MATH*unesa*

Jurnal Ilmiah Matematika *Volume 6 No.3 Tahun 2018*

ISSN 2301-9115

IDEAL KOMUTATIF DALAM BE-ALJABAR

Eny Indriani

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya

e-mail : enyindriani@mhs.unesa.ac.id

Agung Lukito

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya

e-mail **:** agunglukito@unesa.ac.id

Abstrak

Tripel $(X,*,1)$ dengan himpunan tak kosong X, operasi biner $'*'$ dan elemen khusus $'1'$ disebut BE-aljabar jika memenuhi $x*x=1$, $x*1=1$, $1*x=x$, dan $x*(y*z)=y*(x*z)$, untuk semua $x,y,z \in X$. Subhimpunan I dari X disebut ideal komutatif pada X jika memenuhi $1 \in I$, $x*(y*z) \in I$, dan $x \in I$ mengakibatkan $\big((z*y)*y\big)*z \in I$, untuk semua $x,y,z \in X$. Pada tulisan ini diturunkan sifat-sifat ideal komutatif dalam BE-aljabar.

Kata Kunci: BE-aljabar, BE-aljabar Komutatif, Ideal Komutatif.

Abstract

Triple $(X,*,1)$ with nonempty set X, binary operation $'*'$ and special element $'1'$ is called a BE-algebra if satisfies $x*x=1$, $x*1=1$, $1*x=x$, and $x*(y*z)=y*(x*z)$ for all $x,y,z \in X$. A subset I of X is called a commutative ideal of X if satisfies $1 \in I$, $x*(y*z) \in I$, and $x \in I$ implies $\big((z*y)*y\big)*z \in I$ for , all $x,y,z \in X$. In this paper we derived some properties of commutative ideal in BE-algebra.

Keywords: BE-algebra, Commutative BE-algebra, Commutative Ideal.

PENDAHULUAN

Pada tahun 2006, H.S Kim dan Y. H. Kim memperkenalkan tentang konsep BE-aljabar. Tripel $(X,*,1)$ dengan himpunan tak kosong X, operasi biner $'*'$ dan elemen khusus $'1'$ disebut BE-aljabar jika memenuhi aksioma $x*x=1$, $x*1=1$, $1*x=x$, dan $x*(y*z)=y*(x*z)$, untuk semua $x,y,z \in X$ dan juga dipelajari sifat-sifatnya.

S. S. Ahn dan K. S. So mendefinisikan pengertian ideal dalam BE-aljabar, dan membahas beberapa karakteristik ideal tersebut. Sedangkan A. Wilendziak memperkenalkan BE-aljabar komutatif, yaitu BE-aljabar X yang memenuhi $(x*y)*y=(y*x)*x$ untuk semua $x,y \in X$ (Akbar Rezaei dan A. B. Saeid, 2012: 486).

Pada tahun 2012, Akbar Rezaei dan Arsham. B. S. memperkenalkan tentang ideal komutatif dalam BE-aljabar. Subhimpunan I dari X disebut ideal komutatif pada X jika memenuhi $1 \in I$, $x*(y*z) \in I$, dan $x \in I$ mengakibatkan $\big((z*y)*y\big)*z \in I$, untuk semua $x,y,z \in X$.

Dengan demikian, pada tulisan ini akan membahas sifat-sifat ideal komutatif dalam BE-aljabar. Selain itu juga membahas dual BCK-aljabar komutatif yang merupakan bentuk dari ideal komutatif BE-aljabar.

KAJIAN TEORI

Berikut ini diberikan beberapa definisi konsep yang digunakan untuk menunjang memahami pembahasan.

Operasi Biner

Definisi 2.1

Diketahui A adalah sebuah himpunan tak kosong. Operasi biner pada A adalah fungsi $A \times A \rightarrow A$.

(Joseph A. Gallian, 2010 : 40)

Definisi 2.2

Aljabar $(X,*,1)$ bertipe (2,0) adalah himpunan tak kosong X dengan operasi biner $*$ dan elemen khusus 1. Bilangan 2 dalam tipe (2,0) menyatakan operasi biner dan 0 menyatakan operasi nol-ner.

(Mikhalev dan Gunter, 2002 : 451)

Aljabar
Definisi 2.3
Misalkan X himpunan tak kosong dan " $*$ " operasi biner pada X. Pasangan terurut $(X,*)$ disebut aljabar.

