MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika
Volume 6 No.2 Tahun 2018
ISSN 2301-9115

TITIK TETAP PADA RUANG METRIK-$\boldsymbol{G}$ LENGKAP

Jesya Sulton Abdulloh
(Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya)
E-mail : jesyaabdulloh@mhs.unesa.ac.id

Manuharawati
(Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya)
E-mail : manuharawati@unesa.ac.id

Abstrak

Misalkan $\boldsymbol{X}$ adalah sebarang himpunan tidak kosong dan $\boldsymbol{G}: \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X} \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{G}$ disebut metrik-G pada $\boldsymbol{X}$ jika untuk setiap $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ berlaku $(\boldsymbol{i})\ \boldsymbol{G}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{0}$ jika $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$; $(\boldsymbol{ii})\ \boldsymbol{G}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a})$; $(\boldsymbol{iii})\ \boldsymbol{G}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) > \boldsymbol{0}$ untuk $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$; $(\boldsymbol{iv})\ \boldsymbol{G}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) \leq \boldsymbol{G}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})$ untuk $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{c}$; $(\boldsymbol{iv})\ \boldsymbol{G}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}) \leq \boldsymbol{G}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})$. Kemudian pasangan $(X,\ G)$ disebut Ruang Metrik-G (G-*Metric Space)*.Diberikan sebarang himpunan tidak kosong $\boldsymbol{X} \subseteq \mathbb{R}$ dan $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$, titik $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ disebut titik tetap dari fungsi $\boldsymbol{f}$ jika $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$. Hasil penelitian ini menjelaskan sifat-sifat kekonvergenan, barisan Cauchy, dan kelengkapan pada ruang metrik-G yang digunakan untuk membuktikan teorema titik tetap pada ruang metrik-G.

Kata Kunci: titik tetap**,** ruang metrik-G

Abstract

Let $\boldsymbol{X}$ be any non-empty set and $\boldsymbol{G}: \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X} \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{G}$ is called the G-metric of if for every $\boldsymbol{X}$ if for every $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ apply $(\boldsymbol{i})\ \boldsymbol{G}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{0}$ jika $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$; $(\boldsymbol{ii})\ \boldsymbol{G}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a})$;$(\boldsymbol{iii})\ \boldsymbol{G}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) > \boldsymbol{0}$ for $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$;$(\boldsymbol{iv})\ \boldsymbol{G}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) \leq \boldsymbol{G}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})$ for $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{c}$; $(\boldsymbol{iv})\ \boldsymbol{G}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}) \leq \boldsymbol{G}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})$. Then the pair $(X,\ G)$ is called G-metric space. Given any non-empty set of $\boldsymbol{X} \subseteq \mathbb{R}$ and $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$, the point $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ is called fixed point of function $\boldsymbol{f}$ if $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$. The results of this study explain the properties of convergence squence, Cauchy sequence, and completeness of the G-metric space used to prove the fixed point theorem in the G-metric space.

Keywords: fixed point, G-metric space

PENDAHULUAN

Pada tahun 2006 Zaed Mustafa dan Brailey Sims memperkenalkan metrik baru pada himpunan tidak kosong X yaitu metrik-G (*G-metric*). Misalkan X adalah sebarang himpunan tidak kosong dan $G: X \times X \times X \to \mathbb{R}$, G disebut metrik-G pada X jika untuk setiap $a,\ b,\ c,\ x \in X$ berlaku: $(i)\ G(a,\ b,\ c) = 0$ jika $a = b = c$; $(ii)\ G(a,\ a,\ b) > 0$ untuk $a \neq b$; $(iii)\ G(a,\ a,\ b) \leq G(a,\ b,\ c)$ untuk $b \neq c$; $(iv)\ G(a,\ b,\ c) = G(a,\ b,\ c) = G(b,\ a,\ c) = G(b,\ c,\ a) = G(c,\ a,\ b) = G(c,\ b,\ a)$; $(v)\ G(a,\ b,\ c) \leq G(a,\ x,\ x) + G(x,\ b,\ c)$. Kemudian pasangan $(X,\ G)$ disebut Ruang Metrik-G (G-*Metric Space*).

Dengan adanya pengertian jarak (metrik) di dalam ruang metrik-G, maka dapat ditinjau sifat-sifat dari kekonvergenan suatu barisan, barisan Cauchy dan kelengkapan pada ruang metrik-G yang akan gunakan dalam pembuktian titik tetap pada ruang metrik-G.

Pada tahun 2017, Yaé Ulrich Gaba meneliti tentang teorema titik tetap pada ruang metrik-G. Untuk itu dalam penelitian ini penulis merasa perlu untuk membahas dan mengalisis teorema titik tetap pada ruang metrik-G lengkap yang relavan dengan penelitian Yaé Ulrich Gaba.

Hasil dari penelitian Yaé Ulrich Gaba akan dibahas lebih rinci dalam jurnal ini. Penelitian ini diharapkan memberikan kontribusi dalam perkembangan matematika di bidang analisis matematika terutama dalam topik titik tetap.

KAJIAN TEORI

A. Ruang Metrik

Definisi 2.1

Diberikan sebarang himpunan S yang tidak kosong. Fungsi $d: S \times S \to \mathbb{R}$ disebut metrik atau fungsi jarak pada S jika untuk setiap $a,\ b,\ c \in S$ berlaku:

a. $d(a,\ b) \geq 0$
b. $d(a,\ b) = 0$ jika dan hanya jika $a = b$
c. $d(a,\ b) = d(b,\ a)$
d. $d(a,\ b) \leq d(a,\ c) + d(c,\ b)$

jika d merupakan metrik pada S, himpunan S yang dilengkapi d yang dituliskan dengan $(S,\ d)$ disebut ruang metrik dan elemen-elemen S disebut titik, $d(a,\ b)$ disebut jarak titik a dengan b.

