EVALUASI INTEGRAL ELIPTIK LENGKAP PERTAMA PADA MODULI SINGULAR

Elma Rahayu [1], Manuharawati [2]
[1] Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya, 60231
[2] Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya, 60231
Email : ema.kenez@gmail.com [1], Manuhara1@yahoo.co.id [2]

ABSTRAK

Jika k bilangan real dengan $0 < k < 1$, maka integral eliptik lengkap pertama, $K(k)$ didefinisikan sebagai

$$K(k) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}}$$

bilangan real k disebut modulus dari integral eliptik. Komplemen dari modulus tersebut adalah $k' = \sqrt{1-k^2}$. Karena k bilangan real dengan $0 < k < 1$, maka k' juga merupakan bilangan real dengan $0 < k' < 1$. Dengan demikian integral eliptik lengkap pertama yang terkait dengan k' adalah $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\theta}}$. Akibatnya, $K(k')$ dapat disajikan sebagai $K(k') = \sqrt{\lambda}K(k)$ untuk suatu bilangan bulat positif λ. Suatu bilangan real $k(\lambda)$ disebut modulus singular dari $K(k)$ yang memenuhi persamaan $K(k') = \sqrt{\lambda}K(k)$. Notasi $H(d)$ menyatakan bentuk grup dari diskriminan d. Dengan menggunakan beberapa nilai dari fungsi Dedekind eta pada kuadratik irasional, sebuah rumus diberikan untuk modulus singular $k(\lambda)$. Secara umum, rumus ini diberikan untuk integral eliptik lengkap pertama $K[\sqrt{\lambda}] := K(k(\lambda))$ pada suku yang berkorespondensi. Seperti contoh pada integral eliptik lengkap pertama $K[\sqrt{17}]$ yang ditentukan secara khusus pada suku dari fungsi Gamma.

Kata kunci: Integral eliptik lengkap pertama, Modulus singular, Fungsi Dedekind Eta, Fungsi Weber.

PENDAHULUAN

Bentuk bumi yang faktanya tidak datar, memberikan pengetahuan bahwasanya tidak ada garis lurus (geometri non Euclid). Salah satu bentuk yang menarik untuk ditelusuri adalah bentuk Integral Eliptik. Rumusan masalah pada jurnal ini adalah bagaimana proses dan evaluasi nilai integral eliptik lengkap pertama pada moduli singular $k = \sqrt{17}$ menggunakan moduli singular, teori bilangan, aljabar, analisis kompleks dan kajiannya dalam deret Fungsi Gamma.

KAJIAN TEORI

2.1 LAPANGAN KUADRATIK

Definisi 2.1.1 *Misalkan p bilangan prima ganjil dan d adalah bilangan bulat yang relatif prima terhadap p. Jika $h \in \mathbb{Z}$ dengan $h^2 \equiv d \pmod{p}$ mempunyai solusi bulat, maka d dikatakan kuadrat residu modulo p. Jika tidak demikian, d disebut kuadrat nonresidu modulo p.*

Definisi 2.1.2 *Misalkan p bilangan prima ganjil dan d adalah bilangan bulat yang relatif prima terhadap p. Fungsi Legendre adalah fungsi dari $\mathbb{Z} \to \{-1,0,1\}$ yang dinotasikan dengan L_p dengan*

$$L_p(d) = \begin{cases} 1, & jika\ d\ kuadrat\ residu\ modulo\ p \\ -1 & jika\ d\ kuadrat\ nonresidu\ modulo\ p \\ 0, & jika\ p|d \end{cases}$$

$L_p(d)$ sering dituliskan dengan $\left(\frac{d}{p}\right)$.