(Joseph Gallian, 2012 : 30)

Subaljabar
Definisi 2.4
Misalkan A subhimpunan pada $(X,*,1)$. A dikatakan subaljabar jika $x * y \in A$ untuk semua $x, y \in A$.

(Jung Mi Ko dan Sun Shin Ahn, 2015:128)

Ideal
Definisi 2.5
Suatu subhimpunan tak kosong I pada X disebut ideal pada X, jika untuk $x \in X$ dan $a, b \in I$ berlaku:

(i) $x * a \in I$ atau $X * I = \{a * b | a \epsilon X, b \epsilon I\} \subseteq I$
(ii) $\big(a * (b * x)\big) * x \in I$

(Akbar Rezaei dan A. B. Saeid, 2012: 485)

PEMBAHASAN
Berikut ini akan dibahas lebih lanjut mengenai definisi dan sifat-sifat ideal komutatif dalam BE-aljabar.

Definisi 3.1
Aljabar $(X,*,1)$ bertipe (2,0) disebut BE-aljabar jika untuk semua x, y, z $\in X$ berlaku:
(BE1) $x * x = 1$
(BE2) $x * 1 = 1$
(BE3) $1 * x = x$
(BE4) $x * (y * z) = y * (x * z)$.

(Akbar Rezaei dan A. B. Saeid, 2012:484)

Definisi 3.2
Aljabar $(X,*,1)$ bertipe (2,0) disebut BCK-aljabar dual jika, untuk semua $x, y, z \in X$ berlaku:
(BE1) $x * x = 1$
(BE2) $x * 1 = 1$
(dBCK1) Jika $x * y = y * x = 1$ maka $x = y$
(dBCK2) $x * \big((x * y) * y\big) = 1$
(dBCK3) $(x * y) * ((y * z) * (x * z)) = 1$

(Akbar Rezaei dan A. B. Saeid, 2012:484)

Definisi 3.3
Misalkan $(X,*,1)$ BCK-aljabar dual. Didefinisikan relasi biner " $\leq$ " pada X , dengan $x \leq y$ jika $x * y = 1$.

(Akbar Rezaei dan A. B. Saeid, 2012:484)

Lemma 3.1
Misalkan $(X,*,1)$ BCK-aljabar dual. Maka untuk semua $x, y, z \in X$, berlaku :
(i) $x \leq x$
(ii) $x \leq 1$
(iii) Jika $x \leq y$ dan $y \leq x$ maka $x = y$
(iv) $x \leq (x * y) * y$
(v) $x * y \leq (y * z) * (x * z)$

(Akbar Rezaei dan A. B. Saeid, 2012:484)

Bukti:
(i) $x * x = 1$ (BE1)
$x \leq x$ (Definisi 3.3)
Jadi, $x \leq x$.
(ii) $x * 1 = 1$ (BE2)
$x \leq 1$ (Definisi 3.3)
Jadi, $x \leq 1$.
(iii) Jika $x * y = y * x = 1$, maka $x = y$ (dBCK1)
Misalkan:
a. $x * y = 1$ (dBCK1)
$x \leq y$ (Definisi 3.3)
b. $y * x = 1$ (dBCK1)
$x \leq y$ (Definisi 3.3)
Dari a dan b diperoleh $x \leq y$ dan $y \leq x$ mengakibatkan $x = y$.
(iv) $x * \big((x * y) * y\big) = 1$ (dBCK2)
$x \leq \big((x * y) * y\big)$ (Definisi 3.3)
Jadi, $x \leq \big((x * y) * y\big)$
(v) $(x * y) * \big((y * z) * (x * z)\big) = 1$ (dBCK3)
$(x * y) \leq \big((y * z) * (x * z)\big)$ (Definisi 3.3)
Jadi, $(x * y) \leq (y * z) * (x * z)$ ∎

Teorema 3.1
Misalkan $(X,*,1)$ BCK-aljabar dual dengan $x, y, z \in X$. Maka dua penyataan berikut benar:
(a). Jika $x \leq y$ maka $y * z \leq x * z$.
(b). Jika $x \leq y$ dan $y \leq z$, maka $x \leq z$.

