**INDEKS HARARY GRAF HAMILTON, SEMI-HAMILTON DAN HAMILTON-KUAT**

**Fatimatus Zahro**

(S1 Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya)

e-mail: imatus014@gmail.com

**I Ketut Budayasa**

(Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya)

e-mail: ketutbudayasa@yahoo.com

 **Abstrak**

Misalkan sebuah graf terhubung dengan dan . Jarak titik dan titik di , dilambangkan dengan , merupakan suatu lintasan terpendek yang menghubungkan titik dan titik di . Indeks Harary dari graf , dilambangkan dengan , didefinisikan sebagai berikut: . Pada skripsi ini, indeks Harary suatu graf dijadikan syarat cukup bagi suatu graf agar graf tersebut merupakan graf Hamilton, graf Semi-Hamilton, maupun graf Hamilton-Kuat. Dalam tulisan ini, ditunjukkan bahwa suatu graf merupakan graf Hamilton jika memenuhi salah satu dari kondisi-kondisi berikut: 1). graf terhubung dengan titik, dan ; 2). graf bipartisi dengan titik, dan ; 3). graf terhubung-k dengan n titik, dan . Ditunjukkan juga bahwa, jika merupakan graf terhubung dengan titik, dan , maka graf semi-Hamilton. Akhirnya, dibuktikan bahwa jika merupakan sebuah graf terhubung dengan n titik, dan , maka graf Hamilton-kuat.

**Kata Kunci:** Indeks Harary, Graf Hamilton, Semi-Hamilton, dan Hamilton-Kuat.

**Abstract**

Let be a connected graph with vertex set and . The distance between vertices and in , denoted by , is the shortest path connecting and in . The Harary index of graph , denoted by , is defined as follows: . In this thesis, the Harary index of a graph to present sufficient conditions for a graph to be Hamilton, semi-Hamilton, and strong-Hamilton. A graph is Hamilton graph if it is satisfied one of the following conditions: 1). is a connected graph of order , and ; 2). is a connected bipartite graph of order , and ; 3). is a k-connected graph of order n, and . It is also shown that, if is a connected graph of order , and , then is semi-Hamilton. Finally, proved that if is a connected graph of order n, and , then is strong-Hamilton.

**Keyword:** Harary Index, Hamilton, Semi-Hamilton, and Strong-Hamilton Graph.

**PENDAHULUAN**

Teori graf adalah suatu bidang matematika yang menarik perhatian, dikarenakan modelnya banyak digunakan pada aplikasi yang luas. Salah satu contohnya adalah TSP(Travelling Salesman Problem). TSP ini memanfaatkan sikel Hamilton untuk menyelesaikan problem. Sebuah sikel disebut sikel Hamilton, jika sikel tersebut memuat semua titik pada suatu graf, dan graf Hamilton merupakan graf yang memuat sikel Hamilton. Jika suatu graf hanya memuat lintasan Hamilton maka graf tersebut merupakan graf Semi-Hamilton.

Dan jika lintasan setiap titik di graf G merupakan lintasan Hamilton maka G merupakan

graf Hamilton-Kuat. Indeks Harary dari suatu graf merupakan sebuah syarat cukup agar suatu graf merupakan graf Hamilton, Semi-Hamilton dan Hamilton-Kuat. Pada tahun 1993 *Ivanciuc et al* (Ovidiu, Teodor and Alexandru, 1993) dan *Plavsic et al* (Plav, Nikoli and Trinajsti, 1993) memperkenalkan indeks Harary sebagai karakterisasi dari graf molekuler (Zhou, 2008). Indeks Harary didefinisikan sebagai jumlah dari satu dibagi jarak antara 2 titik dan titik pada graf (Rao Li, 2015). Pada skripsi ini ditunjukkan bahwa untuk menentukan sebuah graf merupakan graf Hamilton, Semi-Hamilton dan Hamilton-Kuat diperlukan indeks Harary, dimana indeks Harary memiliki syarat tertentu yang harus dipenuhi.

