

MODEL MATEMATIKA DARI PENYEBARAN POLUTAN DI UDARA DENGAN MODEL GAUSSIAN PLUME

Shinta Patmasari

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
e-mail: shintapatmasari@mhs.unesa.ac.id

Abadi

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
e-mail: abadi@unesa.ac.id

Abstrak

Masalah besar di dunia yang berkaitan dengan lingkungan adalah adanya penyebaran polutan di udara karena cerobong asap dari pabrik-pabrik industri. Model matematika dari penyebaran polutan di udara diperoleh dengan menggunakan metode dispersi. Istilah dispersi merupakan kombinasi antara difusi dan adveksi. Model yang digunakan untuk memodelkan metode dispersi adalah model *Gaussian plume*. *Plume* disini menggambarkan asap yang keluar dari cerobong asap dari pabrik-pabrik industri. Hasil dari penelitian ini menunjukkan bahwa pengaruh ketinggian sumber polutan terhadap konsentrasi $C(x, y)$ adalah semakin tinggi ketinggian sumber polutan maka semakin menurunnya kadar cemaran polutan. Sedangkan pengaruh ketinggian sumber polutan terhadap konsentrasi $C(x, z)$ adalah semakin tinggi ketinggian sumber polutan maka kadar cemaran polutan akan tetap sama.

Kata Kunci: Polutan, Dispersi, *Gaussian plume*

Abstract

The big problem in the world related to the environment is existence spreading of the pollutants in the air because the chimney from industrial plants. The mathematical model of air pollutant dispersion is obtained by using the dispersion method. The term dispersion is a combination of diffusion and advection. The model used to model the dispersion method is the Gaussian plume model. *Plume* here illustrates the smoke coming out of the chimneys from industrial plants. The results of research shows that the influence of elevation of pollutant sources on the concentration of $C(x, y)$ is the higher the height of the pollutant source, the decreasing pollutant contamination rate. While the influence of elevation of pollutant source to the concentration of $C(x, z)$ is the higher the height of the pollutant source, the pollutant contamination will remain the same.

Keywords: Pollutant, Dispersion, Gaussian plume

PENDAHULUAN

Matematika berkontribusi dalam permasalahan aktivitas sehari-hari atau ilmu lainnya yang dapat disajikan dalam bentuk pemodelan matematika. Pemodelan matematika adalah bagian dari matematika yang berupaya untuk mempresentasikan dan menjelaskan sistem-sistem fisik maupun permasalahan pada dunia nyata supaya lebih akurat. Representasi matematika diperoleh dari proses yang disebut dengan model matematika.

Salah satu cabang ilmu matematika modern, yaitu persamaan diferensial. Di mana persamaan diferensial merupakan suatu bagian dari ilmu matematika yang cukup strategis karena berhubungan dengan Analisis, Geometri dan cabang matematika lainnya, sehingga dapat berfungsi

sebagai identifikasi rancangan atau penyelesaian permasalahan yang berhubungan dengan dunia nyata.

Salah satu model yang diperoleh dari masalah nyata yaitu, adanya pencemaran polutan di udara. Polutan merupakan suatu bahan atau zat yang dapat menjadi penyebab pencemaran.

Model dari penyebaran polutan di udara diperoleh dengan menggunakan metode dispersi. Istilah dispersi dalam penelitian ini merupakan kombinasi antara difusi dan adveksi. Difusi akan terjadi karena adanya penyebaran dari arus eddy dan adveksi akan terjadi karena adanya tiupan angin.

Model dispersi gauss adalah model estimasi yang sering digunakan untuk mengamalkan pengaruh emisi terhadap kualitas udara (Bakar, 2006). Model yang digunakan untuk model dispersi gauss adalah model

gaussian plume. Istilah *plume* menggambarkan hal-hal seperti asap yang keluar dari cerobong asap atau uap air dari cerobong asap di pembangkit listrik.

KAJIAN PUSTAKA

A. Pencemaran Lingkungan

Berdasarkan Undang-Undang Pokok Pengolahan Lingkungan Hidup No. 4 Tahun 1982, pencemaran lingkungan atau polusi adalah masuknya atau dimasukkannya makhluk hidup, zat energi, dan atau komponen lain ke dalam lingkungan, atau berubahnya tatanan lingkungan oleh kegiatan manusia atau oleh proses alam sehingga kualitas lingkungan menjadi kurang atau tidak dapat berfungsi lagi sesuai peruntukannya. Polutan adalah suatu zat atau bahan yang menyebabkan terjadinya polusi, di mana keberadaannya di suatu lingkungan dapat menyebabkan kerugian terhadap makhluk hidup. Contohnya: partikel lumpur yang berada di aliran sungai untuk pengairan bukan menjadi masalah, tetapi keberadaan lumpur di aliran pipa air minum merupakan polutan.