(Manuharawati, 2003)

Contoh 2.1

Misalkan X sebarang himpunan tidak kosong dan $d: X \times X \to \mathbb{R}$ dengan $d(a,\ b) = \begin{cases} 1, a \neq b \\ 0, a = b \end{cases}$ maka pasangan $(X,\ d)$ merupakan ruang metrik dan d disebut metrik diskrit pada X.

B. Titik Tetap

Definisi 2.2 (Titik Tetap)

Titik $a \in X$ disebut titik tetap pada fungsi $T: X \to X$ jika $T(a) = a$.

(Kreyszig, 1978)

PEMBAHASAN

Definisi 3.1

Diberikan sebarang himpunan tidak kosong X. Pemetaan $G: X \times X \times X \to \mathbb{R}$ disebut metrik-G jika untuk setiap $a,\ b,\ c,\ x \in X$ memenuhi:

a. $G(a,\ b,\ c) = 0$ jika $a = b = c$
b. $G(a,\ a,\ b) > 0$ untuk $a \neq b$
c. $G(a,\ a,\ b) \leq G(a,\ b,\ c)$ untuk $b \neq c$
d. $G(a,\ b,\ c) = G(a,\ c,\ b) = G(b,\ a,\ c) = G(b,\ c,\ a) = G(c,\ a,\ b) = G(c,\ b,\ a)$
e. $G(a,\ b,\ c) \leq G(a,\ x,\ x) + G(x,\ b,\ c)$

Pasangan $(X,\ G)$ disebut ruang metrik-G.

(Gaba, 2017)

Proposisi 3.1

Misalkan $(X,\ G)$ adalah ruang metrik-G. Jika $G(a,\ b,\ c) = 0$ maka $a = b = c$.

(Gaba, 2017)

Bukti:

Andaikan bahwa $a = b = c$ salah, maka minimal terdapat elemen yang berbeda, misalkan $a \neq b$, berdasarkan Definisi 3.1 Bagian b, $G(a,\ b,\ c) > 0$ untuk $a \neq b$, sehingga terjadi kontradiksi bahwa $G(a,\ b,\ c) = 0$. Karena terjadi kontradiksi maka pengandaian salah, maka haruslah $a = b = c$.

Definisi 3.2

Misalkan $(X,\ G)$ adalah ruang metrik-G. Pemetaan $T: X \to X$ disebut pemetaan kontraktif jika terdapat konstanta k, $0 < k < 1$ sehingga

$$G(T(a),\ T(b),\ T(c)) < kG(a,\ b,\ c)$$

untuk setiap $a,\ b,\ c \in X$. Secara geometri, hal ini berarti bahwa jarak antara $T(a)$, $T(b)$ dan $T(c)$ lebih kecil dari pada jarak antara a, b dan c.

(Mustafa, 2010)

Definisi 3.3

Misalkan $(X,\ G)$ adalah ruang metrik-G, barisan (z_n) disebut barisan disebut barisan G-Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $G(z_n,\ z_m,\ z_l) < \varepsilon$ untuk setiap $n,\ m,\ l \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, $m \geq n_0$, $l \geq n_0$.

(Gaba, 2017)

Definisi 3.4

Misalkan $(X,\ G)$ adalah ruang metrik-G. Jika (z_n) adalah barisan pada X, barisan (z_n) dikatakan G-konvergen ke z jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $G(z,\ z_n,\ z_m) < \varepsilon$ untuk setiap $n,\ m \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, $m \geq n_0$.

(Gaba, 2017)

Proposisi 3.2

Jika $(X,\ G)$ adalah ruang metrik-G dan d adalah metrik pada X dengan $d(a,\ b) = G(a,\ a,\ b) + G(a,\ b,\ b)$ untuk setiap $a,\ b \in X$, (z_n) adalah barisan pada X maka untuk setiap $n,\ m \in \mathbb{N}$ pernyataan berikut ekuivalen:

1. (z_n) adalah G-konvergen ke $z \in X$
2. $\lim G(z,\ z_n,\ z_m) = 0$
3. $\lim d_G(z,\ z_n) = 0$
4. $\lim G(z,\ z_n,\ z_n) = 0$
5. $\lim G(z,\ z,\ z_n) = 0$

(Mustafa, 2006)

Bukti:

- $1 \to 2$ Ambil sebarang $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Karena barisan (z_n) konvergen ke z maka terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $G(z,\ z_n,\ z_m) < \varepsilon$ untuk $n,\ m \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, $m \geq n_0$, selanjutnya dipilih $K = n_0 \in \mathbb{N}$ mengakibatkan untuk sebarang $n,\ m \in \mathbb{N}$, $n \geq K$, $m \geq K$ berlaku
$|G(z,\ z_n,\ z_m) - 0| = |G(z,\ z_n,\ z_m)| < |\varepsilon| = \varepsilon$.
Jadi $\lim G(z,\ z_n,\ z_m) = 0$.
- $2 \to 3$ Karena
$\lim d(z,\ z_n)$
$= \lim\big(G(z,\ z,\ z_n) + G(z,\ z_n,\ z_n)\big)$
$= \lim G(z,\ z,\ z_n)$
$+ \lim G(z,\ z_n,\ z_n)$
Berdasarkan Definisi 3.1 Bagian c, diperoleh
$$\lim G(z,\ z,\ z_n) \leq \lim G(z,\ z_n,\ z_m)$$
dan
$$\lim G(z,\ z_n,\ z_n) \leq \lim G(z,\ z_n,\ z_m)$$
karena $\lim G(z,\ z_n,\ z_m) = 0$ dan $G(a,\ b,\ c) \geq 0$ maka $\lim G(z,\ z,\ z_n) = 0$ dan $\lim G(z,\ z_n,\ z_n) = 0$ sehingga

