MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika *Volume 6 No.3 Tahun 2018*
ISSN 2301-9115

BP-ALJABAR

Sutiyasih Jayati
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : sutiyasihjayati@mhs.unesa.ac.id

Raden Sulaiman
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : sulaimanraden@yahoo.com

Abstrak

Himpunan tak kosong X dengan operasi biner " $*$ " dan elemen khusus 0 disebut BP-aljabar jika memenuhi aksioma $x * x = 0$, $x * (x * y) = y$, dan $(x * z) * (y * z) = x * y$, untuk setiap $x, y, z \in X$. Pada penelitian ini diperoleh sifat-sifat dan struktur yang terkait pada BP-aljabar. Sebagai tambahan, juga dibahas BP-aljabar kuadratik dan akan ditunjukkan setiap BP-aljabar kuadratik adalah BCI-aljabar.
Kata kunci: *BP*-aljabar, 0-komutatif, *BP*-aljabar kuadratik.

Abstract

A non-empty set $\boldsymbol{X}$ with binary operation " $*$ " and 0 constant is called BP-algebra if satisfies $x * x = 0$, $x * (x * y) = y$, $(x * z) * (y * z) = x * y$, untuk setiap $x, y, z \in X$. In this research we investigated some properties and structure of BP-algebra. Moreover, we discuss a quadratic BP-algebra and show that every quadratic BP-algebra is a BCI-algebra.

Keyword: *BP*-algebra, 0-commutative, quadratic *BP*-algebra.

PENDAHULUAN

Aljabar abstrak adalah bidang matematika yang mempelajari struktur aljabar. Struktur aljabar merupakan himpunan yang tak kosong dengan satu atau lebih operasi dan memenuhi aksioma-aksioma yang terkait. Beberapa kajian dalam struktur aljabar yaitu grup, ring, ideal. Adapun struktur aljabar lainnya yaitu B-aljabar, BP-aljabar.

Pada tahun 1966 , Y. Imai dan K. Iseki memperkenalkan dua kelas dari aljabar abstrak, yaitu BCK-aljabar dan BCI-aljabar. BCK-aljabar merupakan subkelas dari BCI-aljabar. Selanjutnya pada tahun 2002, Joseph Neggers dan Hee Sik Kim memperkenalkan tentang B-aljabar yang memenuhi aksioma (i) $x * x = 0$, (ii) $x * 0 = x$, (iii) $(x * y) * z = x * (z * (0 * y))$ untuk setiap $x, y, z \in X$ dan dipelajari juga sifat-sifatnya.

Pada tahun 2013, Sun Shin Ahn dan Jeong Soon Han memperkenalkan tentang BP-aljabar. BP-aljabar adalah suatu himpunan tak kosong X dengan operasi biner $*$ dan elemen khusus 0 yang memenuhi aksioma: (i) $x * x = 0$, (ii) $x * (x * y) = y$, (iii) $(x * z) * (y * z) = x * y$ untuk setiap $x, y, z \in X$. BP-aljabar merupakan generalisasi dari B-aljabar.

H. K. Park dan H. S. Kim memperkenalkan tentang aljabar kuadratik. Suatu aljabar $(X,*)$ dikatakan aljabar kuadratik jika $x * y$ didefinisikan oleh $x * y = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$, dengan $A, B, C, D, E, F \in X$ untuk setiap $x, y \in X$. Selanjutnya, Sun Shin Ahn dan Jeong Sun Han menerapkan aljabar kuadratik pada BP-aljabar. Aljabar kuadratik $(X,*)$ dikatakan BP-aljabar kuadratik jika memenuhi aksioma-aksioma pada BP-aljabar.

Dengan demikian, pada skripsi ini akan dibahas sifat-sifat BP-aljabar serta akan dibahas perluasan dari BP-aljabar yaitu BP-aljabar kuadratik. Setiap BP-aljabar kuadratik adalah BCI-aljaar.