(Akbar Rezaei dan A. B. Saeid, 2012:484)

Bukti :
(a). Diketahui $x \leq y$
$x * y = 1$ (Definisi 3.3)
Setiap BCK-aljabar dual memenuhi
$x * y \quad \leq (y * z) * (x * z)$
$(x * y) * \big((y * z) * (x * z)\big) \quad = 1$ (Definisi 3.3)
$1 * ((y * z) * (x * z)) \quad = 1$ (Diketahui)
$(y * z) * (x * z) \quad = 1$ (BE3)
$(y * z) \leq (x * z)$ (Definisi 3.3)
Jadi $(y * z) \leq (x * z)$. ∎
(b). Diketahui $x \leq y$ dan $y \leq z$

$x * y = 1$ (Definisi 3.3)

dan $y * z = 1$ (Definisi 3.3)

Setiap BCK-aljabar dual memenuhi

$x * y \leq (y * z) * (x * z)$

$(x * y) * ((y * z) * (x * z)) = 1$ (Definisi 3.3)

$1 * (1 * (x * z)) = 1$ (Diketahui)

$1 * (x * z) = 1$ (BE3)

$(x * z) = 1$ (BE3)

$x \leq z$ (Definisi 3.3)

Jadi $x \leq z$. ■

Lemma 3.2

Misalkan $(X,*,1)$ BCK-aljabar dual dan $x, y, z \in X$. Maka berlaku:

(a). $x * (y * z) = y * (x * z)$

(b). $1 * x = x$

(Akbar Rezaei dan A. B. Saeid, 2012: 484)

Bukti:

(a). Karena $(X,*,1)$ BCK-aljabar dual, maka berlaku $y \leq (y * z) * z$.

$\big((y * z) * z\big) * (x * z) \leq y * (x * z)$ dari Teorema 3.1 (a) dan$x * (y * z) \leq \big((y * z) * z\big) * (x * z)$ dari Lemma 3.1 (v). Sehingga diperoleh,$x * (y * z) \leq \big((y * z) * z\big) * (x * z) \leq y * (x * z)$.

Jadi, $x * (y * z) \leq y * (x * z)$.

Karena $(X,*,1)$ BCK-aljabar dual, maka berlaku $x \leq (x * z) * z$.

$y * (x * z) \leq \big((y * z) * z\big) * (x * z))$ dari (Teorema 3.1(a)) dan $\big((y * z) * z\big) * (x * z)) \leq x * (y * z)$ dari Lemma 3.1 (v). Sehingga diperoleh, $y * (x * z) \leq \big((y * z) * z\big) * (x * z)) \leq x * (y * z)$.

Jadi, $y * (x * z) \leq x * (y * z)$.

Karena $x * (y * z) \leq y * (x * z)$ dan $y * (x * z) \leq x * (y * z)$ diperoleh dari (i) dan (ii), maka berdasarkan Lemma 3.1 (iii) jadi $x * (y * z) = y * (x * z)$.■

(b). Karena $(X,*,1)$ BCK-aljabar dual, maka berlaku $1 \leq (1 * x) * x$.

$1 * ((1 * x) * x) = 1$ (Definisi 3.3)

$(1 * x) * x = 1$ (BE3)

$1 * x \leq x$ (Definisi 3.3)

Sebaliknya, $x * (1 * x) = 1 * (x * x)$ (BE4)

$= 1 * 1$ (BE1)

$= 1$ (BE1)

sehingga $x \leq 1 * x$ berdasarkan Definisi 3.3.

Karena $1 * x \leq x$ dan $x \leq 1 * x$, maka berdasarkan Lemma 3.1 (iii) jadi $1 * x = x$. ■

Proposisi 3.1

Setiap BCK-aljabar dual merupakan BE-aljabar.

(Akbar Rezaei dan A. B. Saeid, 2012: 484)

Bukti:

a). Aksioma (BE1) dan (BE2) jelaslah dipenuhi.

b). (i). Karena $(X,*,1)$ BCK-aljabar dual, maka berlaku $y \leq (y * z) * z$. Dari Teorema 3.1 (a) $(y * z) * z) * (x * z) \leq y * (x * z)$ dan $x * (y * z) \leq \big((y * z) * z\big) * (x * z)$ dari Lemma 3.1 (v) diperoleh,$x * (y * z) \leq \big((y * z) * z\big) * (x * z) \leq y * (x * z)$.

Jadi, $x * (y * z) \leq y * (x * z)$.