B. Hukum difusi fick

Difusi adalah gerakan suatu gas dari konsentrasi tinggi ke konsentrasi yang lebih rendah sehingga terjadi persebaran molekul-molekul gas secara merata pada setiap bagian (Riyanto, 2009). Tingkat laju perpindahan massa dinyatakan dengan fluks difusi (*J*), yang didefinisikan sebagai massa (atau jumlah atom) *M* berdifusi melalui dan tegak lurus terhadap area silang unit padat per satuan waktu (Callister, 2001). Dalam bentuk matematis, dapat digambarkan sebagai berikut

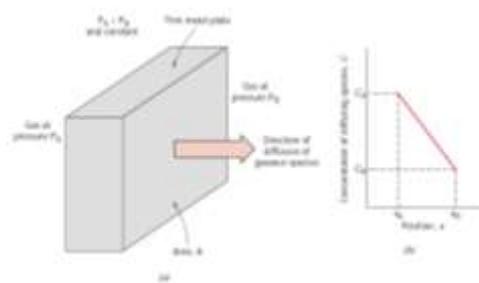
$$J = \frac{M}{At} \tag{1}$$

dimana *A* menunjukkan daerah dimana difusi terjadi dan *t* adalah waktu difusi yang telah berlalu. Dalam bentuk diferensial menjadi

$$J = \frac{1}{A} \frac{dM}{dt} \tag{2}$$

dengan $J \left(\frac{kg}{m^2s} \right)$.

Salah satu contoh umum difusi dalam **keadaan steady-state** adalah difusi gas melalui lempeng logam dimana konsentrasi (atau tekanan) yang menyebar pada kedua permukaan plat konstan (Gb. 1).



Gambar 1. (a) difusi steady-state melintasi plat tipis, (b) profil konsentrasi linier untuk keadaan difusi pada (a).

Ketika konsentrasi *C* diplotkan terhadap posisi (atau jarak) di dalam *x* padat, kurva yang dihasilkan disebut **profil konsentrasi**; kemiringan pada titik tertentu pada kurva ini adalah **gradien konsentrasi**:

$$\text{gradien konsentrasi} = \frac{dC}{dx} \tag{3}$$

Profil konsentrasi diasumsikan linier dan

$$\text{gradien konsentrasi} = \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C_A - C_B}{x_A - x_B} \tag{4}$$

dengan koefisien dari konsentrasi massa difusi adalah $\frac{kg}{m^3}$ (Callister, 2001).

Matematik dari difusi steady-state dalam satu arah (*x*) relatif sederhana, karena fluksnya sebanding dengan gradien konsentrasi melalui ekspresi

$$J = -D \frac{dC}{dx} \tag{5}$$

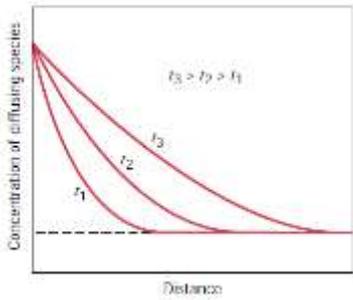
dengan *D* adalah **koefisien difusi** (m^2/s). Tanda negatif tersebut menunjukkan bahwa arah difusi menuruni gradien konsentrasi, dari arah tinggi sampai konsentrasi rendah. Persamaan (5) merupakan **hukum pertama Fick** (Callister, 2001).

Keadaan difusi yang paling praktis adalah keadaan tidak stabil. Artinya, fluks difusi dari gradien konsentrasi pada titik tertentu dalam padatan bervariasi sesuai waktu, dengan akumulasi bersih atau penipisan yang menyebar (Gb. 2). Dalam keadaan tidak stabil, diperoleh persamaan diferensial parsial sebagai berikut

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C}{\partial x} \right) \tag{6}$$

yang dikenal sebagai **hukum kedua Fick** (Callister, 2001). Jika koefisien difusi tidak bergantung pada komposisi maka persamaan (6) dapat disederhanakan

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \tag{7}$$



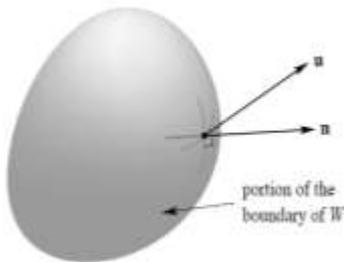
Gambar 2. Profil konsentrasi untuk difusi dalam keadaan tidak stabil yang dilakukan dalam tiga waktu yang berbeda, t_1, t_2, t_3 .

C. Hukum kekekalan massa

Misalkan W adalah sub ruang tetap D (W tidak berubah seiring waktu). Tingkat perubahan massa di W adalah

$$\frac{d}{dt} m(W, t) = \frac{d}{dt} \int_W \rho(x, t) dV = \int_W \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) dV \quad (8)$$

Misalkan ∂W menunjukkan batas W , diasumsikan rata, misal n menunjukkan unit luar normal yang didefinisikan pada titik-titik ∂W , dan memisalkan dA yang menunjukkan elemen satuan pada ∂W . Laju aliran volume di ∂W per satuan luas adalah $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ dan laju aliran massa per satuan luas adalah $\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ (Gb. 3).



Gambar 3. Massa melintasi batas ∂W per satuan waktu sama dengan integral permukaan $\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ di atas ∂W .

Prinsip kekekalan massa dapat dinyatakan sebagai laju perubahan massa di W sama dengan tingkat dimana massa yang melintasi ∂W dalam arah **kedalam**, yaitu

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho dV = - \int_{\partial W} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA \quad (9)$$

Berikut ini merupakan **bentuk integral dari hukum kekekalan massa**, yaitu

$$\int_W \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) \right] dV = 0 \quad (10)$$

Sehingga diperoleh persamaan diferensial dari hukum kekekalan massa, yaitu

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (11)$$

(Chorin, 2000)

D. Model Gaussian Plume

1. Perkiraan Penyebaran Dispersi

Adanya zat pencemar di udara ambien berasal dari sumber emisi gas buang, baik alami maupun sumber emisi buatan manusia atau aktivitas kegiatan manusia. Sumber emisi gas buang yang berasal dari alam yaitu letusan gunung berapi, gas belerang, tetesan air laut dan lain-lain sedangkan untuk sumber emisi gas buang yang berasal dari kegiatan manusia adalah asap kendaraan bermotor, industri, pembakaran hutan, pembakaran sampah dan lain-lain.

