BILANGAN KROMATIK LINIER DARI KOMPLEKS PERSEKITARAN GRAF SEDERHANA

Frisda Thertiyantus Vinarista[1], I Ketut Budayasa[2]
[1]Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, UNESA
Kampus Ketintang 60231, Surabaya
Email: Vina_rista@yahoo.co.id[1], ketutbudayasa@yahoo.com[2]

ABSTRAK

Pewarnaan k- linier dari komplek simplisial adalah pewarnaan $\alpha\colon X \to [k]$ dari Δ jika dan hanya jika $\alpha(x) = \alpha(y)$ untuk suatu $x,y \in X$ maka $\mathcal{F}_\Delta(x) \subseteq \mathcal{F}_\Delta(y)$ atau $\mathcal{F}_\Delta(y) \subseteq \mathcal{F}_\Delta(x)$ berlaku. Bilangan kromatik linier dari komplek simplisial adalah bilangan bulat positif k terakhir dari pewarnaan k-linier pada komplek simplisial. Pewarnaan k- linier dan bilangan kromatik linier dari komplek simplisial dapat dikembangkan pada komplek persekitaran graf. Graf sederhana adalah graf yang tidak mempunyai gelung dantidak mempunyai sisi rangkap

Kata kunci: komplek simplisial, graf sederhana, komplek persekitaran, pewarnaan linier, bilangan kromatik

1. PENDAHULUAN

Matematika merupakan bahasa proses, teori dan aplikasi ilmu yang memberikan bentuk dan kemaslahatan dalan kehidupan sehari-hari. Teori graf merupakan salah satu cabang matematika dan banyak manfaatnya karena teori-teorinya dapat diaplikasikan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Dengan mengkaji dan menganalisa model atau rumusan teori itu dapat diperlihatkan peranan dan kegunaannya dalam memecahkan permasalahan. Permasalahan yang dirumuskan dengan teori graf dibuat sederhana, yaitu diambil aspek-aspek yang diperlukan dan dibuang aspek-aspek lainnya

Terkait dengan uraian diatas, perwarnaan titik dari graf merupakan salah satu dari materi dalam teori graf. Pewarnaan titik dari graf *G* adalah sebuah pemetaan warna-warna ke titik-titik dari *G* sedemikian hingga dua titik yang terhubungkan langsung mendapatkan warna-warna yang berbeda. Dalam pewarnaan titik erat kaitannya dengan penentuan bilangan kromatik, yaitu masalah mencari mínimum banyak warna yang diperlukan untuk mewarnai semua titik pada graf sedemikian hingga dua titik yang berhubung langsung mendapatkan warna yang berbeda.

Disamping perwarnaan titik dari graf juga ada pewarnaan k-linier dari kompleks simplisial. Pewarnaan k-linier dari kompleks simplisial diperkenalkan oleh Civan dan Yalcin untuk mempelajari topologi kompleks simplisial. Pewarnaan k-linier ini berguna juga untuk memahami graf. Dalam pewarnaan k-linier dari kompleks simplisial terdapat bilangan kromatik linier dari kompleks simplisial dan dapat dikembangkan pada komplek persekitaran Sehingga dalam skripsi ini membahas mengenai bilangan kromatik linier dari komplek persekitaran graf. Rumusan masalah dalam skripsi ini adalah bagaimana cara mencari bilangan kromatik linier pada komplek persekitaran graf sederhana dan bagaimana hubungan antara bilangan kromatik pada graf dengan bilangan kromatik linier pada komplek persekitaran graf. Tujuan penulisan skripsi ini adalah untuk mengetahui cara mencari bilangan kromatik linier pada komplek persekitaran graf sederhana dan hubungan antara bilangan kromatik pada graf sederhana dengan bilangan kromatik linier pada komplek persekitaran graf sederhana.