Teorema 2.1.1 *Diketahui $\lambda \in \mathbb{N}$. Jika untuk setiap $z \in \mathbb{C}$ dengan $Im(z) > 0$ maka*

a). $f_0(\sqrt{-\lambda})f_1(\sqrt{-\lambda})f_2(\sqrt{-\lambda}) = \sqrt{2}$

b). $f_0(\sqrt{-\lambda})^8 = f_1(\sqrt{-\lambda})^8 + f_2(\sqrt{-\lambda})^8$

dengan

$$\eta(z) = e^{\frac{\pi i z}{12}} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i m z})$$

$$f_0(z) = e^{-\frac{\pi i}{24}} \frac{\eta\left(\frac{1+z}{2}\right)}{\eta(z)}$$

$$f_1(z) = \frac{\eta\left(\frac{z}{2}\right)}{\eta(z)}$$

$$f_2(z) = \sqrt{2}\frac{\eta(2z)}{\eta(z)}$$

Definisi 2.1.3 *Kuadrat biner $K = ax^2 + bxy + cy^2$ yang memenuhi definit positif, primitive dinotasikan dengan (a, b, c). Jika $d(d = b^2 -$*

$4ac$) *adalah diskriminan* K *yang memenuhi* $d < 0$, $d \equiv 1$ *atau* $0 \pmod 4$, *maka kelas dari* (a,b,c) *didefinisikan sebagai*

$$[a,b,c] = \{(a(p,r), b(p,q,r,s), c(q,s)) \mid p,q,r,s \in \mathbb{Z}, ps - qr = 1\},$$

dengan

$$\begin{aligned} a(p,r) &= ap^2 + bpr + cr^2 \\ b(p,q,r,s) &= 2apq + bps + bqr + 2crs \\ c(q,s) &= aq^2 + bqs + cs^2 \end{aligned}$$

Definisi 2.1.4 *Grup Modular* G *adalah subgrup* $GL(2,\mathbb{Z})$ *pada* $SL(2,\mathbb{R})$ *yang terdiri dari matriks dengan koefisien di* $\mathbb{Z}$ *yang ekuivalen dengan* ± 1*, dengan*

$$SL(2,\mathbb{R}) = \{\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1\}$$

dan

$$GL(2,\mathbb{Z}) = \{\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z}, ad - bc = \pm 1\}$$

Definisi 2.1.5 *(i).* K *disebut lapangan imajiner kuadrat jika diskriminan* d *memenuhi* $d < 0$ *dan* $d \equiv 0$ *atau* $1 \pmod 4$.
(ii). f *disebut konduktor dari diskriminan* d *jika* f *merupakan bilangan bulat terbesar dengan* $f^2 \mid d$ *dan* $\frac{d}{f^2} \equiv 0$ *atau* $1 \pmod 4$
(iii). Himpunan Δ *disebut diskriminan fundamental dengan* $\Delta = \frac{d}{f^2} \in \mathbb{Z}$. Akibatnya $d = \Delta f^2, \Delta \equiv 0$ atau $1 \pmod 4$.

Definisi 2.1.6 *Diketahui suatu bilangan prima* p, $\iota_p(f)$ *adalah bilangan bulat nonnegatif dengan* $p^{\iota_p(f)} \mid f, p^{\iota_p(f)+1} \nmid f$. *Jika* $\frac{\Delta}{p}$ *adalah simbol Legendre modulo* p *maka himpunan* a_p *didefinisikan sebagai*

$$a_p(\Delta, f) = \frac{(p^{\iota_p(f)} - 1)(1 - \frac{\Delta}{p})}{p^{\iota_p(f)-1}(p-1)(p - \frac{\Delta}{p})}$$

Definisi 2.1.7 *Jika* d *adalah diskriminan* K *yang memenuhi* $d < 0$, $d \equiv 1$ *atau* $0 \pmod 4$, *maka identitas dari Grup* $H(d)$ *didefinisikan sebagai*

$$I = \begin{cases} [1, 0, -\frac{d}{4}], & jika\ d \equiv 0 \pmod 4 \\ [1, 1, \frac{(1-d)}{4}], & jika\ d \equiv 1 \pmod 4 \end{cases}$$

Definisi 2.1.8 *Jika* d *adalah diskriminan* K *yang memenuhi* $d < 0$, $d \equiv 1$ *atau* $0 \pmod 4$, *maka invers dari kelas* $K = [a,b,c] \in H(d)$ *yang dinotasikan dengan* K^{-1} *didefinisikan sebagai* $K^{-1} = [a,-b,c] \in H(d)$.