(ii). Karena $(X,*,1)$ BCK-aljabar dual, maka berlaku $x \leq (x * z) * z$. $\big((y * z) * z\big) * (y * z) \leq x * (y * z)$ dari Teorema 3.1 (a) dan $y * (x * z) \leq \big((x * z) * z\big) * (y * z)$dari Lemma 3.1 (v). Sehingga diperoleh, $y * (x * z) \leq \big((y * z) * z\big) * (x * z)) \leq x * (y * z)$.

Jadi, $y * (x * z) \leq y * (y * z)$.

Karena, $x * (y * z) \leq x * (y * z)$ dan $y * (x * z) \leq x * (y * z)$, dengan Lemma 3.1 (iii) diperoleh $x * (y * z) = y * (x * z)$. ■

c). Karena $(X,*,1)$ BCK-aljabar dual, maka berlaku $1 \leq (1 * x) * x$.

$1 * (1 * x) * x = 1$ (Definisi 3.3)

$(1 * x) * x = 1$ (BE3)

$1 * x \leq x$ (Definisi 3.3)

maka $(1 * x) * x = 1$.

Sebaliknya $x * (1 * x) \leq 1$ (Lemma 3.3 (ii))

$\big(x * (1 * x)\big) = 1 * (x * x)$ (BE4)

$= 1 * 1$ (BE1)

$= 1$ (BE1)

maka $x \leq 1 * x$ (Definisi 3.3)

sehingga $x \leq 1 * x$ dan $1 * x \leq x$ berdasarkan Definisi 3.3 dan Lemma 3.1(iii) terbukti bahwa $1 * x = x$. ■

Definisi 3.4

Suatu subhimpunan F pada X disebut *filter* jika memenuhi:

(i) $1 \in F$

(ii) Jika $x, x * y \in F$ maka $y \in F$

Sebarang *filter* F pada BE-aljabar X merupakan subaljabar, karena$1 \in F$ dan jika $x, y \in F$, maka $x * y \in F$.

(Akbar Rezaei dan A. B. Saeid, 2012: 485)

Definisi 3.5

Suatu BE-aljabar X dikatakan distributif-diri jika $x * (y * z) = (x * y) * (x * z)$ untuk semua $x, y, z \in X$.

(Akbar Rezaei dan A. B. Saeid, 2012: 485)

Proposisi 3.2

Misalkan X BE-aljabar distributif-diri. Maka untuk semua $x, y, z \in X$ peryataan berikut ini berlaku:

a). Jika $x \leq y$, maka $z * x \leq z * y$; dan $y * z \leq x * z$

b). $y * z \leq (x * y) * (x * z)$.

(Akbar Rezaei dan A. B. Saeid, 2012: 485-486)

Bukti:

a). Diketahui $x \leq y$

$x * y = 1$ (Definisi 3.3)

(i). $z * (x * y) = (z * x) * (z * y)$ (Definisi 3.5)

$z * 1 = (z * x) * (z * y)$ (Diketahui)

$1 = (z * x) * (z * y)$ (BE2)

Berdasarkan Definisi 3.3 diperoleh $(z * x) \leq (z * y)$. ■

(ii). $(y * z) * (x * z)$

$= 1 * \big((y * z) * (x * z)\big)$ (BE3)

$= (x * y) * \big((y * z) * (x * z)\big)$ (Definisi 3.3)

$= (y * z) * \big((x * y) * (x * z)\big)$ (*Interchange*)

$= (y * z) * \big(x * (y * z)\big)$ (Definisi 3.5)

$= x * (y * z) * (y * z)$ (BE4)

$= x * 1$ (BE1)

$= 1$ (BE2)

Jadi berdasarkan Definisi 3.3 diperoleh $y * z \leq x * z$. ■

b). $(y * z) * [(x * y) * (x * z)]$

$= (y * x) * [x * (y * z)]$ (Definisi 3.5)

$= x * [(y * z) * (y * z)]$ (BE4)

$= y * 1$ (BE1)

$= 1$ (BE2)

Jadi berdasarkan Definisi 3.3 diperoleh $y * z \leq (x * y) * (x * z)$. ■

Definisi 3.6

BE-Aljabar X dikatakan transitif jika untuk setiap x , y, z $\in X$ berlaku:

$$y * z \leq (x * y) * (x * z)$$

(Akbar Rezaei dan A. B. Saeid, 2012: 485)

Proposisi 3.3

Misalkan X BE-aljbar transitif. Maka untuk semua $x, y, z \in X$ pernyataan berikut ini berlaku:

(i) $y \leq z \Rightarrow x * y \leq x * z$.