**LANDASAN TEORI**

1. **Beberapa Konsep dalam Graf**
2. **Graf**

**Definsi 2.1**

Sebuah graf merupakan pasangan terurut yang memuat himpunan titik dan himpunan sisi . Dimana himpunan titik dilambangkan dengan yang berarti himpunan berhingga (tidak kosong) dari obyek-obyek yang disebut titik, dan himpunan sisi dilambangkan dengan yang merupakan himpunan berhingga (boleh kosong) yang elemen-elemenya disebut sisi, sehingga setiap elemen pada adalah pasangan yang tak berurutan dari obyek-obyek di (Budayasa, 2007).

1. **Graf Nontrivial**

**Definisi 2.2**

Jika sebuah graf dan merupakan graf trivial, maka graf tersebut hanya memiliki satu titik. Semua graf selain graf trivial maka graf tersebut merupakan graf nontrivial (Bondy and Murty, 1976).

1. **Graf Komplit**

**Definisi 2.3**

Suatu graf disebut graf komplit jika graf tersebut merupakan graf sederhana yang semua titiknya berhubungan langsung (Budayasa, 2007).

1. **Graf Bipartisi**

**Definisi 2.4**

Graf adalah graf bipartisi, merupakan graf yang himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi dua himpunan bagian A dan B, dimana setiap sisi menghubungkan titik di A dan titik di B. (Budayasa, 2007).

1. **Derajat Titik pada Graf**
2. **Pengertian Derajat Titik**

**Definisi 2.10**

Suatu titik pada graf dilambangkan dengan . Derajat titik merupakan banyaknya sisi yang berhubungan langsung dengan titik itu sendiri dan jika terdapat gelung maka dihitung dua kali. Derajat suatu titik dilambangkan dengan atau (Budayasa, 2007).

1. **Sikel**

**Definisi 2.9**

Misalkan adalah sebuah jejak tutup (sirkit) di , maka disebut sikel jika titik awal(titik pertama yang akan dilewati) dan semua titik internalnya(titik tang berada diantara titik pertama dan titik terakhir) berbeda (Budayasa, 2007).

1. **Teorema Jabat Tangan**

**Teorema 2.11**

Jika sebuah graf, maka (Budayasa, 2007).

1. **Diameter Sebuah Graf**
2. **Jarak Dua Titik pada Graf**

**Definisi 2.12**

 merupakan graf dengann . Lintasan terpendek merupakan panjang minimum dari titik ke titik . Jarak antara 2 titik dan di dilambangkan dengan atau , merupakan lintasan terpendek dari suatu titik ke titik di (Hua and Wang, 2013).

1. **Eksentrisitas Sebuah Titik pada Graf**

**Definisi 2.13**

Eksentrisitas dari sebuah adalah maksimum dari jarak titik ke semua titik yang lain pada graf , dilambangkan dengan , didefinisikan sebagai berikut: } (Hua and Wang, 2013).

1. **Diameter Graf**

**Definisi 2.14**

Diameter dari graf adalah maksimum eksentrisitas dari semua titik pada graf , dilambangkan dengan , didefinisikan sebagai berikut : (Hua and Wang, 2013).

1. **Graf Hamilton, Graf Semi-Hamilton dan Graf Hamilton-Kuat**
2. **Graf Hamilton**

**Definisi 2.15**

 Misalkan sebuah graf, disebut graf Hamilton, jika memiliki sikel yang melewati semua titik pada graf tepat satu kali, kecuali titik awal dan titik akhir dilewati dua kali dan sikel tersebut merupakan sikel Hamilton (Budayasa, 2007).

1. **Graf Semi-Hamilton**

**Definisi 2.16**

Misalkan sebuah graf yang memuat lintasan Hamilton, maka merupakan graf semi-Hamilton. Dimana lintasan Hamilton merupakan Sebuah lintasan yang melewati setiap titik pada suatu graf tepat satu kali (Budayasa, 2007).

1. **Graf Hamilton-Kuat**

**Definisi 2.17**

 Misalkan sebuah graf, sebuah lintasan yang memuat semua titik pada disebut lintasan Hamilton. Jika lintasan setiap titik di graf merupakan lintasan Hamilton maka merupakan Graf Hamilton-Kuat (Budayasa, 2007).