KAJIAN TEORI

Operasi Biner

Definisi 2.1 Misalkan G adalah himpunan tak kosong. Operasi biner $*$ di G adalah fungsi dari $G \times G \to G$.

(Joseph A. Gallian, 2010: 40)

BF-Aljabar

Definisi 2.2 Suatu himpunan tak kosong X dengan operasi biner $*$ dan elemen khusus 0 merupakan *BF*-aljabar jika memenuhi aksioma berikut: $x * x = 0$; $x * 0 = x$;, $0 * (x * y) = y * x$ untuk setiap $x, y, z \in X$.

(A. Walendziak, 2007: 120)

Grup

Definisi 2.3 Suatu grup adalah pasangan terurut $(G,*)$, dengan G adalah himpunan tak kosong dan operasi biner $*$ yang memenuhi aksioma-aksioma sebagai berikut:

(i) $a * (b * c) = (a * b) * c$, untuk semua $a, b, c \in G$ (sifat asosiatif).

(ii) Ada $e \in G$, yang disebut identitas dari G sedemikian hingga untuk setiap $a \in G$ berlaku $a * e = e * a = a$ (mempunyai identitas).

(iii) Setiap $a \in G, \exists\, a^{-1} \in G$ yang disebut invers dari a sedemikian hingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (mempunyai invers).

Suatu grup yang dibentuk oleh himpunan G dan operasi biner $*$ dinotasikan dengan $(G,*)$.

(Herstein, 1995 : 40)

Grup Abelian

Definisi 2.4 $(G,*)$ disebut grup abelian jika memenuhi $a * b = b * a$ untuk setiap $a, b \in G$.

(Herstein, 1995 : 40)

BH-Aljabar

Definisi 2.5 Suatu himpunan tak kosong X dengan operasi biner $*$ dan elemen khusus 0 merupakan *BH*-aljabar jika memenuhi aksioma berikut: $x * x = 0$; $x * 0 = x$; $x * y = 0$ dan $y * x = 0$ maka $x = y$ untuk setiap $x, y, z \in X$.

(Qun Zhang, Y. B. Jun dan E. H. Roh, 2001: 971)

B-Aljabar

Definisi 2.6 Suatu himpunan tak kosong X dengan operasi biner $*$ dan elemen khusus 0 merupakan *B*-aljabar jika memenuhi aksioma berikut: $x * x = 0$; $x * 0 = x$; $(x * y) * z = x * (z * (0 * y))$ untuk setiap $x, y, z \in X$.

(J. Neggers dan H. S. Kim, 2002: 22)

B-Aljabar 0-Komutatif

Definisi 2.7 *B*-Aljabar $(X,*,0)$ dikatakan 0-komutatif jika untuk setiap , $y \in X$, $x * (0 * y) = y * (0 * x)$.

(H. S. Kim dan H. G. Park, 2005: 32)

BCI-Aljabar

Definisi 2.8 Suatu himpunan tak kosong X dengan operasi biner $*$ dan elemen khusus 0 merupakan *BCI*-aljabar jika memenuhi aksioma: $\big((x * y)\big) * (x * z)) * (z * y) = 0$; $\big(x * (x * y)\big) * y = 0$; $x * x = 0$; Jika $x * 0 = 0$ maka $x = 0$; $x * y = 0$ dan $y * x = 0$, maka $x = y$, untuk setiap $x, y, z \in X$.

(Young Bae Jun, Jie Meng dan Xiao Long Xin, 2000: 427)