2. Pengertian Dispersi

Jika aliran polutan kontinu terlepas dari sumbernya dan tertiuip oleh angin tetap (*stady state*) di atmosfer terbuka, pertama-tama polutan tersebut akan naik dari lubang sumber (cerobong). Kemudian aliran polutan tersebut akan berbelok ke bawah dan terus bergerak sesuai dengan arah rata-rata angin yang mengencerkan polutan dan membawanya menjauhi sumbernya.

3. Metode Gaussian Plume

Koefisien arus difusi (K) dalam atmosfer adalah fungsi dari kecepatan angin yang tidak disebutkan bahwa koefisien arus difusi bermacam-macam dengan kondisi cuaca dan waktu pelepasan. Oleh karena itu koefisien pusaran arus dapat diperoleh dengan mengganti variabel x dengan variabel bebas yang baru

$$r = \frac{1}{u} \int_0^x K(\xi) d\xi$$

dengan satuan $[m^2]$. r adalah kelipatan konstan dari distribusi konsentrasi. (Stockie, 2011)

E. Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial adalah suatu persamaan yang di dalamnya terdapat satu atau lebih turunan parsial suatu fungsi (yang tidak diketahui) dengan dua atau lebih peubah bebas (Dennemeyer, 1968). Tingkat (*order*) adalah turunan tertinggi yang terdapat dalam persamaan diferensial dan derajat (*degree*) adalah pangkat tertinggi dari turunan tertinggi yang termuat dalam persamaan diferensial.

Persamaan diferensial parsial dikatakan linier jika memiliki derajat pertama pada variabel terikat (atau variabel terikat bila ada lebih dari satu variabel terikat yang ada) dan turunan parsial yang terjadi dalam persamaan (Dennemeyer, 1968). Beberapa contoh persamaan diferensial parsial linier, yaitu

1. $xz_x - yz_y = \sin xy$
2. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$
3. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

dimana c adalah konstanta, t adalah waktu, x, y adalah variabel bebas dan z, u adalah variabel terikat.

F. Transformasi Laplace

Definisi 1.

Diberikan $f(t)$ untuk $t \geq 0$, dan f memenuhi kondisi tertentu untuk menyatakan sedikit kemungkinan. Maka transformasi laplace dari f , dinyatakan dengan $\mathcal{L}\{f(t)\}$ atau $F(s)$, dan didefinisikan dengan persamaan

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \tag{12}$$

Transformasi laplace menggunakan kernel $K(s, t) = e^{-st}$. Karena solusi persamaan diferensial linier dengan koefisien konstan didasarkan pada fungsi eksponensial (Boyce dan DiPrima, 2012).

Teorema 1.

Misal f kontinu dan f' kontinu sepotong-potong pada suatu interval $0 \leq t \leq A$ dan dimisalkan ada konstanta K, a , dan M yang memenuhi $|f(t)| \leq Ke^{at}$ untuk $t \geq M$. Maka $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ ada untuk $s > a$, dan

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) \tag{13}$$

(Boyce dan DiPrima, 2012)

METODE

Jenis penelitian yang digunakan adalah studi literatur. Di mana studi literatur merupakan tahapan memperoleh informasi atau data dari beberapa buku dan referensi lainnya baik secara langsung maupun online.

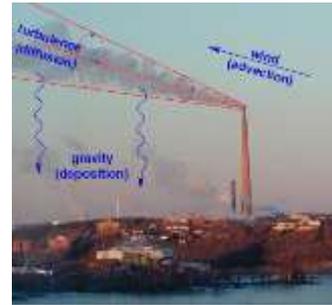
Data yang digunakan adalah data sekunder dan sumber data diperoleh dari beberapa buku dan referensi lain yang terkait seperti jurnal ilmiah, hasil penelitian terdahulu dan lain-lain.

Teknik pengumpulan data dilakukan dengan cara: (1) Mengumpulkan informasi seperti jurnal ilmiah, hasil penelitian terdahulu, dan materi-materi yang terkait dengan penelitian melalui situs internet, (2) Mengunjungi perpustakaan untuk membaca, memahami, dan menelaah buku dan referensi lain yang terkait dengan materi.

Untuk menganalisis data pada model matematika dari penyebaran polutan di udara dilakukan dengan tahapan sebagai berikut: (1) Merekonstruksi model matematika dari penyebaran polutan di udara, (2) Mencari solusi dari model penyebaran polutan di udara dengan model *gaussian plume*, (3) Membuat simulasi, (4) Menarik kesimpulan.

PEMBAHASAN

A. Rekonstruksi Model Penyebaran Polutan Di Udara



Gambar 4. Ketiga distribusi yang berkontribusi pada penyebaran polutan di udara.

Pada pemodelan penyebaran polutan di udara akan dibatasi pengeluaran transportasi polutan tunggal dimana konsentrasi massa pada lokasi $\vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3[m]$ dan waktu $t \geq 0 [s]$ yang didiskripsikan oleh fungsi $C(\vec{x}, t) \left[\frac{kg}{m^3} \right]$. Berdasarkan hukum kekekalan massa, konsentrasi massa C dapat diekspresikan pada bentuk persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = S \tag{14}$$

Dimana $S(\vec{x}, t) \left[\frac{kg}{m^3s} \right]$ adalah sumber polutan, ∇ adalah vektor operator diferensial yang bersifat linier $(\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z})$ dan fungsi vektor $\vec{J}(\vec{x}, t) \left[\frac{kg}{m^2s} \right]$ adalah massa fluks dari polutan karena kombinasi dari difusi dan adveksi.