2 KAJIAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Graf

2.1.1. Definisi Graf.

Graf G adalah pasangan berurutan ($V(G)$, $E(G)$) dengan $V(G)$ adalah himpunan berhingga tak kosong dari obyek yang berupa titik $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dan $E(G)$ adalah himpunan berhingga (mungkin kosong) yang elemennya disebut sisi $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ sedemikian sehingga setiap elemen e dalam $E(G)$ menghubungkan sepasang titik v di $V(G)$.

2.1.2. Definisi Graf sederhana.

Graf sederhana adalah graf yang tidak mempunyai sisi rangkap dan tidak gelung.

2.1.3 Definisi Pewarnaan Titik

Pewarnaan titik dari graf G adalah sebuah pemetaan warna-warna ke titik-titik G sedemikian hingga titik yang terhubung langsung mendapatkan warna-warna yang berbeda. Jika G memiliki sebuah pewarnaan-k maka G dikatakan dapat diwarnai dengan k warna. Sebuah pewarnaan-k dari graf G biasanya ditunjukkan dengan melabeli titik-titik G dengan warna $1,2,3,\ldots,k$.

2.1.4 Definisi Bilangan Kromatik

Bilangan kromatik dari graf G adalah minimum banyaknya warna yang diperlukan untuk mewarnai semua titik G sedemikian hingga setiap dua titik yang berhubungan langsung mendapatkan warna yang berbeda. Bilangan kromatik dari graf G, dilambangkan dengan $X(G)$.

2.2. Komplek Simplisial

2.2.1 Definisi Komplek Simplisial

Komplek simplisial (Δ) pada himpunan berhingga X adalah sebuah keluarga himpunan bagian dari X yang memenuhi sifat-sifat berikut:

(i) $\{x\} \in \Delta$ untuk semua $x \in X$.

(ii) Jika $F \in \Delta$ dan $H \subset F$, maka $H \in \Delta$

Dimana F disebut muka, dimensi dari muka F adalah $dim(F) = |F| - 1$, didefinisikan $dim(\Delta) = \max\{dim(F): F \in \Delta\}$. Angka 0 dan 1 pada dimensi muka dari Δ masing-masing disebut titik dan sisi. $\mathcal{F}_\Delta$ adalah muka yang memuat paling banyak anggota Δ dan $\mathcal{F}_\Delta(x)$ adalah $\mathcal{F}_\Delta$ yang memuat titik x dimana $x \in X$.

2.2.2 Definisi Pewarnaan *k*- linier dari Komplek Persekitaran

Sebuah pewarnaan $\alpha: X \to [k]$ adalah pewarnaan k- linier dari Δ jika dan hanya jika $\alpha(x) = \alpha(y)$ untuk suatu $x,y \in X$ maka $\mathcal{F}_\Delta(x) \subseteq \mathcal{F}_\Delta(y)$ atau $\mathcal{F}_\Delta(y) \subseteq \mathcal{F}_\Delta(x)$ berlaku. Dimana $[k] = \{1,2,\ldots k\}$.

2.2.3. Definisi Bilangan Kromatik Linier dari Komplek Simplisial

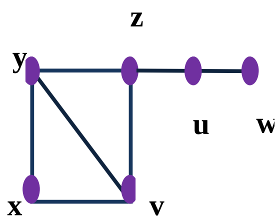
Bilangan kromatik linier dari komplek simplisial adalah bilangan bulat positif k terakhir dari pewarnaan k-linier pada kompleks simplisial dan dinotasikan dengan $\lambda(\Delta)$.

2.3. Persekitaran Terbuka

2.3.1 Definisi Persekitaran Terbuka

Diketahui graf sederhana $G = (V,E)$. Himpunan $N(u) = \{v \in V: uv \in E\}$ disebut persekitaran terbuka dari u di

Contoh:



G

Pada gambar diatas, $\mathcal{N}$ (x) = {{*v*,*y*}}, $\mathcal{N}$ (y) = {{*x*,*v*,*z*}}, $\mathcal{N}$ (*v*) = {{*x*,*y*,*z*}}, $\mathcal{N}$ (z) = {{*u*,*v*,*y*}}, $\mathcal{N}$ (*u*) = {{*z*,*w*}} dan $\mathcal{N}$ (*w*) = {{*u*}}