Field

Definisi 2.9 *Field* adalah suatu himpunan tak kosong X yang tertutup pada operasi penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\cdot)$ sehingga memenuhi aksioma-aksioma berikut:

i. Komutatif terhadap penjumlahan, yaitu $x + y = y + x$ untuk setiap $x, y \in X$,
ii. Asosiatif terhadap penjumlahan, yaitu $(x + y) + z = x + (y + z)$ untuk setiap $x, y, z \in X$,
iii. Ada $e \in X$, yang disebut identitas dari X sedemikian hingga untuk setiap $x \in X$ berlaku $x + e = e + x = x$,
iv. Setiap $x \in X$, ada $x^{-1} \in X$ yang disebut invers dari x sedemikian hingga $x + x^{-1} = e$,
v. Komutatif terhadap perkalian, yaitu $x \cdot y = y \cdot x$ untuk setiap $x, y \in X$,
vi. Asosiatif terhadap perkalian, yaitu $(xy) \cdot z = x \cdot (yz)$ untuk setiap $x, y, z \in X$,
vii. Ada $e \in X$, yang disebut identitas dari X sedemikian hingga untuk setiap $x \in X$ berlaku $e \cdot x = x \cdot e = x$,
viii. Setiap $x \in X, x \neq 0$, ada $x^{-1} \in X$, yang disebut invers dari x sedemikian hingga $x.x^{-1} = e$
ix. Distributif, yaitu $x(y + z) = xy + yz$untuk setiap $x, y, z \in X$.

(Adi Setiawan, 2014: 153)

Aljabar Kuadratik

Definisi 2.10 Misalkan X *field.* Aljabar $(X, *)$ dikatakan kuadratik jika $x * y$ didefinisikan oleh $x * y = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$ dengan $A, B, C, D, E, F \in X$, untuk setiap $x, y \in X$.

(S. S. Ahn dan J. S. Han, 2013:555)

Karakteristik Field

Definisi 2.11 Karakteristik dari *field* F adalah bilangan bulat positif terkecil n sedemikian hingga $nx = 0$, untuk semua x di F. Jika tidak ada bilangan bulat yang seperti itu, maka dikatakan bahwa F memiliki karakteristik 0.

(Joseph A. Gallian, 2013:258)

Pada pembahasan selanjutnya menggunakan *field* yang berkarakteristik 0.

Lemma 2.1
Misalkan X *field* dengan $A_1x^2 + B_1xy + C_1y^2 + D_1x + E_1y^2 + F_1 = A_2x^2 + B_2xy + C_2y^2 + D_2x + E_2y^2 + F_2$,dimana $A_1, A_2, B_1, B_2, \dots, F_1, F_2 \in X$ untuk setiap $x, y \in X$ maka $A_1 = A_2, B_1 = B_2 \dots F_1 = F_2$.
Bukti:
Misalkan

$$A_1x^2 + B_1xy + C_1y^2 + D_1x + E_1y^2 + F_1 = A_2x^2 + B_2xy + C_2y^2 + D_2x + E_2y^2 + F_2 \quad (1)$$

Akan dibuktikan

$A_1 = A_2$
$B_1 = B_2$
$C_1 = C_2$
$D_1 = D_2$
$E_1 = E_2$
$F_1 = F_2$

Misalkan $x = 0, y = 1$ maka

$$C_1 + E_1 = C_2 + E_2 \quad (2)$$

Misalkan $x = 1, y = 0$ maka

$$A_1 + D_1 = A_2 + D_2 \quad (3)$$

Misalkan $x = 1, y = 1$ maka

$$A_1 + B_1 + C_1 + D_1 + D_1 + E_1 = A_2 + B_2 + C_2 + D_2 + E_2 \quad (4)$$

Subtitusi persamaan (2) dan persamaan (3) ke persamaan (4), diperoleh

$$B_1 = B_2 \quad (5)$$

Sehingga persamaan (1) menjadi

$$A_1x^2 + C_1y^2 + D_1x + E_1y^2 + F_1 = A_2x^2 + C_2y^2 + D_2x + E_2y^2 + F_2 \quad (6)$$