(ii) $y \leq z \Rightarrow z * x \leq y * x$.

(iii) $1 \leq x \Rightarrow x = 1$.

(Akbar Rezaei dan A. B. Saeid, 2012: 486)

Bukti:

(i) Diketahui $x \leq y$

$x * y = 1$ (Definisi 3.3)

$(x * y) \leq (x * z)$

$(x * y) * (x * z) = 1$ (Definisi 3.3)

$1 * [(x * y) * (x * z)] = 1$ (Diketahui)

$(y * z) * [(y * z) * (x * z)] = 1$ (BE4)

$(x * y) * [1 * (x * z)] = 1$ (Diketahui)

$(x * y) * (x * z) = 1$ (BE3)

$(x * y) \leq (x * z)$ (Definisi3.3)

Jadi $x * y \leq x * z$. ■

(ii) Diketahui $y \leq z$

$y * z = 1$ (Definisi 3.3)

$(z * x) \leq (y * x)$

$(z * x) * (y * x) = 1$ (Definisi 3.3)

$1 * [(z * x) * (y * x)] = 1$ (BE3)

$(y * z) * [(z * x) * (y * x)] = 1$ (Diketahui)

$(z * x) * [(y * z) * (y * x)] = 1$ (BE4)

$(x * y) * [1 * (y * x)] = 1$ (Diketahui)

$(z * x) * (y * x) = 1$ (BE3)

$(x * y) \leq (x * z)$ (Definisi3.3)

Jadi $z * x \leq y * x$. ■

(iii) Diketahui $x \leq 1$

$x * 1 = 1$ (Definisi 3.3)

$x = 1$ (BE1)

Jadi $x = 1$. ■

Akibat 3.1

Setiap BE-aljabar distributif-diri adalah transitif.

(Akbar Rezaei dan A. B. Saeid, 2012: 496)

Bukti:

Misalkan X BE-aljabar distributif-diri akan dibuktikkan bahwa X BE-aljabar transitif. Jika X BE-aljabar distributif diri untuk setiap $x, y, z \in X$, maka:

$(x * y) * (x * z) = x * (y * z)$ (Definisi 3.5)

$(y * z) * (x * y) * (x * z) = (y * z) * [x * (y * z)]$ (Definisi 3.6)

$(y * z) * (x * y) * (x * z) = x * [(y * z) * (y * z)]$(BE4)

$(y * z) * (x * y) * (x * z) = x * 1$ (BE1)

$(y * z) * (x * y) * (x * z) = 1$ (BE2)

$(y * z) \leq (x * y) * (x * z)$ (Definisi 3.6)

Jadi BE-aljabar distributif-diri adalah transitif. ■

Definisi 3.7

X dan Y merupakan himpunan dalam BE-aljabar .Sebuah pemetaan $f : X \to Y$ pada BE-aljabar disebut homomorfisme jika $f(x * y) = f(x) * f(y)$ untuk semua $x, y \in X$.

(Akbar Rezaei dan A. B. Saeid, 2011: 486)

Definisi 3.8

Misalkan BE-aljabar X. X dikatakankomutatif jika memenuhi $(x * y) * y = (y * x) * x$ untuk semua $x, y \in X$.

(Akbar Rezaei dan A. B. Saeid, 2012: 486)

Proposisi 3.4

Misalkan BE-aljabar komutatif X. Untuk semua $x, y \in X$ berlaku jika $x * y = 1$ dan $y * x = 1$, maka $x = y$.

(Akbar Rezaei dan A. B. Saeid, 2012: 487)

Bukti :

Akan dibuktikkan bahwa $x * y = 1$ dan $y * x = 1$, maka $x = y$ untuk semua $x, y \in X$.

Diambil sebarang $x, y \in X$, maka:

$x = 1 * x$ (BE3)

$= (y * x) * x$ (Diketahui)

$= (x * y) * y$ (Definisi 3.8)

$= 1 * y$ (Diketahui)

$= y$ (BE3)

Jadi $x = y$. ■

Lemma 3.3

Jika $(X,*,1)$ merupakan BE-aljabar, maka $x * (y * x) = 1$ untuk semua $x, y \in X$.