1. **Graf Join**

**Definisi 2.18**

Misal dan adalah 2 buah graf. *Join* graf dan , dilambangkan dengan , adalah graf yang himpunan titiknya dan himpunan sisinya (Hua and Wang, 2013).

1. **Isomorfisme Graf**

**Definisi 2.19**

Dua graf dan dikatakan isomorfisme jika terdapat fungsi bijektif (korespondensi satu-satu) sedemikian hingga prapeta dua titik di domain sama dengan peta dua titik di kodomain. Isomorfisme pada graf dilambangkan dengan (Budayasa, 2007).

1. **Beberapa Lemma Pendukung Pembahasan**

**Lemma 2.1**

Misal adalah graf dengan titik, dengan barisan derajat . Jika , maka graf Hamilton .

**Lemma 2.2**

Misal graf bipartisi dengan titik, dengan bipartisi , dengan , dan , , jika , maka graf Hamilton.

**Lemma 2.3**

Misalkan graf terhubung-2 dengan titik dan sisi dengan . Jika maka Hamilton atau .

**Lemma 2.4**

Misal merupakan graf terhubung-3 dengan titik dan sisi dengan . Jika maka Hamilton atau .

**Lemma 2.5**

Misal graf terhubung-k dengan titik dan sisi dengan , maka graf Hamilton.

**Lemma 2.6**

Misal merupakan graf nontrivial dengan titik, dengan barisan derajat dimana . Misal tidak ada bilangan bulat sedemikian hingga dan . Maka graf Semi-Hamilton.

**Lemma 2.7**

Misal adalah graf dengan titik, dengan barisan derajat . Jika , maka graf Hamilton-Kuat.

**Catatan:**

Pembuktian Lemma-Lemma diatas dapat dilihat pada referensi-referensi berikut: Lemma 2.1 dan Lemma 2.2 (Berge, 1976); Lemma 2.3, Lemma 2.4 dan Lemma 2.5 (Byer et al, 2007); Lemma 2.6 (Bondy and Murty, 1976); Lemma 2.7 (Berge, 1976).

**PEMBAHASAN**

Pada bab ini akan diawali konsep indeks Harary sebuah graf terhubung, nontrivial dan beberapa hasil elementer terkait dengan indeks Harary sebuah graf.

1. **Indeks Harary Sebuah Graf**

**Definisi 3.1.1 :**

Misal graf terhubung dan nontrivial. Indeks Harary dari dilambangkan dengan didefinisikan sebagai berikut

Selanjutnya, indeks titik di graf , dilambangkan dengan dan didefinisikan sebagai berikut

(Hua and Wang, 2013).

**Teorema 3.1.2:**

Jika sebuah graf terhubung nontrivial dan merupakan sebuah titik di , maka

**Bukti:**

Misal sebuah graf terhubung nontrivial dan .

Berdasarkan Definisi 3.1.1,

Sehingga,

Jadi

Dengan demikian Teorema terbukti.

Berikut akan diberikan beberapa hasil elementer terkait dengan indeks titik dan indeks Harary sebuah graf.

**Lemma 3.1:**

Misal graf terhubung sederhana dengan titik dimana dan untuk setiap , . Jika dengan adalah barisan derajat dari graf , maka

Lebih jauh, batas atas dicapai jika dengan kata lain diameter maksimum 2.

**Bukti:**

Misalkan adalah himpunan titik-titik persekitaran di . Karena graf sederhana, maka

Perhatikan bahwa untuk setiap ,

Sehingga

 (1)

Karena terhubung, maka untuk setiap

Sehingga , dan

 (2)

Dari (1) dan (2) diperoleh

Selanjutnya, jika

 maka

Sehingga

Dengan demikian Lemma 3.1 terbukti.

 Hasil berikut menunjukkan hubungan antara indeks Harary, banyak titik, dan banyak sisi suatu graf. Dan hal ini, banyak dipakai dalam pembuktian Teorema-teorema selanjutnya.