Misalkan $x = -1, y = 0$ maka

$$A_1 - D_1 = A_2 - D_2 \quad (7)$$

Misalkan $x = 0, y = -1$ maka

$$C_1 - E_1 = C_2 - E_2 \quad (8)$$

Eliminasi D_1dan D_2 dari persamaan (3) dan persamaan (7), diperoleh

$A_1 + A_1 = A_2 + A_2$
$(1 + 1)\, A_1 = (1 + 1)A_2$
$2A_1 = 2A_2$

Karena X *field* berkarakteristik 0 maka diperoleh

$$A_1 = A_2 \quad (9)$$

Eliminasi C_1dan C_2 dari persamaan (2) dan persamaan (8), diperoleh

$C_1 + C_1 = C_2 + C_2$
$(1 + 1)\, C_1 = (1 + 1)C_2$
$2C_1 = 2C_2$

Karena X *field* berkarakteristik 0 maka diperoleh

$$C_1 = C_2 \quad (10)$$

Karena, $A_1 = A_2$ maka persamaan (3) menjadi

$$D_1 = D_2 \quad (11)$$

Karena, $C_1 = C_2$ maka persamaan (2) menjadi

$$E_1 = E_2 \quad (12)$$

Jadi, terbukti bahwa $A_1 = A_2, B_1 = B_2 \dots F_1 = F_2$.■

PEMBAHASAN

BP-Aljabar

Definisi 3.1 *BP*-aljabar adalah himpunan tak kosong X dengan elemen khusus 0 dan operasi biner $*$ yang memenuhi aksioma: $x * x = 0$; $x * (x * y) = y$; $(x * z) * (y * z) = x * y$, untuk setiap $x, y, z \in X$.
(S. S. Ahn dan J. S. Han, 2013: 552)

Misalkan $X = \{0, a, b, c\}$ dengan operasi $*$ yang didefinisikan sebagai berikut:

Tabel Cayley dengan operasi $*$

$*$	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

Maka $(X,*,0)$ adalah *BP*-aljabar

Teorema 3.1
Jika $(X,*,0)$ adalah *BP*-aljabar, maka untuk setiap $x, y \in X$, belaku:
i. $0 * (0 * x) = x$,
ii. $0 * (y * x) = (x * y)$,
iii. $x * 0 = x$,
iv. Jika $x * y = 0$ maka $y * x = 0$
v. Jika $0 * x = 0 * y$ maka $x = y$
vi. Jika $0 * x = y$ maka $0 * y = x$,
vii. Jika $0 * x = x$ maka $x * y = y * x$

(S. S. Ahn dan J. S. Han, 2013: 553)

Bukti:
i. Misal $x = 0$ dan $y = x$, berdasarkan definisi 3.1-(ii).
$x * (x * y) = y$ maka $0 * (0 * x) = x$ ■
ii. $x * y = (x * z) * (y * z)$
$x * y = (x * x) * (y * x)$
$= 0 * (y * x)$
Jadi, $x * y = 0 * (y * x)$ ■
iii. $x * (x * y) = y$ (Definisi 3.1-(ii))
$x * (x * x) = x$ (Misalkan $y = x$)
$x * 0 = x$ (Definisi 3.1-(i))
Jadi, $x * 0 = x$ ■
iv. Menggunakan Teorema 3.1-(ii) maka
$0 * (x * y) = y * x$ (Teorema 3.1-(ii))
$0 * 0 = y * x$ $(x * y = 0)$
$0 = y * x$ ■ (Definisis 3.1-(i))
v. $0 * x = 0 * y$,
$0 * (0 * x) = 0 * (0 * y)$ (Teorema 3.1-(iii))

$x = y$ ■ (Teorema 3.1-(i))

vi. $0 * x = y$

$0 * (0 * x) = 0 * y$ (Teorema 3.1-(iii))

$x = 0 * y$ ■ (Teorema 3.1-(i))

vii. $x * y = 0 * (x * y)$ (Teorema 3.1-(iii))

$= y * x$ (Teorema 3.1-(ii))

Jadi, $x * y = y * x$ ■

Teorema 3.2

Setiap *BP*-aljabar adalah *BF*-aljabar.