2.4. Kompleks Persekitaran

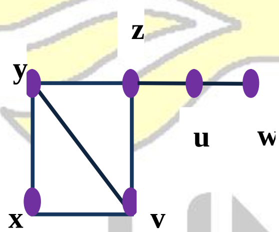
2.4.1 Definisi Kompleks Persekitaran

Diketahui graf sederhana $G = (V,E)$. Komplek persekitaran dari graf sederhana $G = (V,E)$ didefinisikan kompleks simplisial dari V sedemikian hingga $F \subseteq V$ adalah muka dari $\mathcal{N}(G)$.jika dan hanya jika

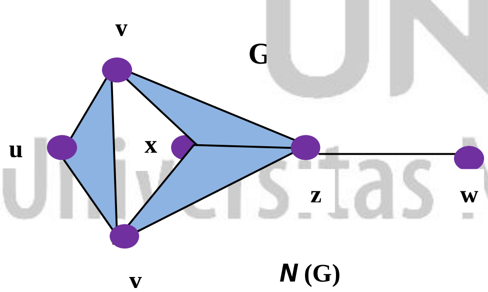
$$\bigcap_{u\in F} \mathcal{N}(\mathrm{u}) \neq \emptyset$$

Kompleks persekitaran dari graf sederhana G dilambangkan $\mathcal{N}(G)$.

Contoh:



G



$\mathcal{N}$ (G)

$\mathcal{N}$ (G) ={{*x*},{*y*},{*u*},{*v*},{*z*},{*w*}, {*u*,*y*},{*x*,*y*},{*x*,*v*},{*y*,*z*},{*v*,*z*},{*v*,*y*}, {*v*,*u*},{*x*,*z*},{*w*,*z*},{*x*,*y*,*z*},{*x*,*v*,*z*}, {*u*,*v*,*y*}}

3. PEMBAHASAN

Akan dibahas mengenai cara mencari bilangan kromatik linier pada komplek persekitaran graf, hubungan bilangan kromatik pada graf dengan bilangan kromatik linier pada komplek persekitaran graf; membuktikan teorema yang berkaitan dengan bilangan kromatik linier pada komplek persekitaran graf.

3.1 Bilangan Kromatik Linier pada Komplek Persekitaran graf

3.1.1. Langkah-langkah mencari pewarnaan *k*- linier dari komplek persekitaran antara lain:

Misal Graf G dengan $\{v_1,v_2,v_3,\ldots,v_n\}= V(G)$

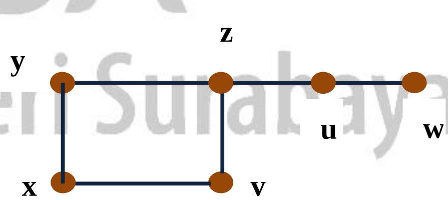
a. Cari $\mathcal{N}(G)$

b. Hapus $\mathcal{N}(v_i)$ apabila $\mathcal{N}(v_i) \subseteq \mathcal{N}(v_j)$, dimana $1 \le i, j \le n$, $i \neq j$. Hasilnya dinamakan $\mathcal{F}_G$.

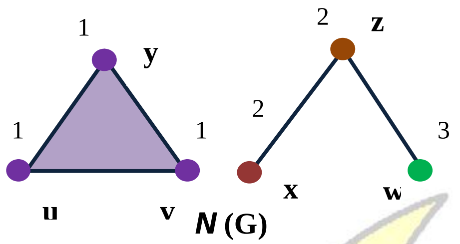
c. Temukan semua $\mathcal{F}_G(v_i)$ dimana $1 \le i \le n$.

d. Misalkan $\mathcal{F}_G(v_s) = \min\{ |\mathcal{F}_G(v_i)| 1 \le i \le n \}$. Jika $\mathcal{F}_G(v_s) \subseteq \mathcal{F}_G(v_1) \subseteq \mathcal{F}_G(v_2) \ldots \subseteq \mathcal{F}_G(v_m)$, dimana $v_i \in V(G)$ dan $1 \le m \le n\text{-}1$, maka setiap titik tadi $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ mendapatkan warna yang sama.

e. Ulangi langkah pada huruf (d) untuk titik yang masih tersisa dan langkah ini akan berakhir setelah terdapat angka berhingga.