Kontribusi difusi ke fluks muncul karena adanya penyebaran dari arus *eddy* di atmosfer. Sehingga berdasarkan hukum Fick, hasil difusi atmosfer dapat diasumsikan dengan

$$\vec{J}_D = -K\nabla C \tag{15}$$

di mana koefisien difusi $K(\vec{x}) = \text{diag}(K_x, K_y, K_z) \left[\frac{m^2}{s} \right]$ adalah matriks diagonal yang isinya merupakan arus difusi *eddy* yang secara umum merupakan fungsi posisi. Tanda negatif digunakan untuk memastikan aliran polutan dari konsentrasi tinggi ke konsentrasi rendah. Kontribusi kedua pada fluks dikarenakan adanya adveksi linier oleh angin, yang dapat diekspresikan dengan

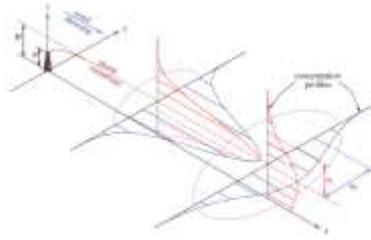
$$\vec{J}_A = C\vec{u} \tag{16}$$

dimana $\vec{u} [m/s]$ adalah kecepatan angin. Sehingga diperoleh total fluks

$$\vec{J} = -K\nabla C + C\vec{u} \tag{17}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (17) ke persamaan (14) maka akan diperoleh persamaan dispersi sebagai berikut

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (C\vec{u}) = \nabla \cdot (K\nabla C) + S \tag{18}$$



Gambar 5. Polutan plume yang menyebar dari titik sumber secara kontinu, dengan angin sejajar sumbu x .

Dibuat asumsi sederhana untuk menurunkan solusi analisis dalam bentuk tertutup:

- i. Polutan dipancarkan pada laju konstan $Q \left[\frac{kg}{s} \right]$ dari titik sumber $\vec{x} = (0,0,H)$ dengan tinggi H di atas permukaan tanah. Sehingga sumber dapat ditulis sebagai berikut

$$S(\vec{x}) = Q\delta(x)\delta(y)\delta(z - H)$$
- ii. Kecepatan angin konstan dan lurus dengan sumbu x positif sehingga

$$\vec{u} = (u, 0, 0), u \geq 0$$

$$\vec{u} = \vec{u}(t), |\vec{u}| \geq 0$$
- iii. Solusi keadaan setimbang, yang memungkinkan jika kecepatan angin dan nilai semua parameter bebas terhadap waktu dan skala waktu yang cukup panjang.
- iv. Arus difusi *eddy* pada arah sumbu x lebih kecil daripada adveksi pada arah sumbu x , maka $K_x \partial_{x^2} C$ diabaikan.
- v. Difusi *eddy* pada jarak x saja dan konstan sepanjang waktu dan ruang, sehingga $K_x(x) = K_y(x) = K_z(x) := K(x)$.
- vi. Variasi topografi diabaikan sehingga permukaan tanah diperoleh $z = 0$.
- vii. Polutan tidak bisa menembus tanah.

Gunakan asumsi (i)-(vi) untuk mereduksi persamaan (18), sehingga akan diperoleh persamaan difusi-adveksi sebagai berikut

$$u \frac{\partial c}{\partial x} = K \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + K \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + Q\delta(x)\delta(y)\delta(z - H) \quad (19)$$

dengan solusi nilai $x, z \in [0, \infty)$ dan $y \in (-\infty, \infty)$. Berdasarkan asumsi (vii), diperoleh kondisi batas

$$K \frac{\partial c}{\partial z}(x, y, 0) = 0 \quad (20)$$

Formulasi yang setara dari masalah ini dapat ditemukan dengan menghilangkan istilah sumber dari persamaan (19) dan konsentrasi polutan pada steady state

$$u \frac{\partial c}{\partial x} = K \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + K \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \quad (21)$$

$$C(0, y, z) = \frac{Q}{u} \delta(y)\delta(z - H) \quad (22)$$

$$C(\infty, y, z) = 0, C(x, \pm\infty, z) = 0, C(x, y, \infty) = 0 \quad (23)$$

$$K \frac{\partial c}{\partial z}(x, y, 0) = 0. \quad (24)$$

Berdasarkan metode gaussian plume, perubahan dari eliminasi variabel konstan K pada persamaan (20) mengarah pada permasalahan koefisien konstan $c(r, y, z) := C(x, y, z)$:

$$\frac{\partial c}{\partial r} = \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \quad (25)$$

Dengan kondisi batas untuk c adalah $c(0, y, z) = \frac{Q}{u} \delta(y)\delta(z - H), c(\infty, y, z) = 0, c(r, \pm\infty, z) = 0, c(r, y, \infty) = 0, \frac{\partial c}{\partial z}(r, y, 0) = 0$.