**Teorema 3.2:**

Jika merupakan graf terhubung dengan titik dan sisi, maka

**Bukti:**

Misalkan . Berdasarkan Lemma 3.1, diperoleh

Berdasarkan Teorema 3.1.2,

 .

Dengan demikian, diperoleh

 .

Berdasarkan Teorema Jabat Tangan ,

Sehingga,

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa dan Teorema 3.2 terbukti.

1. **Syarat Cukup Bagi Sebuah Graf Merupakan Graf Hamilton.**

 Berikut akan ditunjukkan bahwa apakah indeks Harary suatu graf relatif lebih besar dari banyak titik, maka graf tersebut merupakan graf Hamilton.

**Teorema 3.3:**

Misal adalah graf terhubung dengan n titik dan . Jika maka graf Hamilton, kecuali , atau .

**Bukti:**

 Misalkan graf terhubung dengan dan , dimana .

1. Jika , maka graf Hamilton.

Andaikan bukan graf Hamilton dengan barisan derajat sedemikian hingga dan .

Berdasarkan Lemma 2.1, ada sebuah bilangan bulat sedemikian hingga dan . Tentunya .

Berdasarkan Lemma 3.1, untuk setiap i,

Sehingga

Dari Teorema 3.1.2,

 (1)

 (2)

 (3)

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa , padahal diketahui bahwa .

Jika , maka hal ini kontradiksi dengan premis pada Teorema, dan bukti lengkap.

1. Jika , maka pada kesamaan (1), (2), dan (3) berlaku relasi “sama dengan”. Selanjutya karena dan , maka atau dan .

Kesamaan (2) akan dipenuhi jika , , dan .

* Jika , maka , , dan . Berakibat , dimana bukan graf Hamilton.
* Jika dan , maka sehingga , , , , . Berakibat , dimana bukan graf Hamilton.

 Selanjutnya akan dibahas syarat indeks Harary dari graf bipartisi, agar graf bipartisi tersebut merupakan graf Hamilton.

**Teorema 3.4:**

Misal adalah graf bipartisi terhubung dengan bipartisi dan dengan . Jika maka graf Hamilton, kecuali (sebuah lintasan dengan 4 titik).

**Bukti:**

Diketahui dengan graf yang memenuhi premis pada Teorema.

1. Jika , maka graf Hamilton.

Andaikan bukan graf Hamilton, maka berdasarkan Lemma 2.2 terdapat sedemikian hingga dan . Selanjutnya akan dicari sebuah batas atas .

Misalkan dan , maka dan untuk , dan , maka

Sehingga

Dengan cara yang sama diperoleh .

Begitu juga , diperoleh

Akibatnya,

 (1)

 (2)

 (3)

Dari (1), (2), dan (3) disimpulkan bahwa , padahal diketahui bahwa .

Jika , maka hal ini kontradiksi dengan premis pada Teorema, dan bukti lengkap.

1. Jika , maka relasi “sama dengan” dipenuhi pada (1), (2), dan (3).

Relasi “sama dengan” pada (3) dipenuhi jika k=1 dan n-k=1, dan jika relasi “sama dengan” pada (2) dipenuhi, maka

 dan

Akibatnya, dan jelas bukan graf Hamilton.

 Beberapa Teorema berikutnya, selain indeks Harary suatu graf juga keterhubungan dari graf tersebut dijadikan syarat untuk menentukan Hamiltonian suatu graf.

**Teorema 3.5:**

Misalkan merupakan graf terhubung-2 dengan n titik, dan . Jika maka Hamilton atau .

**Bukti:**

Misalkan graf yang memenuhi premis pada Teorema, dengan .

1. Jika , maka graf Hamilton.

Andaikan bukan graf Hamilton dan bukan . Berdasarkan Lemma 2.3, maka dimana .

Berdasarkan Teorema 3.2 diperoleh:

Jika , maka hal ini kontradiksi dengan premis pada Teorema, dan bukti lengkap.

1. Jika , maka diperoleh dan bukan graf Hamilton.

**Teorema 3.6:**

Misalkan adalah graf terhubung-3 dengan n titik, dan . Jika maka Hamilton atau .