(S. S. Ahn dan J. S. Han, 2013: 553)

Bukti:

- Dari definisi 3.1-(i) $x * x = 0$ menunjukkan definisi 2.2-(i) terpenuhi.
- Setiap BP-aljabar memenuhi $x * 0 = 0$, untuk setiap $x \in X$ menunjukkan definisi 2.2-(ii) terpenuhi
- Setiap BP-aljabar memenuhi $0 * (y * x) = x * y$, untuk setiap $x, y \in X$ menunjukkan definisi 2.2-(iii) terpenuhi

Karena, ketiga aksioma pada definisi 2.2 terpenuhi maka terbukti bahwa setiap *BP*-aljabar adalah *BF*-aljabar. ■

Definisi 3.2

BP-aljabar $(X,*,0)$ dikatakan 0-komutatif jika $x * (0 * y) = y * (0 * x)$ untuk setiap $x, y \in X$.

(S. S. Ahn dan J. S. Han, 2013: 553)

Proposisi 3.1

Jika $(X,*,0)$ adalah *BP*-aljabar 0-komutatif, maka:

(i) $(x * z) * (y * z) = (z * y) * (z * x)$,

(ii) $x * y = (0 * y) * (0 * x)$.

(S. S. Ahn dan J. S. Han, 2013:553)

Bukti:

(i) $(x * z) * (y * z)$

$= (x * z) * (0 * (z * y))$ (Teorema 3.1-(ii))

$= (z * y) * (0 * (x * z)$ (0-komutatif)

$= (z * y) * (z * x)$ ■ (Teorema 3.1-(ii))

(ii) $(x * z) * (y * z) = (z * y) * (z * x)$

$(x * 0) * (y * 0) = (0 * y) * (0 * x)$

$x * y = (0 * y) * (0 * x)$ ■

Teorema 3.3

Misalkan $(X,\circ,0)$ grup abelian dengan elemen identitas 0. Jika didefinisikan $x * y = x \circ y^{-1}$, maka $(X,*,0)$ adalah *BP*-aljabar.

(S. S. Ahn dan J. S. Han, 2013: 554)

Bukti:

- $x * x = 0$

  $x \circ x^{-1} = 0$

  Definisi 3.1-(1) terpenuhi ■

- $x * (x * y)$

  $= x * (x \circ y^{-1})$ (Definisi $*$)

  $= x \circ (x \circ y^{-1})^{-1}$ (Definisi $*$)

  $= x \circ (y \circ x^{-1})$ (Sifat invers produk)

  $= x \circ (x^{-1} \circ y)$ (Sifat komutatif $\circ$)

  $= (x \circ x^{-1}) \circ y$ (Sifat Asosiatif $\circ$)

  $= 0 \circ y$ (0 identitas)

  $= y \circ 0$ (Sifat komutatif $\circ$)

  $= y$ (Teorema 3.1-(iii))

  Definisi 3.1-(ii) terpenuhi ■

- $(x * y) * (z * y)$

  $= (x \circ y^{-1}) * (z \circ y^{-1})$ (Definisi $*$)

  $= (x \circ y^{-1}) \circ (z \circ y^{-1})^{-1}$ (Definisi $*$)

  $= (x \circ y^{-1}) \circ (y \circ z^{-1})$ (Sifat invers produk $\circ$)

  $= x \circ (y^{-1} \circ y) \circ z^{-1}$ (Sifat asosiatif $\circ$)

  $= x \circ 0 \circ z^{-1}$ (0 identitas)

  $= x \circ z^{-1}$ (Definisi 3.1-(iii))

  $= x * z$ (Definisi $*$)

Karena definisi 3.1-(i), (ii), (iii) terpenuhi maka $(X,*,\circ)$ merupakan *BP*-aljabar. ■

Teorema 3.4

BP-aljabar $(X,*,0)$ 0-komutatif jika dan hanya jika $(0 * x) * (0 * y) = y * x$ untuk setiap $x, y \in X$.