(Akbar Rezaei dan A. B. Saeid, 2012: 487)

Bukti:

$x * (y * x) = y * (x * x)$ (BE4)

$= y * 1$ (BE1)

$= 1$ (BE2)

Jadi $x * (y * x) = 1$. ■

Teorema 3.2

Setiap BE-aljabar komutatif merupakan BCK-aljabar dual.

(Akbar Rezaei dan A. B. Saeid, 2012: 487)

Bukti:

Misalkan $x, y, z \in X$. Berdasarkan (BE4) dan Definisi 3.8 diperoleh:

$(y * z) * (x * z) = x * ((y * z) * z)$ (BE4)

$= x * ((z * y) * y)$ (Definisi 3.8)

$= (z * y) * (x * y)$ (BE4)

Oleh karena itu $(x * y) * ((y * z) * (x * z)) = (x * z) * ((z * y))(x * y)$.

Berdasarkan Lemma 3.3 menunjukkan $(x * y) * ((y * z) * (x * z) = 1$, sehingga memenuhi dBCK3.

Berdasarkan (BE4) dan (BE1) diperoleh $x * ((x * y) * y) = (x * y) * (x * y) = 1$, sehingga memenuhi dBCK2 karena X memenuhi dBCK1, dBCK2, dan dBCK3 maka X merupakan BCK-aljabar dual. ■

Akibat 3.2

X merupakan BE-aljabar komutatif jika dan hanya jika X merupakan BCK-aljabar dual komutatif.

(Akbar Rezaei dan A. B. Saeid, 2012: 487)

Bukti:

(⇒) Berdasarkan Proposisi 3.1 maka terbukti bahwa aljabar $(X,*,1)$ merupakan BE-aljabar komutatif jika BCK-aljabar dual komutatif.

(⇐) Berdasarkan Lemma 3.1 maka terbukti bahwa aljabar $(X,*,1)$ adalah BCK-aljabar dual komutatif jika BE-aljabar komutatif.

Jadi X merupakan BE-aljabar komutatif jika dan hanya jika X merupakan BCK-aljabar dual komutatif. ■

Definisi 3.9

Subhimpunan I dari X disebut ideal komutatif pada X jika untuk semua $x, y, z \in X$ berlaku:

1) $1 \in I$.
2) $x * (y * z) \in I$ dan $x \in I \Longrightarrow ((z * y) * y) * z \in I$.

(Akbar Rezaei dan A. B. Saeid, 2012: 491)

Proposisi 3.5

Setiap ideal komutatif pada X merupakan filter pada X.

(Akbar Rezaei dan A. B. Saeid, 2011: 492)

Bukti:

Misalkan $x, y \in X$.

Jika $x * y \in I$ dan $x \in I$, karena $x * (1 * y) \in I$ dari Definisi 3.9 (2).

Kita punya $((y * 1) * 1) * y \in I$ (Definisi 3.9 (2))

$((1 * 1) * y) \in I$ (BE2)

$(1 * y) \in I$ (BE1)

$y \in I$ (BE3)

Sehingga I merupakan filter pada X. ■

Proposisi 3.6

Ideal I pada BE-Aljabar adalah komutatif jika dan hanya jika $x * y \in I$ mengakibatkan $((y * x) * x) * y \in I$ untuk semua $x, y \in X$.

(Akbar Rezaei dan A. B. Saeid, 2012: 492)

Bukti:

(⟹) Untuk semua $x, y \in X$. Jika $x * y \in X$ maka menurut (BE3) $1 * (x * y) = x * y \in I$ dan berdasarkan Definisi 3.9 (1) $1 \in I$. Karena I merupakan komutatif maka memenuhi $((y * x) * x) * y \in I$.

(⟸) Berdasarkan Definisi 3.9 (1) $1 \in I$. Untuk semua $x, y, z \in X$ jika $x * (y * z) \in I$ dan $x \in I$ karena I ideal pada X. Maka $y * z \in I$, dari hipotesis mengakibatkan $((z * y) * y) * z \in I$. Sehingga I merupakan ideal komutatif pada X. ■

Proposisi 3.7

Ideal I pada X adalah komutatif jika dan hanya jika $x * y \in I$ mengakibatkan $((((x * y) * 1) * 1) * ((y * x) * x) * y) \in I$, untuk semua $x, y \in X$.