$$\lim d(z,\ z_n) = \lim G(z,\ z,\ z_n) + \lim G(z,\ z_n,\ z_n) = 0$$

- $3 \to 4$ Karena $\lim d(z,\ z_n) = \lim G(z,\ z,\ z_n) + G(z,\ z_n,\ z_n) = 0$.
  Andaikan bahwa $\lim G(z,\ z_n,\ z_n) \neq 0$ karena $G(a,\ b,\ c) \geq 0$, maka dimisalkan bahwa $\lim G(z,\ z_n,\ z_n) > 0$ katakan $\lim G(z,\ z_n,\ z_n) = c$, sehingga diperoleh $\lim G(z,\ z,\ z_n) = -a$, terjadi kontradiksi bahwa $G(a,\ b,\ c) \geq 0$, jadi pengandaian salah, haruslah $\lim G(z,\ z_n,\ z_n) = 0$.
- $4 \to 5$ Berdasarkan Definisi 3.1 bagian e
  $$G(a,\ b,\ c) \leq G(a,\ x,\ x) + (x,\ b,\ c)$$
  Dengan memilih $a = b = z$ dan $c = x = z_n$, maka diperoleh
  $$\begin{aligned}&\lim G(z,\ z,\ z_n)\\ &\leq \lim\big(G(z,\ z_n,\ z_n) + G(z_n,\ z,\ z_n)\big)\\ &\leq \lim\big(G(z,\ z_n,\ z_n) + G(z,\ z_n,\ z_n)\big)\\ &\leq \lim\big(2G(z,\ z_n,\ z_n)\big)\\ &\leq 2\lim G(z,\ z_n,\ z_n)\\ &\leq 0\end{aligned}$$
- $5 \to 1$ Berdasarkan Definisi 3.1 Bagian e
  $$\begin{aligned}G(z,\ z_n,\ z_m) &= G(z_m,\ z_n,\ z)\\ &\leq G(z_m,\ z,\ z) + G(z,\ z_n,\ z)\\ &\leq G(z,\ z,\ z_m) + G(z,\ z,\ z_n)\end{aligned}$$
  Diketahui bahwa $\lim G(z,\ z,\ z_n) = 0$, artinya bahwa barisan $\big(G(z,\ z,\ z_n)\big)$ merupakan barisan yang konvergen ke 0 sehingga untuk setiap $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, ada $N_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq N_0$ berlaku $G(z,\ z,\ z_n) < \frac{\varepsilon}{2}$, dan juga terdapat $M_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $m \geq M_0$ berlaku $G(z,\ z,\ z_m) < \frac{\varepsilon}{4}$, selanjutnya dipilih $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 = \max\{N_0,\ M_0\}$ maka
  $$\begin{aligned}G(z,\ z_n,\ z_m) &= G(z_m,\ z_n,\ z)\\ &\leq G(z_m,\ z,\ z) + G(z,\ z_n,\ z)\\ &\leq G(z,\ z,\ z_m) + G(z,\ z,\ z_n)\\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2}\\ &\leq \varepsilon\end{aligned}$$

Jadi (z_n) konvergen ke z.

Proposisi 3.3
Misalkan $(X,\ G)$ adalah ruang metrik-G dan (z_n) adalah barisan pada X, maka pernyataan berikut ekuivalen:

1. Barisan (z_n) adalah G-Cauchy
2. Untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $G(z_n,\ z_m,\ z_m) < \varepsilon$ untuk setiap $n,\ m \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, $m \geq n_0$.

(Mustafa, 2006)

Bukti:

- $1 \to 2$ Diberikan sebarang $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, karena barisan (z_n) adalah G-Cauchy maka terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $G(z_n,\ z_m,\ z_l) < \varepsilon$, untuk setiap $n,\ m,\ i \geq n_0$. Berdasarkan Definisi 3.1 Bagian c diperoleh
  $G(z_n,\ z_m,\ z_m) < G(z_n,\ z_m,\ z_l) < \varepsilon$.
- $2 \to 1$ Berdasarkan Definisi 3.1 Bagian e
  $$\begin{aligned}&G(z_n,\ z_m,\ z_l) = G(z_l,\ z_n,\ z_m)\\ &\leq G(z_l,\ z_m,\ z_m) + G(z_m,\ z_n,\ z_m)\\ &\leq G(z_l,\ z_m,\ z_m) + G(z_n,\ z_m,\ z_m)\end{aligned}$$
  Karena untuk setiap $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, terdapat $N_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $G(z_n,\ z_m,\ z_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $n,\ m \in \mathbb{N}$, $n \geq N_0$, $m \geq N_0$, maka terdapat $M_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $G(z_l,\ z_m,\ z_m) < \frac{\varepsilon}{3}$ untuk setiap $l,\ m \in \mathbb{N}$, $l \geq M_0$, $m \geq M_0$, sehingga
  $$\begin{aligned}&G(z_n,\ z_m,\ z_l) = G(z_l,\ z_n,\ z_m)\\ &\leq G(z_l,\ z_m,\ z_m) + G(z_n,\ z_m,\ z_m)\\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{3}\\ &\leq \varepsilon\end{aligned}$$
  Jadi (z_n) merupakan barisan Cauchy.

Definisi 3.5
Misalkan $(X,\ G)$ dan $(X',\ G')$ adalah ruang metrik-G. fungsi $f: X \to X'$ dikatakan G-kontinu dititik $x \in X$ jika sebarang $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ sedemikian hingg untuk setiap $a,\ b \in X$, $G(x,\ a,\ b) < \delta$ berlaku $G'\big(f(x),\ f(a),\ f(b)\big) < \varepsilon$. fungsi f dikatakan G - kontinu pada X jika G-kontinu pada setiap $x \in X$.

(Mustafa, 2008)

Teorema 3.1
Suatu pemetaan kontraktif pada ruang metrik-G adalah pemetaan kontinu.