(S. S. Ahn dan J. S. Han, 2013: 554)

Bukti:

Misalkan bahwa $(0 * x) * (0 * y) = y * x$ untuk setiap $x, y \in X$. Dari definisi 3.2 kita punya

$x * (0 * y) = 0 * ((0 * x) * (0 * y))$ (Teorema 3.1-(i))

$= 0 * ((0 * y) * (0 * x))$ (0- komutatif)

$= y * (0 * x)$ ((Teorema3.1-(i))

Kebalikannya mengikuti proposisi 3.1 ■

Proposisi 3.2

Jika *BP*-aljabar $(X,*,0)$ dengan $(x * y) * z = x * (z * y)$ untuk setiap $x, y, z \in X$, maka $0 * x = x$ untuk setiap $x \in X$. (Teorema 3.1-(ii))

(S. S. Ahn dan J. S. Han, 2013: 554)

Bukti:

$0 * x = x$ (Hipotesis)

$(0 * x) * 0 = x$ (Teorema 3.1-(iii))

$(0 * x) * 0 = 0 * (0 * x)$ ■ (Teorema 3.1-(i))

Teorema 3.5

Setiap *B*-aljabar 0-komutatif adalah *BP*-aljabar.

(S. S. Ahn dan J. S. Han, 2013: 554)

Bukti:

- Definisi 2.6-(i) $x * x = 0$ menunjukkan definisi 3.1-(i) terpenuhi.
- Setiap *B*-aljabar 0-komutatif memenuhi $x * (x * y) = y$, untuk setiap $x, y \in X$. Menunjukkan Definisi 3.1-(ii) terpenuhi.

- Setiap B-aljabar 0-komutatif memenuhi $(x * z) * (y * z) = x * y$, untuk setiap $x, y, z \in X$ menunjukkan definisi 3.1-(iii) terpenuhi.

Karena memenuhi ketiga aksioma dari Definisi 3.1 sehingga terbukti bahwa setiap B-aljabar 0-kommutatif adalah BP-aljabar.■

Teorema 3.6
Jika BP-aljabar $(X, *, 0)$ dengan $(x * y) * z = x * (z * y)$ untuk setiap $x, y, z \in X$, maka $(X, *, 0)$ adalah B-aljabar.

(S. S. Ahn dan J. S. Han, 2013: 554)

Bukti:
Dari Definisi 3.1-(i) $x * x = 0$ menunjukkan definsi 2.6-(i) terpenuhi dan Teorema 3.1-(iii) $x * 0 = x$ menunjukkan definisi 2.6-(ii) terpenuhi.

$(x * y) * z = x * (z * y)$ (Hipotesis)
$= x * ((z * 0) * y)$ (Teorema 3.1-(iii))
$= x * (z * (0 * y))$ (Sifat asosiatif)

Menunjukkan definisi 2.6-(iii) terpenuhi. Sehingga $(X, *, 0)$ merupakan B-aljabar. ■

Teorema 3.7
Setiap BP-aljabar adalah BH-aljabar.

(S. S. Ahn dan J. S. Han, 2013: 555)

Bukti:

- Dari definisi 3.1-(i) $x * x = 0$ menunjukkan definisi 2.5-(i) terpenuhi
- Setiap BP-aljabar memenuhi $x * 0 = x$, untuk setiap $x \in X$ menunjukkan definisi 2.5-(ii) terpenuhi.
- Dari Teorema 3.1-(iv) dan 3.1-(v) menunjukkan definisi 2.5-(iii) terpenuhi

Karena ketiga aksioma definisi 2.5 terpenuhi. Sehingga terbukti bahwa setiap BP-aljabar adalah BH-aljabar. ■

BP-Aljbar Kuadratik
Aljabar kuadratik $(X, *)$ dikatakan BP-aljabar kuadratik jika memenuhi definisi 3.1

(S. S. Ahn dan J. S. Han, 2013:555)

Pada pembahasan selanjutnya menggunakan aljabar $(X, *, e)$, aljabar X yang dibangun oleh operasi biner $*$ dan elemen khusus e. Dalam pembahasan ini 0 merupakan identitas pada *field* bukan elemen khusus pada aljabar X.