Kemudian, menerapkan metode terpisah dari persamaan (25) dengan mengasumsikan solusi bergantung pada variabel y dan z yang dapat dipisahkan berdasarkan $c(r, y, z) = \frac{Q}{u} a(r, y) \cdot b(r, z)$ (26)

Sehingga diperoleh persamaan dua dimensi sebagai berikut:

$$\frac{\partial a}{\partial r} = \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} \quad (27)$$

dan solusi untuk nilai $r \in [0, \infty)$ dan $y \in (-\infty, \infty)$ dengan kondisi batas

$$a(0, y) = \delta(y), a(\infty, y) = 0, a(r, \pm\infty) = 0. \quad (28)$$

Dan

$$\frac{\partial b}{\partial r} = \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} \quad (29)$$

dan solusi untuk nilai $r \in [0, \infty)$ dan $z \in (0, \infty)$ dengan kondisi batas

$$b(0, z) = \delta(z - H), b(\infty, z) = 0, b(r, \infty) = 0, \frac{\partial b}{\partial z}(r, 0) = 0 \quad (30)$$

Pada permasalahan variabel $a(r, y)$ dari persamaan (27) akan digunakan metode transformasi laplace pada r untuk memperoleh

$$\frac{\partial \bar{a}}{\partial r} = \frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial y^2}$$

Transformasi laplace dari $\frac{\partial \bar{a}}{\partial r}$ adalah

$$\rho \bar{a} - a(0, y) = \frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial y^2}$$

Dimana $\bar{a}(\rho, y) := \mathcal{L}_r\{a(r, y)\} = \int_0^\infty e^{-\rho r} a(r, y) dr$ dan ρ adalah variabel transformasi. Dengan menerapkan sumber pada kondisi batas (28), sehingga diperoleh

$$\frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial y^2} - \rho \bar{a} = -\delta(y)$$

Selanjutnya, transformasi laplace terhadap y

$$\eta^2 \bar{\bar{a}} - \eta \bar{\bar{a}}(\rho, 0) - \frac{\partial \bar{\bar{a}}}{\partial \eta}(\rho, 0) - \rho \bar{\bar{a}} = -1$$

Dimana $\bar{\bar{a}}(\rho, \eta) := \mathcal{L}_y\{\bar{a}(\rho, y)\} = \int_0^\infty e^{-\eta y} \bar{a}(\rho, y) dy$ dan η adalah variabel transformasi. Dengan $c_1 = \bar{\bar{a}}(\rho, 0)$ dan $c_2 = \partial_y \bar{\bar{a}}(\rho, 0) - 1$

$$\bar{\bar{a}}(\rho, \eta) = \frac{\eta c_1}{\eta^2 - \rho} + \frac{c_2}{\eta^2 - \rho}$$

Kemudian, invers transformasi di η untuk memperoleh

$$\bar{\bar{a}}(\rho, y) = c_1 \cosh \sqrt{\rho} y - \frac{c_2}{\sqrt{\rho}} \sinh \sqrt{\rho} y$$

$$\bar{\bar{a}}(\rho, y) = \frac{c_1}{2} (e^{\sqrt{\rho} y} + e^{-\sqrt{\rho} y}) - \frac{c_2}{2\sqrt{\rho}} (e^{\sqrt{\rho} y} - e^{-\sqrt{\rho} y})$$

Saat $\bar{a} \rightarrow 0$ dan $y \rightarrow \infty$

$$c_1 = \frac{c_2}{\sqrt{\rho}}$$

Selanjutnya mereduksi $\bar{a}(\rho, y)$

$$\bar{a}(\rho, y) = \frac{c_2}{\sqrt{\rho}} \left(e^{-\sqrt{\rho}y} \right)$$

Asumsikan c_2 tidak bergantung ρ dan menerapkan invers transformasi pada ρ dan diperoleh $a(r, y) = \frac{c_2}{\sqrt{\pi r}} e^{-\frac{y^2}{4r}}$.

Dengan menerapkan identitas fungsi delta $\delta(y) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{y^2}{4r}}}{\sqrt{4\pi r}}$, sehingga ditemukan bahwa $c_2 = \frac{1}{2}$ dan diperoleh

$$a(r, y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi r}} e^{-\frac{y^2}{4r}} \quad (31)$$

Selanjutnya, solusi dari variabel $b(r, z)$ dari persamaan (29) dengan menerapkan transformasi laplace terhadap r adalah

$$\frac{\partial b}{\partial r} = \frac{\partial^2 b}{\partial z^2}$$

Transformasi laplace dari $\frac{\partial b}{\partial r}$ adalah

$$\rho \bar{b} - b(0, z) = \frac{\partial^2 \bar{b}}{\partial z^2}$$

Dimana $\bar{b}(\rho, z) := \mathcal{L}_r\{b(r, z)\} = \int_0^\infty e^{-\rho r} b(r, z) dr$ dan ρ adalah variabel transformasi. Dengan menerapkan kondisi batas (30), sehingga diperoleh

$$\frac{\partial^2 \bar{b}}{\partial z^2} - \rho \bar{b} = -\delta(z - H)$$

Kemudian, transformasi laplace terhadap z ,

$$\zeta^2 \bar{\bar{b}} - \zeta \bar{\bar{b}}(\rho, 0) - \frac{\partial \bar{\bar{b}}}{\partial z}(\rho, 0) - \rho \bar{\bar{b}} = -e^{-\zeta H}$$

