amin. 1999. *Menulis Karya Ilmiah*. Surabaya: Airlangga University Press.
- Winardi, Gunawan. 2002. *Panduan Mempersiapkan Tulisan Ilmiah*. Bandung: Akatiga.