Teorema 3.8
Misalkan X *field* dengan $|X| \geq 3$, maka setiap BP-aljabar kuadratik $(X, *, e)$ memenuhi $x * y = x - y + e$, dengan e adalah identitas untuk setiap $x, y \in X$.

(S. S. Ahn dan J. S. Han, 2013: 555)

Bukti:
Didefinisikan $x * y = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$, dengan $A, B, C, D, E, F \in X$ dan $x, y \in X$.
Berdasarkan definisi 3.1-(i).

$$
\begin{aligned}
e &= x * x \\
&= Ax^2 + Bx(x) + Cx^2 + Dx + Ex + F \\
&= Ax^2 + Bx^2 + Cx^2 + (D + E)x + F \\
&= (A + B + C)x^2 + (D + E)x + F
\end{aligned}
$$

Berdasarkan Lemma 2.1 diperoleh

$F = e,$
$A + B + C = 0,$
$D + E = 0$
$D = -E$

Berdasarkan Teorema 3.1-(iii)

$$x * e = x = Ax^2 + Bxe + Ce^2 + Dx + Ee + e$$

Berdasarkan Lemma 2.1 diperoleh

$A = 0,$ (Teorema 3.1-(iii)) $Ce^2 + Ee + e = 0.$
$Be + D = 1$ $B + C = 0$
$D = 1 - Be,$ $C = -B,$
$D = -E$
$E = Be - 1,$

Sehingga didapatkan persamaan:

$$
\begin{aligned}
x * y &= Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + e \\
&= Bxy + (-B)y^2 + (1 - Be)x + (Be - 1)y + e \\
&= B(xy - y^2 - ex + ey) + (x - y + e) \\
&= B(x - y)(y - e) + (x - y + e)
\end{aligned}
$$

Dari Teorema 3.1-(ii), setiap BP-aljabar memenuhi kondisi $e * (x * y) = y * x$, untuk setiap $x, y \in X$.

$$
\begin{aligned}
e * (x * y) &= B(e - x * y)(x * y - e) + (e - x * y + e) \\
&= B[e - B(x - y)(y - e) - (x - y + e)][B(x - y)(y - e) + (x - y + e) - e] + [e - B(x - y)(y - e) - (x - y)] \\
&= B[-B(x - y)(y - e) - (x - y)][B(x - y)(y - e) + (x - y)] + [e - B(x - y)(y - e) - (x - y)] \\
&= -B[B(x - y)(y - e) + (x - y)]^2 - [B(x - y)(y - e) + (x - y)] + e \\
&= -B(x - y)^2[B(y - e) + 1]^2 - (x - y)[B(y - e) + 1 + \ e.
\end{aligned}
$$

karena,

$$
\begin{aligned}
y * x &= B(y - x)(x - e) + (y - x + e) \\
&= B(y - x)(x - e) + (y - x) + e,
\end{aligned}
$$

diperoleh,

$$-B(x - y)^2[B(y - e) + 1]^2 - (x - y)[B(y - e) + 1] + e = B(y - x)(x - e) + (y - x) + e.$$

Jika kita misalkan $x = e$ dalam identitas diatas, maka kita punya

$$-B(e-y)^2[B(y-e)+1]^2-(e-y)[B(y-e)+1]+e=(y-e)+e.$$

$B = 0,$ karena $C = 0,$ $E = -1,$ dan $D = 1,$ sehingga $x * y = x - y + e.$ ■

Teorema 3.9
Misalkan X *field* dengan $|X| \geq 3$, maka setiap *BP*-aljabar kuadratik pada X adalah *BCI*-aljabar.
(S. S. Ahn dan J. S. Han, 2013: 556)

Bukti:

- $((x*y)*(x*z))*(z*y)$
  $= ((x-y+e)*(x-z+e))*(z*y)$
  $= ((x-y+e-(x-z+e)+e)*(z*y)$
  $= ((-y+z+e)*(z-y+e)$
  $= (-y+z+e)-(z-y+e)+e$
  $= e$
  Definisi 2.9-(i) terpenuhi
- $\big(x*(x*y)\big)*y = \big(x*(x-y+e)\big)*y$
  $= (x-(x-y+e)+e)*y$
  $= y*y$
  $= y-y+e$
  $= e$
  Definisi 2.9-(ii) terpenuhi