Definisi 2.1.9 *Misalkan* p *prima dengan simbol Kronecker* $\left(\frac{d}{p}\right) = 1$. *Jika* h_1 *dan* h_2 *adalah solusi dari* $h^2 \equiv d \pmod{4p}$, $0 \leq h < 2p$ *dengan* $h_1 < h_2$ *dan* $h_1 + h_2 = 2p$ *maka kelas* K_p *dan invers kelas* $K_p = K_p^{-1}$ *dari* $H(d)$ *didefinisikan sebagai*

$$K_p = [p, h_1, \frac{h_1^2 - d}{4p}]$$

$$K_p^{-1} = [p, -h_1, \frac{h_1^2 - d}{4p}]$$

Definisi 2.1.10 *Diketahui* f *adalah bilangan bulat terbesar yang didefinisikan pada Definisi 2.1.6. Jika* p *prima dengan* $\left(\frac{d}{p}\right) = 0$, $p \nmid f$, *kelas* K_p *dari* $H(d)$ *didefinisikan sebagai*

$$K_p = \begin{cases} [p, 0, -\frac{d}{4}], & jika\ p > 2, d \equiv 0 \pmod 4 \\ [p, p, \frac{p^2 - d}{4p}], & jika\ p > 2, d \equiv 1 \pmod 4 \\ [2, 0, -\frac{d}{8}], & jika\ p = 2, d \equiv 8 \pmod{16} \\ [2, 2, \frac{4-d}{8}], & jika\ p = 2, d \equiv 12 \pmod{16} \end{cases}$$

Definisi 2.1.11 *Bilangan kelas (class number)* $H(d)$ *dari lapangan kuadratik* K *dengan diskriminan* $d < 0$ *sama dengan banyaknya bilangan dari bentuk reduksi kuadratik biner dengan diskriminan* d *tersebut.*

Definisi 2.1.12 *Misalkan himpunan* $[K, L]$ *menyatakan jumlah indeks perkalian anggota* $H(d)$ *dibagi banyaknya kelas dengan*

$$[K, L] = \sum_{j=1}^{v} \frac{ind_{A_j}(K) ind_{A_j}(L)}{h_j}$$

Jika $K, L \in H(d)$, *maka fungsi* X *didefinisikan oleh* $X[K,L] = e^{2\pi i [K,L]}$

Definisi 2.1.13 *Diketahui kelas* K_p, d *adalah diskriminan* K. *Fungsi* X *didefinisikan pada Definisi 2.1.12 dan* p *prima dengan* $\left(\frac{d}{p}\right) = 0$). *Nilai dari fungsi Dedekind Eta yang dinotasikan* j *didefinisikan sebagai*

$$j(K, d) = \prod_{\substack{p \\ \left(\frac{d}{p}\right)=0}} \left(1 + \frac{X(K, K_p)}{p}\right)$$

dengan $K_p = \prod_{j=1}^{l} A_j^{\frac{h_j c_j}{(2,h_j)}}$, $c_j = 0, \ldots, (2, h_j) - 1$

$$X(K, K_p) = e^{2\pi i \sum_{j=1}^{l} \frac{\frac{h_j c_j}{(2,h_j)} k_j}{h_j}}$$

$$= (-1)^{\sum_{j=1}^{l} \frac{2}{(2,h_j)} k_j c_j} = \pm 1$$

Akibat 2.1.1 *Diketahui suatu lapangan kuadratik* K, d *adalah diskriminan* K. *Fungsi* X *didefinisikan* *pada Definisi 2.1.12 dan* p *prima dengan* $\left(\frac{d}{p}\right) = 0$. *Jika nilai dari fungsi Dedekind Eta adalah* j, *maka*

$$j(K^{-1}, d) = \prod_{\substack{p \\ \left(\frac{d}{p}\right)=0}} \left(1 + \frac{X(K, K_p)}{p}\right)$$