G



Gambar: Pewarnaan 3- linier pada komplek persekitaran $N(G)$

3.1.2. Langkah-langkah mencari bilangan kromatik linier pada kompleks persekitaran antara lain :

a. Mencari pewarnaan *k*-linier pada kompleks persekitaran.

b. Mencari bilangan bulat paling sedikit *k* dari pewarnaan *k*-linier pada komplek simplisial dan notasikan dengan $\lambda(N(G))$.

Contoh: Pada gambar diatas $\lambda(N(G))=3$

3.2. Hubungan antara bilangan kromatik pada graf dengan bilangan kromatik linier pada komplek persekitaran graf

3.2.1 Teorema

Untuk sebarang graf *G*, $\lambda(N(G)) \geq X(G)$, dimana $X(G)$ dinotasikan dengan bilangan kromatik titik pada graf *G*.

Bukti:

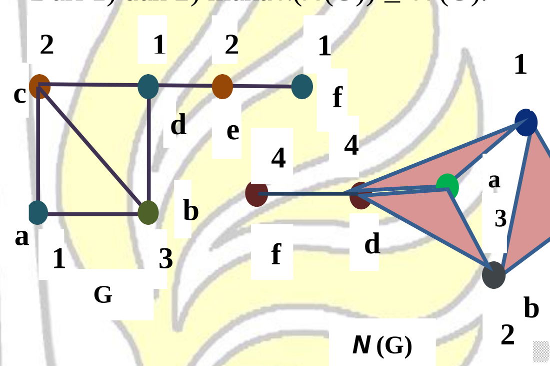
Diketahui graf *G* sederhana dan $N(G)$ dengan $V(G) = V(N(G))$

Misal $x,y \in V(G)$ maka ada dua kemungkinan terkait dengan pewarnaan titik:

1). Jika titik *x* dan titik *y* berhubungan langsung di graf *G*, maka warna titik *x* dan warna titik *y* berbeda. Akibatnya pada graf $N(G)$ titik *x* dan titik *y* juga berwarna berbeda jika titik *x* dan titik *y* berhubungan langsung atau tidak berhubungan langsung dan $F_G(x) \not\subseteq F_G(y)$ dan $F_G(y) \not\subseteq F_G(x)$.

2). Jika titik *x* dan titik *y* tidak berhubungan langsung di graf *G*, maka warna titik *x* dan warna titik *y* boleh diwarnai sama. Sedangkan pada graf $N(G)$ kedua titik tersebut bisa diwarnai berbeda.

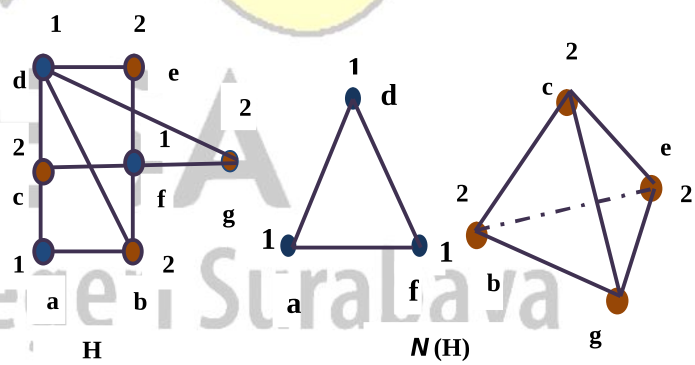
Dari 1) dan 2) maka $\lambda(N(G)) \geq X(G)$.



Pada gambar $\lambda(N(G)) > X(G) = 4 > 2$

3.2.2. Definisi Graf *N*-Linier

Sebuah graf sederhana dinamakan graf *N*-linier jika $X(G) = \lambda(N(G))$.