Bukti:
Misal $(X,\ G)$ adalah ruang metrik-G dan $T: X \to X$ adalah pemetaan kontraktif, maka terdapat $k \in \mathbb{R}$, $0 < k < 1$ sedemikian hingga untuk setiap $a,\ b,\ c \in X$ berlaku $G\big(T(a),\ T(b),\ T(c)\big) \leq k\,G(a,\ b,\ c)$. Ambil sebarang $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, dibentuk $\delta = \frac{\varepsilon}{k} > 0$, jika $G(a,\ b,\ c) < \delta = \frac{\varepsilon}{k}$ maka $G\big(T(a),\ T(b),\ T(c)\big) \leq k\,G(a,\ b,\ c) < k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$. Jadi T kontinu.

Dengan mengacu pada Definisi 2.12 yang ditulis Abbas (2012;3) selanjutnya akan digeneralisasi fungsi kontinu tiga variabel pada ruang metrik-G.

Definisi 3.6
Misalkan $(X,\ G)$ adalah ruang metrik-G. Fungsi $f: X \times X \times X \to \mathbb{R}$ dikatakan kontinu jika untuk setiap barisan

(a_n), (b_n) dan (c_n) pada X yang G-konvergen ke a, b dan c maka $\left(f(a_n, b_n, c_n)\right)$ konvergen ke $f(a, b, c)$.

Definisi 3.7
Suatu ruang metrik-G $(X,\ G)$ dikatakan ruang metrik-G lengkap jika untuk setiap barisan G-Cauchy di $(X,\ G)$ adalah G-konvergen di $(X,\ G)$.

(Gaba, 2017)

Definisi 3.8
Ruang metrik-G $(X,\ G)$ dikatakan simetri jika $G(a,\ b,\ b) = G(a,\ a,\ b)$ untuk setiap $a,\ b \in X$.

(Gaba, 2017)

Teorema 3.2
Jika $(X,\ G)$ adalah ruang metrik-G, maka G merupakan fungsi kontinu tiga variabel.

(Gaba, 2017)

Bukti:
Misalkan barisan (a_n), (b_m), dan (c_l) konvergen ke $a,\ b$ dan c. Berdasarkan Definisi 3.1 Bagian e diperoleh:

$$G(a,\ b,\ c) \le G(a,\ a_n,\ a_n) + G(a_n,\ b,\ c)$$
$$G(a_n,\ b,\ c) = G(b,\ a_n,\ c) \le G(b,\ b_m,\ b_m) + G(b_m,\ a_n,\ c)$$
$$G(b_m,\ a_n,\ c) = G(c,\ a_n,\ b_m) \le G(c,\ c_l,\ c_l) + G(c_l,\ a_n,\ b_m) = G(c,\ c_l,\ c_l) + G(a_n,\ b_m,\ c_l)$$

Sehingga

$$G(a,\ b,\ c) \le G(a,\ a_n,\ a_n) + G(b,\ b_m,\ b_m) + G(c,\ c_l,\ c_l) + G(a_n,\ b_m,\ c_l)$$
$$G(a,\ b,\ c) - G(a_n,\ b_m,\ c_l) \le G(a,\ a_n,\ a_n) + G(b,\ b_m,\ b_m) + G(c,\ c_l,\ c_l) \quad \cdots (1)$$

Dengan cara yang sama dapat diperoleh:

$$G(a_n,\ b_m,\ c_l) - G(a,\ b,\ c) \le G(a,\ a_n,\ a_n) + G(b,\ b_m,\ b_m) + G(c,\ c_l,\ c_l) \quad \cdots (2)$$

Dari 1 dan 2 diperoleh

$$|G(a_n,\ b_m,\ c_l) - G(a,\ b,\ c)| \le G(a,\ a_n,\ a_n) + G(b,\ b_m,\ b_m) + G(c,\ c_l,\ c_l)$$

Karena (a_n), (b_m), dan (c_l) konvergen ke a, b dan c, maka

$$\lim_{n\to\infty} |G(a_n,\ b_n,\ c_n) - G(a,\ b,\ c)|$$
$$\le \lim_{n\to\infty}\left(G(a,\ a_n,\ a_n) + G(b,\ b_n,\ b_n) + G(c,\ c_n,\ c_n)\right)$$
$$\le \lim_{n\to\infty} G(a,\ a_n,\ a_n) + \lim_{n\to\infty} G(b,\ b_n,\ b_n) + \lim_{n\to\infty} G(c,\ c_n,\ c_n)$$
$$\le 0 + 0 + 0$$
$$\le 0$$

Jadi $G(a_n,\ b_n,\ c_n)$ konvergen ke $G(a,\ b,\ c)$, karena untuk sebarang barisan (a_n), (b_n) dan (c_n) yang konvergen ke a, b dan c berlaku $G(a_n,\ b_n,\ c_n)$ konvegen ke $G(a,\ b,\ c)$ maka metrik-G kontinu.

Teorema 3.3
Misalkan $X \subset \mathbb{R}$, $(X,\ G)$ adalah ruang metrik-G lengkap yang simetri, dan $T: X \to X$. Jika T memenuhi kondisi:

$$G(T(a),\ T(b),\ T(c)) \le \left(\frac{G(T(a),\ b,\ c) + G(a,\ T(b),\ c) + G(a,\ b,\ T(c))}{2G(a, T(a), T(a)) + G(b, T(b), T(b)) + G(c, T(c), T(c)) + 1}\right) G(a,\ b,\ c)$$

untuk setiap $a,\ b,\ c \in X$, maka:

1. T memiliki setidaknya 1 titik tetap $\xi \in X$.
2. Untuk setiap $z \in X$, barisan $\left(T^n(z)\right)$ konvergen ke titik tetap dengan $T^n(z) = T\left(T^{n-1}(z)\right)$.
3. Jika $\xi,\ \kappa \in X$ adalah dua titik tetap yang berbeda maka$G(\xi,\ \kappa,\ \kappa) = G(\xi,\ \xi,\ \kappa) \ge \frac{1}{3}$.