**Bukti:**

Misalkan graf yang memenuhi premis pada Teorema, dengan .

1. Jika , maka graf Hamilton.

Andaikan bukan graf Hamilton dan bukan . Berdasarkan Lemma 2.4, maka dimana .

Berdasarkan Teorema 3.2 diperoleh:

Jika , maka hal ini kontradiksi dengan premis pada Teorema, dan bukti lengkap.

1. Jika , maka diperoleh dan bukan graf Hamilton.

**Teorema 3.7:**

Misalkan graf terhubung-k dengan n titik. Jika maka graf Hamilton.

**Bukti:**

Misalkan graf yang memenuhi premis pada Teorema, dengan .

1. Jika , maka graf Hamilton.

Andaikan tidak Hamilton. Berdasarkan Lemma 2.5, maka dimana .

Berdasarkan Teorema 3.2 diperoleh:

Jika , maka hal ini kontradiksi dengan premis pada Teorema, dan bukti lengkap.

1. **Syarat Cukup Bagi Sebuah Graf Merupakan Graf Semi-Hamilton.**

Berikut akan dibahas syarat indeks Harary dari suatu graf terhubung nontrivial dengan n titik dan , agar graf tersebut merupakan graf semi-Hamilton.

**Teorema 3.8:**

Misal adalah graf terhubung yang memiliki n titik dan . Jika maka graf semi-Hamilton, kecuali , atau , atau .

**Bukti:**

Misalkan graf terhubung yang memenuhi premis pada Teorema, dengan .

1. Jika , maka graf semi-Hamilton.

Andaikan bukan graf semi-Hamilton dengan barisan derajat sedemikian hingga dan .

Berdasarkan Lemma 2.6, ada sebuah bilangan bulat sedemikian hingga dan . Karena terhubung dan , maka .

Berdasarkan Lemma 3.1, untuk setiap i,

Sehingga

Dari Teorema 3.1.2,

 (1)

 (2)

 (3)

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa , padahal diketahui bahwa .

Jika , maka hal ini kontradiksi dengan premis pada Teorema, dan bukti lengkap.

1. Jika , maka relasi “sama dengan” dipenuhi pada kesamaan (1), (2), dan (3) .

Selanjutnya, Berdasarkan Lemma 3.1, kesamaan (1) dipenuhi jika diameter graf . (\*)

Kesamaan (2) akan dipenuhi jika

, , dan . (\*\*)

Kesamaan (3) dipenuhi jika (k-2)(2n-3k-5)=0 ekivalen dengan k=2 atau 2n=3k+5.

* Jika k=2 maka graf terhubung dengan , , dan . Berakibat graf .
* Jika 2n=3k+5, maka , karena maka n=7, k=3 atau n=10, k=5

Dari (\*\*), dapat diketahui bahwa adalah graf terhubung yang berorder 7 dengan , ,

Atau adalah graf terhubung yang berorder 10 dengan , . Berakibat graf atau .

1. **Syarat Cukup Bagi Sebuah Graf Merupakan Graf Hamilton-Kuat**

Teorema berikut merupakan syarat indeks Harary suatu graf terhubung dengan n titik, agar graf tersebut merupakan graf Hamilton-kuat.

**Teorema 3.9:**

Misalkan merupakan graf terhubung dengan n titik. Jika maka graf Hamilton-kuat, kecuali atau .

**Bukti:**

Misalkan graf terhubung yang memenuhi premis pada Teorema, dengan .

1. Jika , maka graf Hamilton-kuat.

Andaikan bukan graf Hamilton-kuat dengan barisan derajat sedemikian hingga dan .

Berdasarkan Lemma 2.7, ada sebuah bilangan bulat k dengan sedemikian hingga dan .

Berdasarkan Lemma 3.1, untuk setiap i,

Sehingga

Dari Teorema 3.1.2,

 (1)

 (2)

 (3)

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa , padahal diketahui bahwa .

Jika , maka hal ini kontradiksi dengan premia pada Teorema, dan bukti lengkap.

1. Jika , maka relasi “sama dengan” berlaku pada kesamaan (1), (2), dan (3). Selanjutnya karena , dan , maka k=2 atau (k=3 dan n=2k).