Pada gambar $\lambda(N(G)) = X(G) = 2$

3.2.2. Teorema
Misal G adalah graf, maka $X(G)$ = maks{ $X(G_i)$ | G_i adalah komponen dari G}.
Bukti:
Misalkan M = maks{ $X(G_i)$ | G_i adalah komponen dari G}.
Untuk membuktikan $M = X(G)$ terlebih dahulu harus dibuktikan $M \leq X(G)$ dan $X(G) \leq M$.
Akan dibuktikan $M \leq X(G)$
bukti: karena M = maks{$X(G_i)$| G_i adalah komponen dari G}. maka $M \leq X(G)$.
Akan dibuktikan $X(G) \leq M$.
bukti: Karena $X(G_i) \leq M$ untuk setiap i, maka himpunan [M] cukup mewakili setiap warna G_i. [M] = {1,2,3,…M}. Sehingga $X(G) \leq M$.

Dari bukti di atas maka terbukti bahwa $M = X(G)$.
3.2.3. Teorema
Misalkan G adalah graf dengan G_1, G_2,…,G_n. maka $\lambda(N(G)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(N(G_i))$
Bukti:
Untuk membuktikan $\lambda(N(G)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(N(G_i)$ terlebih dahulu harus dibuktikan $\lambda(N(G)) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda(N(G_i))$ dan $\lambda(N(G)) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda(N(G_i))$.
Akan dibuktikan $\lambda(N(G)) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda(N(G_i))$
Jelas bahwa $\lambda(N(G)) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda(N(G_i))$.
Akan dibuktikan $\lambda(N(G)) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda(N(G_i))$
Misal $\alpha: V(G) \to \lambda(N(G))$ adalah pewarnaan k- linier. Misalkan $u \in V(G_i)$ dan $v \in V(G_j)$, dimana $i \neq j$. Karena komponen G adalah tidak terhubung, maka tidak ada lintasan – uv. Sehingga $u \notin F_G(v)$ dan $v \notin F_G(u)$. Karena u dan v tidak terdapat pada persekitaran yang sama, maka $\alpha(u) \neq \alpha(v)$. Sehingga, setiap G_i mempunyai pewarnaan α_i tunggal. Itu menunjukkan bahwa $\lambda(N(G)) \geq |\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \ldots \cup \alpha_n|$. Karena setiap komponen pewarnaan tidak berhubung antara satu komponen dengan komponen yang lain, maka $|\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \ldots \cup \alpha_n| = \sum_{i=1}^{n} \lambda(N(G_i))$. Sehingga $\lambda(N(G)) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda(N(G_i))$.

Dari bukti di atas maka terbukti $\lambda(N(G)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(N(G_i))$.
3.2.4. Teorema
Jika G adalah graf N-linier, maka G terhubung
Bukti:
Andaikan G tidak terhubung maka graf G memiliki komponen G_1, G_2,…,G_m dimana $m \geq 2$. Sehingga,
$\lambda(N(G)) \geq X(G)$ (teorema 3.2.1)
$\lambda(N(G)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(N(G_i))$ (teorema 3.2.3)
$X(G)$ = maks{ $X(G_i)$| G_i adalah komponen dari G} (teorema 3.2.2)
$\lambda(N(G_i)) \geq$ maks{ $X(G_i)$ |G_i adalah komponen dari G}

$\lambda(N(G_i)) \geq X(G_i)$ (maks{$X(G_i)$ | G_i adalah komponen dari G}/ bisa diubah dalam bentuk $|X(G_1) \cup X(G_2) \cup \ldots \cup X(G_m)| = \sum_{i=1}^{m} X(G_i)$ untuk setiap $1 \leq i \leq m$)
Jadi graf G tidak linier N-graf.
3.2.5 Teorema
Jika $G \cong H$, maka $\lambda(N(G)) = \lambda(N(H))$
Untuk membuktikan $\lambda(N(G)) = \lambda(N(H))$ terlebih dahulu harus dibuktikan $\lambda(N(G)) \leq \lambda(N(H))$ dan $\lambda(N(H)) \leq \lambda(N(G))$.
Akan dibuktikan $\lambda(N(G)) \leq \lambda(N(H))$.
Bukti: Diketahui $G \cong H$, maka ada fungsi isomorfisma $f: V(G) \to V(H)$. Misal $k : \lambda(N(G))$ dengan $\alpha : V(G) \to [k]$ adalah pewarnaan k-linier dari G. Didefinisikan $\bar{\alpha} : V(H) \to [k]$ dengan $\bar{\alpha}(x) = \alpha(f^{-1}(x))$.