Bukti:

1. Misalkan $z_0 \in X$, dibentuk suatu barisan (z_n) sedemikian hingga $z_{n+1} = T(z_n)$. Jika$p_n = G(z_n,\ z_{n+1},\ z_{n+1})$, $q_n = G(T(z_{n-1}),\ z_n,\ z_n)$, dan $s_n = G(z_{n-1},\ z_n,\ z_{n+1})$ maka

$$p_n = G(z_n,\ z_{n+1},\ z_{n+1}) = G\left(z_n,\ T(z_n),\ T(z_n)\right)$$
$$= G\left(T(z_{n-1}),\ T(z_n),\ T(z_n)\right)$$
$$\le \left(\frac{q_n + G\left(z_{n-1},\ T(z_n),\ z_n\right) + G\left(z_{n-1},\ z_n,\ T(z_n)\right)}{2p_{n-1} + p_n + p_n + 1}\right) p_{n-1}$$
$$\le \left(\frac{G(z_n,\ z_n,\ z_n) + s_n + s_n}{2p_{n-1} + 2p_n + 1}\right) p_{n-1}$$
$$\le \left(\frac{2s_n}{2p_{n-1} + 2p_n + 1}\right) p_{n-1}$$

berdasarkan Definisi 3.1 Bagian e

$$s_n = G(z_{n-1},\ z_n,\ z_{n+1}) \le G(z_{n-1},\ z_n,\ z_n) + G(z_n,\ z_n,\ z_{n+1})$$

karena ruang metrik-G simetris maka

$$s_n = G(z_{n-1},\ z_n,\ z_{n+1}) \le G(z_{n-1},\ z_n,\ z_n) + G(z_n,\ z_{n+1},\ z_{n+1}) \le p_{n-1} + p_n$$

sehingga

$$p_n \le \left(\frac{2(p_{n-1} + p_n)}{2p_{n-1} + 2p_n + 1}\right) p_{n-1}$$
$$\le \left(\frac{2p_{n-1} + 2p_n}{2p_{n-1} + 2p_n + 1}\right) p_{n-1}$$

Jika $\alpha_n = \left(\frac{2p_{n-1}+2p_n}{2p_{n-1}+2p_n+1}\right)$, maka

$$p_n \le \alpha_n p_{n-1}$$
$$\le \alpha_n \alpha_{n-1} p_{n-2}$$
$$\vdots$$
$$\le \alpha_n \alpha_{n-1} \cdots \alpha_1 p_0.$$

Perhatikan $\alpha_n = \left(\frac{2p_{n-1}+2p_n}{2p_{n-1}+2p_n+1}\right)$, karena $2p_{n-1} + 2p_n < 2p_{n-1} + 2p_n + 1$ maka $\alpha_n < 1$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Sehingga

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n \alpha_{n-1} \cdots \alpha_1 = 0$$

akibatnya

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 0.$$

Untuk setiap $n,\ m \in \mathbb{N}, m > n$ diperoleh

$$G(z_n,\ z_m,\ z_m) \le \sum_{i=0}^{m-n} G(z_{n+i},\ z_{n+1+i},\ z_{n+1+i})$$
$$\le \sum_{i=0}^{m-n} p_{n+i}$$
$$\le \sum_{i=0}^{m-n} [(\alpha_{n+i} \cdots \alpha_1) p_0]$$

karena $\lim_{n\to\infty} \alpha_n \alpha_{n-1} \cdots \alpha_1 = 0$ maka

$$\lim_{n,m\to\infty} G(z_n,\ z_m,\ z_m)$$
$$\le \lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=0}^{m-n} [(\alpha_{n+i} \cdots \alpha_1) p_0]$$
$$\le \sum_{i=0}^{m-n} 0$$
$$\le 0.$$

Jadi (z_n) merupakan barisan Cauchy. Karena $(X,\ G)$ merupakan ruang metrik-G lengkap dan (z_n) merupakan barisan Cauchy maka terdapat $\xi \in X$ sedemikian hingga (z_n) konvergen ke ξ. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa ξ merupakan titik tetap. Jika $q = G(\xi,\ T(\xi),\ T(\xi))$ dan $r_n = G(z_n,\ \xi,\ \xi)$ maka

$$G(z_n,\ T(\xi),\ T(\xi))$$
$$\le \left(\frac{r_n + r_{n-1} + r_{n-1}}{2G(z_{n-1},\ z_n,\ z_n) + q + q + 1}\right) r_{n-1}$$
$$\le \left(\frac{r_n + 2r_{n-1}}{2G(z_{n-1},\ z_n,\ z_n) + 2q + 1}\right) r_{n-1}$$

karena (z_n) konvergen ke ξ maka

$$\lim_{n\to\infty} G(z_n,\ T(\xi),\ T(\xi)) = G(\xi,\ T(\xi),\ T(\xi)) = q$$
$$\le \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{r_n + 2r_{n-1}}{2G(z_{n-1},\ z_n,\ z_n) + 2q + 1}\right) r_{n-1}\right)$$
$$\le \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{G(z_n,\ \xi,\ \xi) + 2G(z_{n-1},\ \xi,\ \xi)}{2G(z_{n-1},\ z_n,\ z_n) + 2q + 1}\right) G(z_n,\ \xi,\ \xi)\right)$$
$$\le \left(\frac{G(\xi,\ \xi,\ \ \xi) + 2G(\xi,\ T(\xi),\ \xi)}{2G(\xi,\ \xi,\ \ \xi) + 2G(\xi,\ T(\xi),\ T(\xi)) + 1}\right) G(\xi,\ \xi,\ \xi)$$
$$\le \left(\frac{0 + 2G(\xi,\ T(\xi),\ T(\xi))}{0 + 2G(\xi,\ T(\xi),\ T(\xi)) + 1}\right) 0$$
$$\le 0$$

karena $G(\xi,\ T(\xi),\ T(\xi)) = 0$ maka $\xi = T(\xi)$. Jadi ξ merupakan titik tetap.