(Akbar Rezaei dan A. B. Saeid, 2012: 492)

Bukti:

Misalkan jika $x * y \in I \Longrightarrow \left(\left(\left((y * x) * 1\right) * 1\right) * ((y * x) * x) * y\right) \in I$

$\left(\left(\left((y * x) * 1\right) * 1\right) * \left((y * x) * x\right) * y\right) \in I \Longrightarrow ((y * x) * x) * y \in I$

Jadi $x * y \in I \Longrightarrow \left((y * x) * x\right) * y \in I$.

Berdasarkan Proposisi 3.6,

$x * y \in I \Longrightarrow \left((y * x) * x\right) * y \in I$ (Definisi 3.9)

$\Longrightarrow 1 * \left((y * x) * x\right) * y$ (BE2)

$\Longrightarrow (1 * 1) * \big((y * x) * x\big) * y$ (BE1)

$\Longrightarrow ((y * x) * 1) * 1) * \big((y * x) * x\big) * y$ (BE2)

Jadi $\Big(\big(((x * y) * 1) * 1\big) * ((y * x) * x) * y\Big) \in I$.

■

Proposisi 3.9

Misalkan Λ himpunan indeks. Jika $\{ I_\lambda \ : \ \lambda \in \mathbf{\Lambda} \}$ merupakan keluarga ideal komutatif pada X, maka $\cap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda = \{x | x \in I_\lambda$ untuk semua $\lambda \in \mathbf{\Lambda}\}$.

(Akbar Rezaei dan A. B. Saeid, 2012: 492)

Bukti:

$1 \in \cap_{\lambda \in \mathbf{\Lambda}} I_\lambda$. Misalkan $x * y \in \cap_{\lambda \in \mathbf{\Lambda}} I_\lambda$ maka $x * y \in I_\lambda$ untuk semua $\lambda \in \mathbf{\Lambda}$. Menurut Proposisi 3.6 $\big((y * x) * x\big) * y \in I_\lambda$, untuk semua $\lambda \in \mathbf{\Lambda}$ dan $\big((y * x) * x\big) * y \in \cap_{\lambda \in \mathbf{\Lambda}} I_\lambda$. Jadi $\cap_{\lambda \in \mathbf{\Lambda}} I_\lambda = \{x | x \in I_\lambda$ untuk semua $\lambda \in \mathbf{\Lambda}\}$. ■

Teorema 3.42

X dan Y merupakan himpunan dalam BE-aljabar. Misalkan $f : X \rightarrow Y$ homomorfisme pada BE-aljabar. Jika J merupakan ideal komutatif pada Y, maka $f^{-1}(J) = \{x \in X \,| f(x) \in J\}$ juga merupakan ideal komutatif pada X.

(Akbar Rezaei dan A. B. Saeid, 2012: 492)

Bukti:

Dengan jelas bahwa $1 \in f^{-1}(J)$ karena $f(1) = f(1 * 1) = f(1) * f(1) = 1 \in J$.

Misalkan $x, y \in X$ sedemikian sehingga $x * y \in f^{-1}(J)$.

Maka $f(x) * f(y) = f(x * y)$ (Definisi3.7)

$f(x * y) \in J$ $(x * y \in f^{-1}(J))$

Karena J merupakan ideal komutatif pada Y, menurut Proposisi 3.6 $\Big(\big(f(y) * f(x)\big) * f(x)\Big) * f(y)$.

$\Big(\big(f(y) * f(x)\big) * f(x)\Big) * f(y)$

$= f\big((y * x) * x\big) * f(y)$ (Definisi 3.7)

$= f((y * x) * f(x)) * f(y)$ (Definisi 3.7)

$= f\Big(\big((y * x) * x\big) * y\Big)$ (Definisi 3.7)

$= f\Big(\big((y * x) * x\big) * y\Big) \in J$ $(x * y \in f^{-1}(J))$

Maka dengan Proposisi 3.6 $\big((y * x) * x\big) * y \in f^{-1}(J)$ jadi $f^{-1}(J)$ merupakan ideal komutatif pada X. ■

Teorema 3.5

X adakah BCK-aljabar dual komutatif jika dan hanya jika $\{1\}$ ideal komutatif.