- $x*x = x-x+e$
  $= e$

Definisi 2.9-(iii) terpenuhi

- Misalkan $x*e = e$,
  $x-e+e = e$
  $x = e$
  Definisi 2.9-(iv) terpenuhi
- $x*y = e$
  $x-y+e = e$
  $x-y = 0$
  $x = y$
- $y*x = e$
  $y-x+e = e$
  $y-x = 0$
  $y = x$
  Definisi 2.9-(v) terpenuhi.

Karena X memenuhi kelima aksioma pada definisi 2.9 maka setiap *BP*-aljabar kuadratik pada X adalah *BCI*-aljabar. ■

PENUTUP

SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang sudah dijabarkan pada skripsi yang berjudul *BP*-aljabar, bahwa sifat-sifat dan struktur yang terkait pada *BP*-aljabar adalah sebagai berikut:

1. Setiap *BP*-aljabar adalah *BF*-aljabar.
2. Setiap *B*-aljabar 0-komutatif adalah *BP*-aljabar.
3. Jika $(X,*,0)$ adalaha *BP*-aljabar dengan $(x*y)*z = x*(y*z)$ untuk setiap $x,y,z \in X$ maka $(X,*,0)$ adalah *B*-aljabar.
4. Setiap *BP*-aljabar adalah *BH*-aljabar.
5. Misalkan X *field* dengan $|X| \geq 3$, maka setiap *BP*-aljabar kuadratik $(X,*,e)$ memenuhi $x*y = x-y+e$.
6. Misalkan X *field* dengan $|X| \geq 3$, maka setiap *BP*-aljabar kuadratik pada X adalah *BCI*-aljabar.

SARAN

Pada skripsi ini penulis membahas tentang sifat-sifat dan struktur aljabar yang terkait pada *BP*-alajabar dan sebagai tambahan membahas *BP*-aljabar kuadratik serta menunjukkan menunjukkan bahwa setiap *BP*-aljabar kuadratik adalah *BCI*-aljabar. Penulis menyarankan pembaca untuk penelitian selanjutnya membahas yang belum dibahas pada skripsi ini.

DAFTAR PUSTAKA

Ahn, S. S. dan J. S. Han. 2013. *On BP-algebras*. Journal Mathematics and Statistics. Vol. 42(5): 551-557.

Bae Jun, Young, Jie Meng dan Xiao Long Xin. 2000. *On BCI-algebras With Condition (S).* Scientiae Mathematicae. Vol.3: 427.

Gallian, Joseph A. 2013. *Contemporary Abstract Algebra*. Eighth Edition. Duluth: University of Minnesota Duluth.

Herstein, I. N. 1995. *Abstract Algebra*. Third Edition. USA: Prentice-Hall, Inc.

Kim, H. S. dan N. R. Kye. 2005. *On 0-commutative B-algebras*. Scientiae Mathematicae Japonicae Online. Vol.62: 7-12

Neggers, J. dan H. S. Kim. 2002. *On B-algebras.* Math.Vesnik. Vol. 54: 21-29.

Park, Hee Kon dan H. S. Kim. 2001. *On quadratic B-algebras.* Quasigroups and Related Systems. Vol. 8:67-72.

Setiawan, Adi. 2014. *Dasar-Dasar Aljabar Modern: Teori Grup dan Teori Ring*. Salatiga: Tisara Grafika.

Walendziak, A. 2007. *On BF-algebras*. Mathematica Slovaca. Vol.57: 119-128.

Zhang, Qun, Y. B. Jun dan Eun Hwan Roh. 2001. *On the Branch of BH-algebras.* Scientiae Mathematicae Japonicae Online. Vol.4: 917-921.