2. Misalkan $T^n(z) = z_n$. Akan ditunjukkan bahwa $z_{n+1} = T(z_n)$

$$z_{n+1} = T^{m+1}(z)$$
$$= T(T^n(z))$$
$$= T(z_n)$$

Karena barisan $(T^n(z))$ memenuhi $z_{n+1} = T(z_n)$, maka berdasarkan Teorema 3.3 Bagian 1, $(T^n(z))$ konvergen ke titik tetap ξ.

3. Jika κ adalah titik tetap dengan $\kappa \ne \xi$. Maka

$$G(\xi,\ \kappa,\ \kappa) = G(T(\xi),\ T(\kappa),\ T(\kappa))$$
$$\le \left(\frac{G(\xi,\ \kappa,\ \kappa) + G(\xi,\ \kappa,\ \kappa) + G(\xi,\ \kappa,\ \kappa)}{2G(\xi,\ \xi,\ \xi) + G(\kappa,\ \kappa,\ \kappa) + G(\kappa,\ \kappa,\ \kappa) + 1}\right) G(\xi,\ \kappa,\ \kappa)$$
$$\le \left(\frac{3G(\xi,\ \kappa,\ \kappa)}{1}\right) G(\xi,\ \kappa,\ \kappa)$$
$$G(\xi,\ \kappa,\ \kappa) \le 3[G(\xi,\ \kappa,\ \kappa)]^2$$
$$1 \le 3G(\xi,\ \kappa,\ \kappa)$$
$$\frac{1}{3} \le 3G(\xi,\ \kappa,\ \kappa)$$

Teorema 3.4

Misalkan $X \subset \mathbb{R}$, $(X,\ G)$ adalah ruang metrik-G lengkap yang simetris, dan $T: X \to X$. Jika T memenuhi kondisi:

$$G(T(x),\ T(y),\ T(z))$$
$$\le \alpha\left[\left(\frac{\min\{G(b,\ T(b),\ T(b)), G(c,\ T(c),\ T(c))\}}{1 + G(a,\ b,\ c)}\right)\right.$$
$$\left.+ G(a, T(a), T(a))\left(\frac{\min\{G(b,\ T(b),\ T(b)), G(c,\ T(c),\ T(c))\}}{1 + G(a,\ b,\ c)}\right)\right]$$
$$+\ \beta G(a,\ b,\ c)$$

untuk setiap $a,\ b,\ c \in X$ dengan $\alpha + \beta < 1$, $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}^+$ maka T memiliki titik tetap di X.

Bukti:

Misalkan $z_0 \in X$, dibentuk suatu barisan (z_n) sedemikian hingga $z_{n+1} = T(z_n)$. jika $p_n = G(z_n,\ z_{n+1},\ z_{n+1})$ maka

$$p_n = G(z_n,\ z_{n+1},\ z_{n+1}) = G(z_n,\ T(z_n),\ T(z_n))$$
$$= G(T(z_{n-1}),\ T(z_n),\ T(z_n))$$
$$\le \alpha\left[\left(\frac{\min\{p_n, p_n\}}{1 + p_{n-1}}\right) + q_{n-1}\left(\frac{\min\{p_n, p_n\}}{1 + p_{n-1}}\right)\right] + \beta p_{n-1}$$
$$\le \alpha\left[\left(\frac{p_n}{1 + p_{n-1}}\right) + p_{n-1}\left(\frac{p_n}{1 + p_{n-1}}\right)\right] + \beta p_{n-1}$$
$$\le \alpha\left[\left(\frac{p_n}{1 + p_{n-1}}\right)(1\ +\ p_{n-1})\right]$$
$$+ \beta p_{n-1}$$
$$\le \alpha p_n + \beta p_{n-1}$$
$$\le \frac{\beta}{1-\alpha} p_{n-1}$$
$$\le \left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^2 p_{n-2}$$
$$\vdots$$
$$\le \left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^n p_0$$

karena $\alpha\ +\ \beta < 1$ maka $\frac{\beta}{1-\alpha} < 1$, sehingga

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^n = 0.$$

Untuk setiap $n,\ m \in \mathbb{N}, m > n$ diperoleh

$$G(z_n,\ z_m,\ z_m) \le \sum_{i=0}^{m-n} G(z_{n+i},\ z_{n+1+i},\ z_{n+1+i})$$

$$\leq \sum_{n\to\infty}^{m-n} p_{n+i}$$
$$\leq \sum_{n\to\infty}^{m-n} \left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^{n+i} p_0$$

karena $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^n = 0$ maka

$$\lim_{n\to\infty} G(z_n,\ z_m,\ z_m) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{m-n} \left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^{n+i} p_0$$
$$\leq \sum_{i=0}^{m-n} 0$$
$$\leq 0.$$