Dimana $\bar{\bar{b}}(\rho, \zeta) := \mathcal{L}_z\{\bar{b}(\rho, z)\} = \int_0^\infty e^{-\zeta z} \bar{b}(\rho, z) dz$ dan ζ adalah variabel transformasi. Dengan menerapkan kondisi batas transformasi Neuman $\partial_z \bar{\bar{b}}(\rho, 0) = 0$

sehingga diperoleh $\bar{\bar{b}}(\rho, \zeta) = \frac{\zeta \bar{\bar{b}}(\rho, 0)}{\zeta^2 - \rho} - \frac{e^{-\zeta H}}{\zeta^2 - \rho}$. Dengan menerapkan invers transformasi pada ζ diperoleh

$$\bar{b}(\rho, z) = \bar{b}(\rho, 0) \cosh \sqrt{\rho} z - \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sinh \left(\sqrt{\rho} (z - H) \right)$$

$$\bar{b}(\rho, z) = \frac{\bar{b}(\rho, 0)}{2} \left(e^{\sqrt{\rho} z} + e^{-\sqrt{\rho} z} \right) - \frac{1}{2\sqrt{\rho}} \left(e^{\sqrt{\rho}(z-H)} - e^{\sqrt{\rho}(z-H)} \right)$$

Jika $\bar{b} \rightarrow 0$ dan $z \rightarrow \infty$ maka $\bar{b}(\rho, 0) = \frac{e^{-\sqrt{\rho} H}}{\sqrt{\rho}}$.

Selanjutnya mereduksi $\bar{b}(\rho, z)$

$$\bar{b}(\rho, z) = \frac{1}{2\sqrt{\rho}} \left(e^{-\sqrt{\rho}(z-H)} + e^{-\sqrt{\rho}(z+H)} \right)$$

Kemudian, invers transformasi terhadap ρ

$$b(r, z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi r}} \left(e^{-\frac{(z-H)^2}{4r}} + e^{-\frac{(z+H)^2}{4r}} \right) \quad (32)$$

Konsentrasi polutan dapat diperoleh dengan mensubstitusikan persamaan (31) dan (32) ke persamaan (26), sehingga diperoleh

$$c(r, y, z) = \frac{Q}{4\pi ur} \exp \left(-\frac{y^2}{4r} \right) \left[\exp \left(-\frac{(z-H)^2}{4r} \right) + \exp \left(-\frac{(z+H)^2}{4r} \right) \right] \quad (33)$$

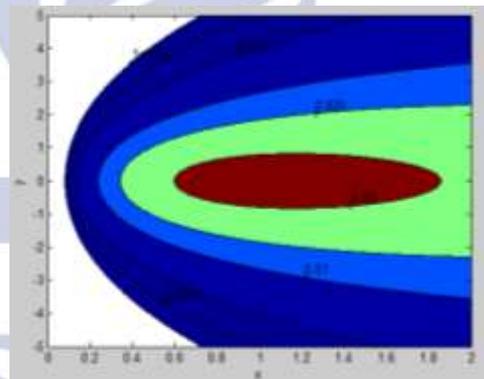
B. Simulasi

Pada persamaan model *gaussian plume* diasumsikan bahwa K adalah konstan, sehingga dapat diintegrasikan dengan $r = \frac{Kx}{u}$ dan diperoleh persamaan konsentrasi polutan pada permukaan tanah, yaitu

$$C(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi Kx} \exp \left(-\frac{uy^2}{4Kx} \right) \left[\exp \left(-\frac{u(z-H)^2}{4Kx} \right) + \exp \left(-\frac{u(z+H)^2}{4Kx} \right) \right].$$

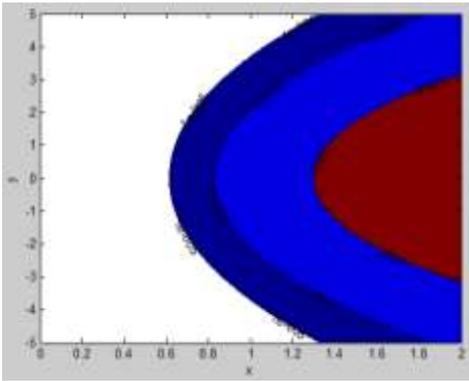
1. Pengaruh ketinggian sumber polutan (H) terhadap konsentrasi polutan $C(x, y)$

Bentuk sederhana dari konsentrasi polutan dengan $z = 0$ adalah $C(x, y) = \frac{Q}{2\pi Kx} \exp \left(-\frac{u(y^2+H^2)}{4Kx} \right)$. Dengan laju polutan (Q) sebesar $1 \frac{kg}{det}$, kecepatan rata-rata angin (u) sebesar $1 \frac{m}{det}$, koefisien dari difusi (K) sebesar $1 \frac{m^2}{det}$ dan tinggi sumber polutan (H) di $H = 2 m$ dan $H = 5 m$, maka diperoleh pola-pola sebaran seperti yang terlihat pada **Gambar 6 dan 7**.



Gambar 6. Pola sebaran polutan dari konsentrasi $C(x, y)$ terhadap ketinggian sumber polutan di $H = 2 m$.

Pada **Gambar 6** merupakan pola sebaran polutan dari konsentrasi $C(x, y)$ dengan mensimulasikan ketinggian sumber polutan di $H = 2 m$. Pola sebaran polutan berbentuk degradasi dengan kadar cemaran polutan tertinggi sebesar $0.05 \frac{kg}{m^3}$ pada awal konsentrasi cemaran polutan di $(0,6,0)$. Berdasarkan **Gambar 6**, konsentrasi cemaran polutan di $(1,1)$ memiliki kadar cemaran polutan sebesar $0.025 \frac{kg}{m^3}$ dan konsentrasi cemaran polutan di $(1,2)$ memiliki kadar cemaran polutan sebesar $0.01 \frac{kg}{m^3}$.