Misalkan $x, y \in V(H)$ dengan $\bar{\alpha}(x) = \bar{\alpha}(y)$, maka ada $u, v \in V(G)$ sedemikian hingga $f(u) = x$ dan $f(v) = y$.
Karena $\bar{\alpha}(x) = \alpha(f^{-1}(x))$.

$f(u) = x \rightarrow f^{-1}(x) = u$.
$\bar{\alpha}(y) = \alpha(f^{-1}(y))$.
$f(v) = y \rightarrow f^{-1}(y) = v$.
$\bar{\alpha}(x) = \bar{\alpha}(y)$.
$\alpha(f^{-1}(x)) = \alpha(f^{-1}(y))$.
$\alpha(u) = \alpha(y)$.

didapatkan α adalah linier. Karena α adalah linier, maka $\mathcal{F}_G(u) \subseteq \mathcal{F}_G(v)$ atau $\mathcal{F}_G(v) \subseteq \mathcal{F}_G(u)$. Dipilih $\mathcal{F}_G(u) \subseteq \mathcal{F}_G(v)$. Misalkan $F \in \mathcal{F}_H(x)$ maka $x \in F$ dan $\bigcap_{w \in F} N(w) \neq \emptyset$. Sehingga ada titik *m* sedemikian hingga *w* berhubungan dengan *m* untuk setiap $w \in F$. Maka $f^{-1}(m)$ berhubungan dengan β untuk setiap $\beta \in f^{-1}(F)$. Ini menujukkan $\bigcap_{\beta \in f^{-1}(F)} N(\beta) \neq \emptyset$. Karena $f^{-1}(F)$ muka di N (G), maka $u \in f^{-1}(F)$. Dengan demikian $f^{-1}(F) \in \mathcal{F}_G(u)$ dan $f^{-1}(F) \in \mathcal{F}_G(v)$. Karena $v \in f^{-1}(F)$ maka f (v) $\in F$. Tetapi f (v) = y dan F muka di N *(H)* yang memuat y, maka $F \in \mathcal{F}_H(y)$. Didapatkan $\mathcal{F}_H(x) \subseteq \mathcal{F}_H(y)$ dan $\bar{\alpha}$ adalah linier. Sehingga terbukti λ(N (G)) ≤ λ (N (*H*)).

Akan dibuktikan λ (*N* (*H*)) ≤ λ (*N* (G))

Bukti: Diketahui *H* ≅ *G*, maka ada fungsi isomorfisma $f: V(H) \rightarrow V(G)$. Misal *k :* λ (N (*H*)) dengan *α : V(H)*→[*k*] adalah pewarnaan *k*- linier dari *H*. Didefinisikan $\bar{\alpha}$: *V(G)* →*[k]* dengan $\bar{\alpha}(u) = \alpha(f^{-1}(u))$.
Misalkan *u, v* ∈ *V(G)* dengan $\bar{\alpha}(u) = \bar{\alpha}(v)$. Maka ada *x, y* ∈ *V(H)* sedemikian hingga $f(x) = u$ dan $f(y) = v$.
Karena $\bar{\alpha}(u) = \alpha(f^{-1}(u))$