Jadi (z_n) merupakan barisan Cauchy. Karena $(X,\ G)$ merupakan ruang metrik-G lengkap dan (z_n) merupakan barisan Cauchy maka terdapat $\xi \in X$ sedemikian hingga (z_n) konvergen ke ξ. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa ξ merupakan titik tetap. Jika $q = G(\xi,\ T(\xi),\ T(\xi))$ maka

$$G(z_n,\ T(\xi),\ T(\xi))$$
$$\leq \alpha\left[\left(\frac{\min\{q,q\}}{1+G(z_{n-1},\ \xi,\ \xi)}\right) + G(z_{n-1},\ T(z_{n-1}),\ T(z_{n-1}))\left(\frac{\min\{q,q\}}{1+G(z_{n-1},\ \xi,\ \xi)}\right)\right] + \beta G(z_{n-1},\ \xi,\ \xi)$$
$$\leq \alpha\left[\left(\frac{q}{1+G(z_{n-1},\ \xi,\ \xi)}\right) + G(z_{n-1},\ z_n,\ z_n)\left(\frac{q}{1+G(z_{n-1},\ \xi,\ \xi)}\right)\right] + \beta G(z_{n-1},\ \xi,\ \xi)$$
$$\leq \alpha\left[\left(\frac{q}{1+G(z_{n-1},\ \xi,\ \xi)}\right)(1+G(z_{n-1},\ z_n,\ z_n))\right] + \beta G(z_{n-1},\ \xi,\ \xi)$$
$$\leq \alpha\left[\left(\frac{q(1+G(z_{n-1},\ z_n,\ z_n))}{1+G(z_{n-1},\ \xi,\ \xi)}\right)\right] + \beta G(z_{n-1},\ \xi,\ \xi)$$

karena (z_n) konvergen ke ξ maka

$$\lim_{n\to\infty} G(z_n,\ T(\xi),\ T(\xi)) = G(\xi,\ T(\xi),\ T(\xi)) = q$$
$$\leq \lim_{n\to\infty}\left(\alpha\left(\frac{q[1+G(z_{n-1},\ z_n,\ z_n)]}{1+G(z_{n-1},\ \xi,\ \xi)}\right) + \beta G(z_{n-1},\ \xi,\ \xi)\right)$$
$$\leq \alpha\left(\frac{q[1+G(\xi,\ \xi,\ \xi)]}{1+G(\xi,\ \xi,\ \xi)}\right) + \beta G(\xi,\ \xi,\ \xi)$$
$$\leq \alpha q$$
$$\leq \alpha G(\xi,\ T(\xi),\ T(\xi))$$

karena $\alpha < 1$ maka $\xi = T(\xi)$. Jadi ξ merupakan titik tetap pada T.

Teorema 3.5

Misalkan $X \subset \mathbb{R}$, $(X,\ G)$ adalah ruang metrik-G lengkap yang simetris, dan $T: X \to X$. Jika T memenuhi kondisi:

$$G(T(a),\ T(b),\ T(c))$$
$$\leq \alpha_1\left(\frac{G(b,\ T(b),\ T(b))[1+G(a,\ T(a),\ T(a))]}{1+G(a,\ b,\ c)}\right) + \alpha_2\left(\frac{G(c,\ T(c),\ T(c))[1+G(a,\ T(a),\ T(a))]}{1+G(a,\ b,\ c)}\right) + \alpha_3 G(a,\ b,\ c)$$

untuk setiap $a,\ b,\ c \in X$ dengan $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$ sedemikian hingga untuk sebarang $0 < \lambda_1 < 1$,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \leq \lambda_1$$

maka T memiliki titik tetap di X.

Bukti:

Misalkan $z_0 \in X$, dibentuk suatu barisan (z_n) sedemikian hingga $z_{n+1} = T(z_n)$. jika $p_n = G(z_n,\ z_{n+1},\ z_{n+1})$ maka

$$p_n = G(z_n,\ z_{n+1},\ z_{n+1}) = G(z_n,\ T(z_n),\ T(z_n))$$
$$= G(T(z_{n-1}),\ T(z_n),\ T(z_n))$$
$$\leq \alpha_1\left(\frac{p_n[1+p_{n-1}]}{1+p_{n-1}}\right) + \alpha_2\left(\frac{p_n[1+p_{n-1}]}{1+p_{n-1}}\right) + \alpha_3 p_{n-1}$$
$$\leq \alpha_1 p_n + \alpha_2 p_n + \alpha_3 p_{n-1}$$
$$\leq (\alpha_1 + \alpha_2)p_n + \alpha_3 p_{n-1}$$
$$\leq \frac{\alpha_3}{1-(\alpha_1+\alpha_2)} p_{n-1}$$
$$\leq \left(\frac{\alpha_3}{1-(\alpha_1+\alpha_2)}\right)^n p_0$$

karena $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < 1$ maka $\frac{\alpha_3}{1-(\alpha_1+\alpha_2)} < 1$ sehingga

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha_3}{1-(\alpha_1+\alpha_2)}\right)^n = 0.$$

Untuk setiap $n,\ m \in \mathbb{N}$, $m > n$ diperoleh

$$G(z_n,\ z_m,\ z_m) \leq \sum_{i=0}^{m-n} G(z_{n+i},\ z_{n+1+i},\ z_{n+1+i})$$
$$\leq \sum_{i=0}^{m-n} p_{n+i}$$
$$\leq \sum_{i=0}^{m-n}\left(\frac{\alpha_3}{1-(\alpha_1+\alpha_2)}\right)^{n+i} p_0$$

karena $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha_3}{1-(\alpha_1+\alpha_2}\right)^n = 0$ maka

$$\lim_{n,m\to\infty} G(z_n,\ z_m,\ z_m)$$
$$\leq \lim_{n,m\to\infty}\sum_{i=0}^{m-n}\left(\frac{\alpha_3}{1-(\alpha_1+\alpha_2)}\right)^{n+i} p_0$$
$$\leq \sum_{i=0}^{m-n} 0$$
$$\leq 0.$$

Jadi (z_n) merupakan barisan Cauchy. Karena $(X,\ G)$ merupakan ruang metrik-G lengkap dan (z_n) merupakan barisan Cauchy maka terdapat $\xi \in X$ sedemikian hingga (z_n) konvergen ke ξ. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa

ξ merupakan titik tetap. Jika $q = G(\xi,\ T(\xi),\ T(\xi))$ maka

$$G(z_n,\ T(\xi),\ T(\xi))$$
$$\leq \alpha_1 \left(\frac{q[1 + G(z_{n-1},\ T(z_{n-1}),\ T(z_{n-1}))]}{1 + G(z_{n-1},\ \xi,\ \xi)} \right)$$
$$+ \alpha_2 \left(\frac{q[1 + G(z_{n-1},\ T(z_{n-1}),\ T(z_{n-1}))]}{1 + G(z_{n-1},\ \xi,\ \xi)} \right)$$
$$+ \alpha_3 G(z_{n-1},\ \xi,\ \xi)$$
$$\leq \alpha_1 \left(\frac{q[1 + G(z_{n-1},\ z_n,\ z_n)]}{1 + G(z_{n-1},\ \xi,\ \xi)} \right)$$
$$+ \alpha_2 \left(\frac{q[1 + G(z_{n-1},\ z_n,\ z_n)]}{1 + G(z_{n-1},\ \xi,\ \xi)} \right) + \alpha_3 G(z_{n-1},\ \xi,\ \xi)$$
$$\leq (\alpha_1 + \alpha_2) \left(\frac{q[1 + G(z_{n-1},\ z_n,\ z_n)]}{1 + G(z_{n-1},\ \xi,\ \xi)} \right)$$
$$+ \alpha_3 G(z_n,\ \xi,\ \xi)$$

Karena (z_n) konvergen ke ξ maka

$$\lim_{n\to\infty} G(z_n,\ T(\xi),\ T(\xi)) = G(\xi,\ T(\xi),\ T(\xi)) = q$$
$$\leq \lim_{n\to\infty} \left((\alpha_1 + \alpha_2) \left(\frac{q[1 + G(z_{n-1},\ z_n,\ z_n)]}{1 + G(z_{n-1},\ \xi,\ \xi)} \right) + \alpha_3 G(z_{n-1},\ \xi,\ \xi) \right)$$
$$\leq (\alpha_1 + \alpha_2) \left(\frac{q[1 + G(\xi,\ \xi,\ \xi)]}{1 + G(\xi,\ \xi,\ \xi)} \right) + \alpha_3 G(\xi,\ \xi,\ \xi)$$
$$\leq (\alpha_1 + \alpha_2) q$$
$$\leq (\alpha_1 + \alpha_2) G(\xi,\ T(\xi),\ T(\xi))$$

Karena $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$ maka $\xi = T(\xi)$. Jadi ξ merupakan titik tetap pada T.

PENUTUP

A. Simpulan

Misalkan $(X,\ G)$ adalah ruang metrik-G dan $T: X \to X$. Jika untuk setiap $a,\ b,\ c \in X$, T memenuhi kondisi:

$$G(T(a),\ T(b),\ T(c))$$
$$\leq G(a,\ b,\ c)$$
$$\times \left(\frac{G(T(a), b,\ c) + G(a,\ T(b),\ c) + G(a,\ b,\ T(c))}{2G(a, T(a), T(a)) + G(b, T(b), T(b)) + G(c, T(c), T(c)) + 1} \right)$$

atau

$$G(T(x),\ T(y),\ T(z))$$
$$\leq \alpha \left[\left(\frac{\min\{G(b,\ T(b),\ T(b)), G(c,\ T(c),\ T(c))\}}{1 + G(a,\ b,\ c)} \right) + G(a, T(a), T(a)) \left(\frac{\min\{G(b, T(b), T(b)), G(c, T(c), T(c))\}}{1 + G(a,\ b,\ c)} \right) \right]$$
$$+ \beta G(a,\ b,\ c)$$

Dengan $\alpha + \beta < 1$, $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}^+$

atau

$$G(T(a),\ T(b),\ T(c))$$
$$\leq \alpha_1 \left(\frac{G(b,\ T(b),\ T(b))[1 + G(a,\ T(a),\ T(a))]}{1 + G(a,\ b,\ c)} \right)$$
$$+ \alpha_2 \left(\frac{G(c,\ T(c),\ T(c))[1 + G(a,\ T(a),\ T(a))]}{1 + G(a,\ b,\ c)} \right)$$
$$+ \alpha_3 G(a,\ b,\ c)$$

dengan $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < \lambda_1$, $0 < \lambda_1 < 1$, maka T memiliki titik tetap.

B. Saran

Pada skripsi ini, hanya dibahas eksistensi titik tetap pada ruang metrik-G lengkap. Oleh karena itu, dapat dilakukan penelitian lebih lanjut mengenai ketunggalan titik tetap pada ruang metrik-G lengkap.

DAFTAR PUSTAKA

Abbas, M., Sintunavarat W., and Kumam, P. 2012. *Coupled Fixed Point of Generalized contractive mappings on partially ordered G -metric spaces.* Thailand: Department of Mathematics, King Mongkut's University of Technology Thonburi.

Bartle, G. Robert. 2010. *Introduction to real analysis*. United States: John Wiley and sons, inc.

Gaba, U. Yae. 2017. *Fixed Point Theorems in G-Metriks Space.* South Africa: Department of Mathematics and Applied Mathematics, University of Cape Town.

Kreyszig, Erwin. 1987. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Toronto. Prentice Hall.

Manuharawati. 2013. *Analisis Real I*. Surabaya: Zifatama Publisher.

Manuharawati dan Rahajeng, Budi. 2013. *Analisis Real I*. Surabaya: Departemen Pendidikan Nasional.

Mustafa, Zaed. et al. 2008. Some *Fixed Point Theorem for Mappings on Complete G-Metric Spaces.* Jordan: Department of Mathematics, The Hashemite University.

Mustafa, Zaed. et al. 2010. *Fixed Point Theorem for Expansive Mappings in G-Metric Spaces.* Jordan: Department of Mathematics, The Hashemite University.