Kesamaan (6) akan dipenuhi jika , dan .

* Jika k=2, maka , dan . Berakibat , dimana bukan graf Hamilton-kuat.
* Jika k=3 dan n=2k, maka n=6 sehingga , , , , dan . Berakibat , dimana bukan graf Hamilton-kuat.

**PENUTUP**

**Simpulan**

 Berdasarkan pembahasan pada skripsi yang berjudul indeks Harary graf Hamilton, semi-Hamilton dan Hamilton-kuat dapat disimpulkan hal-hal berikut:

1. Sebuah graf dikatakan sebagai graf Hamilton jika memenuhi syarat indeks Harary sebagai berikut:
* Jika dan graf terhubung dengan n titik dan . Maka graf Hamilton, kecuali , atau .
* Jika dan adalah graf bipartisi terhubung dengan bipartisi dan dengan . Maka graf Hamilton, kecuali (sebuah lintasan dengan 4 titik).
* Jika dan graf terhubung-2 dengan n titik, dan . Maka Hamilton atau .
* Jika dan graf terhubung-3 dengan n titik, dan . Maka Hamilton atau .
* Jika dan graf terhubung-k dengan n titik. Maka graf Hamilton.
1. Sebuah graf dikatakan sebagai graf semi-Hamilton jika memenuhi syarat indeks Harary sebagai berikut:
* Jika dan graf terhubung dengan n titik dan . Maka graf semi-Hamilton, kecuali , atau , atau .
1. Sebuah graf dikatakan sebagai graf Hamilton-kuat jika memenuhi syarat indeks Harary sebagai berikut:
* Jika dan merupakan graf terhubung dengan n titik. Maka graf hamilton-kuat, kecuali atau .

**Saran**

Penulis menyarankan untuk penelitian selanjutnya dapat membahas syarat perlu dan syarat cukup bagi sebuah graf, agar graf tersebut merupakan graf Hamilton, graf semi-Hamilton, maupun graf Hamilton-kuat menggunakan indeks Harary dari suatu graf.

**DAFTAR PUSTAKA**

Budayasa, I Ketut. 2007. *Teori Graf dan Aplikasinya*. Surabaya: Unipress.

Byer, Own D, and Deirdre L Smeltzer. 2007. “Edge Bounds in Nonhamiltonian K-Connected Grafs” 307: 1572-79. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2006.09.008>.

C. Berge, Graphs and Hypergraphs, American Elseveir Publishing Company, 1976.

Hua, Hongbo, and Maolin Wang. 2013. “On Harary Index and Traceable Grafs Harary Index Condition for Grafs to Be Traceable” 70:297-300.

Info, Article. 2017. “Distance-Based Topological Indices and Double Graf” 8 (1): 83-91. <https://doi.org/10.22052/ijmc.2017.43073>.

J.A. Bondy, U.S.R. Murty. 1976. “Graph Theory With Aplications”. Macmillan, London and Elseveir, New York.

Li, Rao. 2015. “Harary Index and Some Hamiltonian Properties of Grafs.” *AKCE International Journal of Grafs and Combinatorics* 12 (1). Elseveir B.V.:64-69. <https://doi.org/10.1016/j.akcej.2015.06.010>.

Liu, Ruifang, Xue Du, and Huicai Jia. 2017. “Some Observations on Harary Index and Traceable Grafs\*”77 (1521315002): 195-208.

Plav, Dejan, Sonja Nikoli, and Nenaj Trinajsti. 1993. “On The Harary Index for the Characterization of Chemical Grafs\*.” 12:235-36.

Petersen, Graf, D. A. N. Beberapa, Sifat-sifat Yang Berkaitan, Petersen Graf, and Some related Properties. 2011. “No title.”

Teknik, Sekolah. 2012. “Penerapan Sirkuit Hamilton Dalam Perencanaan Lintasan trem Di ITB.”

Zhou, Bo. 2008. “On Harary Index,” n0. September 2015. <https://doi.org/10.1007/s10910-007-9339-2>.