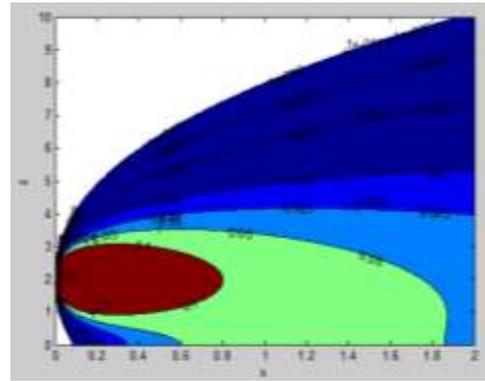
Gambar 7. Pola sebaran polutan dari konsentrasi $C(x, y)$ terhadap ketinggian sumber polutan di $H = 5 m$.

Pada **Gambar 7** merupakan pola sebaran polutan dari konsentrasi $C(x, y)$ dengan mensimulasikan ketinggian sumber polutan di $H = 5 m$. Pola sebaran polutan berbentuk degradasi dengan kadar cemaran polutan tertinggi sebesar $0.001 \frac{kg}{m^3}$ pada awal konsentrasi cemaran polutan di $(1.4, 0)$. Berdasarkan **Gambar 7**, konsentrasi cemaran polutan di $(1, 0)$ memiliki kadar cemaran polutan sebesar $0.0001 \frac{kg}{m^3}$.

Berdasarkan **Gambar 6 dan 7** dapat diperoleh bahwa perubahan ketinggian sumber polutan berakibat pada pemusatan kadar cemaran polutan. Di mana semakin tinggi sumber polutan maka pusat kadar cemaran polutan bergeser ke kanan searah sumbu x . Dan menaikinya ketinggian sumber polutan dari $H = 2 m$ ke $H = 5 m$ dapat menyebabkan penurunan kadar cemaran polutan maksimum sama dengan setengahnya.

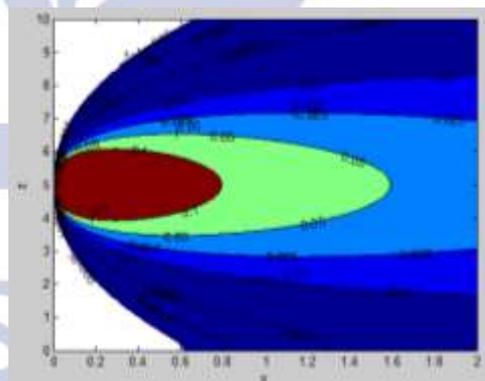
2. Pengaruh ketinggian sumber polutan (H) terhadap konsentrasi polutan $C(x, z)$

Bentuk sederhana dari konsentrasi polutan dengan $y = 0$ adalah $C(x, z) = \frac{Q}{4\pi Kx} \left[\exp\left(-\frac{u(z-H)^2}{4Kx}\right) + \exp\left(-\frac{u(z+H)^2}{4Kx}\right) \right]$. Dengan laju polutan (Q) sebesar $1 \frac{kg}{det}$, kecepatan rata-rata angin (u) sebesar $1 \frac{m}{det}$, koefisien dari difusi (K) sebesar $1 \frac{m^2}{det}$ dan tinggi sumber polutan (H) di $H = 2 m$ dan $H = 5 m$, maka diperoleh pola-pola sebaran seperti yang terlihat pada **Gambar 8 dan 9**.



Gambar 8. Pola sebaran polutan dari konsentrasi $C(x, z)$ terhadap ketinggian sumber polutan di $H = 2 m$.

Pada **Gambar 8** merupakan pola sebaran polutan dari konsentrasi $C(x, z)$ dengan mensimulasikan ketinggian sumber polutan di $H = 2 m$. Pola sebaran polutan berbentuk degradasi dengan kadar cemaran polutan tertinggi sebesar $0.1 \frac{kg}{m^3}$ pada awal konsentrasi cemaran polutan di $(0, 2)$. Berdasarkan **Gambar 8**, konsentrasi cemaran polutan di $(1, 2)$ memiliki kadar cemaran polutan sebesar $0.05 \frac{kg}{m^3}$ dan konsentrasi cemaran polutan di $(1, 4)$ memiliki kadar cemaran polutan sebesar $0.01 \frac{kg}{m^3}$.



Gambar 9 Pola sebaran polutan dari konsentrasi $C(x, z)$ terhadap ketinggian sumber polutan di $H = 5 m$.

Pada **Gambar 9** merupakan pola sebaran polutan dari konsentrasi $C(x, z)$ dengan mensimulasikan ketinggian sumber polutan di $H = 5 m$. Pola sebaran polutan berbentuk degradasi dengan kadar cemaran polutan tertinggi sebesar $0.1 \frac{kg}{m^3}$ pada awal konsentrasi cemaran polutan di $(0, 5)$. Berdasarkan **Gambar 9**, konsentrasi cemaran polutan di $(1, 5)$ memiliki kadar cemaran polutan sebesar $0.05 \frac{kg}{m^3}$ dan konsentrasi cemaran polutan di $(1, 7)$ memiliki kadar cemaran polutan sebesar $0.01 \frac{kg}{m^3}$.

Berdasarkan **Gambar 8 dan 9** dapat diperoleh bahwa perubahan ketinggian sumber polutan berakibat pada pemusatan kadar cemaran polutan. Di mana semakin tinggi sumber polutan maka pusat cemaran polutan bergeser ke kiri searah sumbu x dan bergeser ke atas searah sumbu z . Dan kadar cemaran polutan sama pada setiap ketinggian dari sumber polutan.