$f(x) = u \rightarrow f^{-1}(u) = x$
$\bar{\alpha}(v) = \alpha(f^{-1}(v))$
$f(y) = v \rightarrow f^{-1}(v) = y$
$\bar{\alpha}(u) = \bar{\alpha}(v)$
$\alpha(f^{-1}(u)) = \alpha(f^{-1}(v))$
$\alpha(x) = \alpha(y)$

didapatkan α adalah linier. Karena α adalah linier, maka $\mathcal{F}_H(x) \subseteq \mathcal{F}_H(y)$ atau $\mathcal{F}_H(y) \subseteq \mathcal{F}_H(x)$. Dipilih $\mathcal{F}_H(x) \subseteq \mathcal{F}_H(y)$. Misalkan $F \in \mathcal{F}_G(u)$ maka $u \in F$ dan $\bigcap_{z \in F} N(z) \neq \emptyset$. Sehingga ada titik *c* sedemikian hingga *z* berhubungan dengan *c* untuk setiap $z \in F$. Maka $f^{-1}(c)$ berhubungan dengan σ untuk setiap $\sigma \in f^{-1}(F)$. Ini menujukkan $\bigcap_{\sigma \in f^{-1}(F)} N(\sigma) \neq \emptyset$. Karena $f^{-1}(F)$ muka di N (H), maka $x \in f^{-1}(F)$. Dengan demikian $f^{-1}(F) \in \mathcal{F}_H(x)$ dan $f^{-1}(F) \in \mathcal{F}_H(y)$. Karena v $\in f^{-1}(F)$ maka $f(y) \in F$. Tetapi $f(y) = v$ dan F adalah muka di N (G) yang memuat v, maka $F \in \mathcal{F}_G(v)$. Didapatkan $\mathcal{F}_G(u) \subseteq \mathcal{F}_G(v)$ dan $\bar{\alpha}$ adalah linier. Sehingga terbukti λ (N (*H*)) ≤ λ (N (G)).

Dari bukti di atas yaitu λ(N (*G*)) ≤ λ (N (*H*)) dan λ(N (*H*)) ≤ λ (N (*G*)) maka terbukti λ (N (*G*)) =λ (N (*H*)).

3.2.6. Teorema

Jika *G* adalah graf *n*-linier dan *G* ≅ *H*, maka *H* adalah graf *N*-linier.

Bukti:

Diketahui *G* ≅ *H*, maka berdasarkan teorema 3.3.4 mengakibatkan λ (N (*G*)) = λ (N (*H*)) sehingga *X*(*G*) = *X* (*H*). *G* adalah graf *n*-linier, maka *X*(*G*) = λ (N (*G*))

λ (N (*H*)) = λ (N (*G*))
= *X* (*G*)
= *X* (*H*)

Sehingga *X(H)* = λ (N (*H*)). Jadi terbukti *H* adalah graf *N*-linier.

4. PENUTUP

4.1 KESIMPULAN

1. Hubungan antara bilangan kromatik pada graf dengan bilangan kromatik linier pada komplek persekitaran graf sederhana adalah λ(N(*G*)) ≥ *X*(*G*) bisa dijabarkan λ(N(*G*)) > *X*(*G*) atau λ(N(*G*)) = *X*(*G*)

2. Jika $\lambda(N(G)) = X(G)$ dinamakan graf *N*-linier
3. Syarat perlu dan cukup jika dikatakan graf *N*-linier yaitu:
   a. Syarat perlu yaitu graf harus terhubung
   b. syarat cukup yaitu graf terhubung cukup

4.2 SARAN

Penulis hanya memfokuskan pada pokok bahasan masalah bilangan kromatik linier pada komplek persekitaran graf sederhana. Maka, untuk penulisan skripsi selanjutnya penulis menyarankan kepada pembaca untuk mengembangkan bilangan kromatik linier pada komplek persekitaran graf lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Baser, G. dan Taylan, D. 2007.*Linear N- graph*. Turkey http://www.rose-hulman.edu/...n1/.../v8n1-9pd.pdf [diakses tanggal 29 Maret 2012]

[2] Budayasa,I.Ketut, Ph.D. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press

[3] Caproni, D.dkk. *The Linear Chromatic Number of a Graph*. http://www.units.muohio.edu/sumsri/sumj/2009/Discreat Paper.pdf [diakses tanggal 14 Mei 2012]