(Akbar Rezaei dan A. B. Saeid, 2012: 493)

Bukti:

$(\Longrightarrow)$ Jika $x * y \in \{1\}$, maka $x * y = 1$. Karena X merupakan komutatif, maka $y = (y * x) * x$, sehingga $\big((y * x) * x\big) * y = 1 \in \{1\}$. Jadi $\{1\}$ merupakan ideal komutatif.

$(\Longleftarrow)$ Jika $x * y = 1$, maka $x * y \in \{1\}$. Karena $\{1\}$ merupakan komutatif, menurut Proposisi 3.6 $\big((y * x) * x\big) * y \in \{1\}$ adalah $\big((y * x) * y\big) = 1$ dan $y * \big((y * x) * x\big) = 1$, jadi mendapatkan bahwa $y = (y * x) * x$. Sehingga X merupakan komutatif. ■

SIMPULAN DAN SARAN

A. Simpulan

Berdasarkan pembahasan yang sudah dijabarkan diatas dapat disimpulkan bahwa sifat-sifat ideal komutatif dalam BE-aljabar yang terkait adalah sebagai berikut:

1. Setiap ideal komutatif pada X merupakan *filter* pada X sehingga I merupakan *filter* pada X.
2. Ideal I pada BE-aljabar adalah komutatif jika dan hanya jika $x * y \in I$ mengakibatkan $\big((y * x) * x\big) * y \in I$ untuk semua $x, y \in X$.
3. Ideal I pada X adalah komutatif jika dan hanya jika $x * y \in I$ mengakibatkan $((((x * y) * 1) * 1) * ((y * x) * x) * y) \in I$, untuk semua $x, y \in X$.
4. Misalkan Λ himpunan indeks. Jika $\{ I_\lambda : \lambda \in \mathbf{\Lambda} \}$ merupakan keluarga ideal komutatif pada X, maka $\cap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda = \{x | x \in I_\lambda$ untuk semua $\lambda \in \mathbf{\Lambda}\}$ merupakan keluarga ideal komutatif pada X.
5. Misalkan X dan Y BE-aljabar dan $f : X \rightarrow Y$ homomorfisme pada BE-aljabar. Jika J merupakan ideal komutatif pada Y, maka $f^{-1}(J) = \{x \in X \,| f(x) \in J\}$ juga merupakan ideal komutatif pada X.
6. X adalah BCK-aljabar dual komutatif jika dan hanya jika $\{1\}$ ideal komutatif.

B. Saran

Pada tulisan ini hanya membahas sifat-sifat ideal komutatif dalam BE-aljabar. Penulis menyarankan bagi pembaca untuk mengkaji lebih dalam tentang ideal komutatif dalam BE-aljabar pada struktur aljabar yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Akbar R. & Arsham.B.S.,2011.*Commutative Ideals in BE-algebras*. World Applied Science Journal, 52(12); 483-494.

Ciloglu, Zekiye dan Ceven, Yilmaz. 2013. “Commutative and Bounded-BE-algebras”. *Hindawi Publishing Corporation*.Vol 2013: hal. 1-5.

Gallian, Joseph A. 2010. *Cotemporary Abstract Algebra*. Seventh Edition. Duluth: *University of Minnesota Duluth*.

Herstein, I.N. 1995. *Abstract Algebra.* Third Edition. USA: Prentice-HAll,Inc.

Juniati, Dwi. 2017. *Topologi*. Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Surabaya.

Ko, J. M & Sun Shin Ahn. 2015. *Structute of BF-algebras*. Depertement of Mathematics Education Dongguk University and Gangneung-Wonju National University. Seoul

Kim, Kyung Ho & Yon, Young Ho. 2007. *Dual BCK-Algebra and MV-algebra. Scientiae Mathematicae Japonicae*. Vol.66(2): hal:393-399.

Manuharawati, 2013. *Analisis Real 1*. Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Surabaya.

Masriyah, 2014. *Pengantar Dasar Matematika*. Revisi 2. Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Surabaya.

Mikhalev,Alexander & Pilz, Gunter.2002. *The Concise Handbook of Algebra. Dordrecht: Springer Science.*

S. S. Ahn & K. S, So, 2009. *On generalized upper sets in BE-algebras*, Bull. Korean Math. Soc., 46(2)(2009);281-287