PENUTUP

A. Simpulan

Berdasarkan pembahasan dapat ditarik simpulan sebagai berikut:

1. Model penyebaran polutan di udara dengan menggunakan pendekatan Gaussian plume yang diperoleh persamaan difusi-adveksi, yaitu $u \frac{\partial C}{\partial x} = K \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + K \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + Q \delta(x) \delta(y) \delta(z - H)$ di mana solusi untuk nilai $x, z \in [0, \infty)$ dan $y \in (-\infty, \infty)$. Dan kondisi batas $C(0, y, z) = 0, C(\infty, y, z) = 0, C(x, \pm\infty, z) = 0, C(x, y, \infty) = 0$.
2. Pada solusi persamaan difusi-adveksi diturunkan dengan metode Transformasi Laplace yang diperoleh persamaan konsentrasi polutan, yaitu $c(r, y, z) = \frac{Q}{4\pi ur} \exp\left(-\frac{y^2}{4r}\right) \left[\exp\left(-\frac{(z-H)^2}{4r}\right) + \exp\left(-\frac{(z+H)^2}{4r}\right) \right]$. Dengan mengintegrasikan $r = \frac{Kx}{u}$ pada persamaan konsentrasi polutan maka diperoleh konsentrasi polutan pada permukaan tanah, yaitu $C(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi Kx} \exp\left(-\frac{uy^2}{4Kx}\right) \left[\exp\left(-\frac{u(z-H)^2}{4Kx}\right) + \exp\left(-\frac{u(z+H)^2}{4Kx}\right) \right]$.
3. Pengaruh ketinggian sumber polutan pada konsentrasi $C(x, y)$ berakibat pada pemusatan kadar cemaran polutan, di mana semakin tinggi sumber polutan maka pusat kadar cemaran polutan bergeser ke kanan searah sumbu x dan menyebabkan penurunan kadar cemaran polutan. Sedangkan pengaruh ketinggian sumber polutan pada konsentrasi $C(x, z)$ berakibat pada pemusatan kadar cemaran polutan, di mana semakin tinggi sumber polutan maka pusat cemaran polutan bergeser ke kiri searah sumbu x dan bergeser ke atas searah sumbu z dan kadar cemaran polutan sama pada setiap ketinggian sumber polutan.

B. Saran

Perlu dikembangkan kajian tentang batas keakuratan Gaussian plume dengan modifikasi diameter cerobong, musim yang terjadi, dan lain-lain serta diharapkan cara tersebut dapat ditentukan batas data yang dimasukkan ke

dalam persamaan untuk keakuratan pemodelan penyebaran polutan selanjutnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Bakar, A.A.M. (2006). *Persebaran Kualitas Udara pada Daerah Industri Migas Studi Kasus di PT. Pertamina UP VI Balongan*. Skripsi. Depok: Departemen Geografi FMIPA Universitas Indonesia.
- Badudu, J.S. 2003. *Kamus Kata-Kata Serapan Asing Dalam Bahasa Indonesia*. Jakarta: Buku Kompas.
- Boyce, William E. dan DiPrima, Ricard C. 2012. *Elementary Differential Equations And Boundary Value Problems, Tenth Edition*. New York: John Wiley & Sons.
- Chorin dan Alexandre. 2000. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics, Third Edition*. Spinger-Verlag: New York.
- Dennemeyer, Rene. 1968. *Introduction To Partial Differential Equations And Boundary Value Problems*. California: McGraw-Hill Book Company.
- Pasquil, F. 1961. "The Estimation of The Dispersion of Wind Borne Material", *Meteorological Magazine*, 90, 33-49.
- Pinsky, M. A. 1998. *Partial Differential Equations And Boundary-Value Problems With Applications, Third Edition*. Singapore: McGraw-Hill Inc.
- Rachmadiarti Fida, P. Rinie Pratiwi, Yuliani, Budijastuti Widowati, Hariani Dyah, F. Herlina, Asri Maharani Tri dan Winarsih. 2007. *Biologi Umum*. Surabaya: Unesa University Press.
- Riyanto, Nurdin dan Akabar, Ari Y. 2009. *Super Genius Olimpiade Kimia SMA Nasional Dan Internasional*. Jakarta: Pustaka Widyatama.
- Stockie, John M. 2011. "The Mathematics Of Atmospheric Dispersion Modelling". *Society For Industrial And Applied Mathematics*, 349-372.
- Sukarmin. 2012. "Pencemaran Lingkungan". Dalam Tjandrakirana, Muslimin dan Suyono (Ed.). 2012. *Sanis Dasar*. Surabaya: Universitas Negeri Surabaya University Press.
- Sutriyani, Yani. 2014. *Pencemaran Lingkungan*. UIN SYARIFHIDAYATULLAH.
- Undang-Undang Pokok Pengolahan Lingkungan Hidup No. 4 Tahun 1982.
- Waluya, S. B. 2006. *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- William D. Callister, Jr. 2001. *Fundamentals of Materials Science ad Engineering, Fifth Edition*. Department of Metallurgical Engineering The University of Utah.

Witono, Djoko. 2003. *Karakteristik Pencemaran Udara Di PLTGU UJB-I Tambak Lorok Semarang*. Tesis tidak diterbitkan. Semarang: PPs Universitas Diponegoro.