Bukti. Berdasarkan definisi nilai dari fungsi Dedekind Eta (Definisi 2.1.13), diperoleh

$$j(K^{-1}, d) = \prod_{\substack{p \\ \left(\frac{d}{p}\right)=0}} \left(1 + \frac{X(K^{-1}, K_p)}{p}\right)$$

$$= \prod_{\substack{p \\ \left(\frac{d}{p}\right)=0}} \left(1 + \frac{X(K, K_p)^{-1}}{p}\right)$$

$$= \prod_{\substack{p \\ \left(\frac{d}{p}\right)=0}} \left(1 + \frac{X(K, K_p)}{p}\right)$$

Jadi, $j(K^{-1}, d) = j(K, d)$. ■

Akibat 2.1.2 *Diketahui suatu lapangan kuadratik* $K \neq I \in H(d)$, d *adalah diskriminan* K. *Fungsi* X *didefinisikan pada Definisi 2.1.12 dan* p *prima dengan* $\left(\frac{d}{p}\right) = 1$. *Jika* $s > 1$, *maka*

$$\lim_{s \to 1^+} j(K, d) = \lim_{s \to 1^+} \prod_{\substack{p \\ \left(\frac{d}{p}\right)=1}} \left(1 - \frac{X(K, K_p)}{p^s}\right)\left(1 - \frac{X(K^{-1}, K_p)}{p^s}\right)$$

Definisi 2.1.13 *Jika* d *adalah diskriminan* K, *fungsi* X *didefinisikan pada Definisi 2.1.12 dan nilai dari fungsi Dedekind Eta* j, *maka untuk* $L, K \in H(d)$ *didefinisikan himpunan*

$$E(K, d) = \frac{\pi\sqrt{|d|}\, w(d)}{48 h(d)} \sum_{\substack{L \in H(d) \\ L \neq I}} X(LK)^{-1} \frac{t_1(d)}{j(L, d)} l(L, d)$$

dengan $w(d) = \begin{cases} 2, & d < -4 \\ 4, & d = -4 \\ 6, & d = -4 \\ -3, & d < 0 \end{cases}$

dan

$$t_1(d) := \prod_{\substack{p \\ \left(\frac{d}{p}\right)=1}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

memenuhi

$$t_{-1}(d)\, t_0(d)\, t_1(d) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{6}{\pi^2}.$$

2.2 FUNGSI WEBER PADA KUADRATIK IRRASIONAL

Proposisi berikut ini menyatakan nilai dari fungsi Dedekind Eta dan keterkaitannya dengan grup $H(d)$.

Proposisi 2.2.1 *Jika* $K = [1,0,\lambda] \in H(d)$, *maka nilai dari fungsi Dedekind Eta pada kuadratik irrasional adalah*

$$\eta(\sqrt{-\lambda}) = 2^{-\frac{3}{4}}\pi^{-\frac{1}{4}}\lambda^{-\frac{1}{4}} \prod_{p \mid f} p^{\frac{\varepsilon_p \Delta f}{4}} \left(\prod_{m=1}^{|\Delta|} \Gamma\left(\frac{m}{|\Delta|}\right)^{m}\right)^{\frac{\Delta\, w_\Delta}{8 h_\Delta}} e^{-E(K, d)}$$

dengan $\Gamma\left(\frac{m}{|\Delta|}\right)$ *menyatakan fungsi Gamma*

$h(\Delta)$ *class number of* Δ

$w(\Delta)$ *number of roots of unity in* Δ

Proposisi 2.2.2 *Misalkan* $\lambda \in \mathbb{N}$, $d = -4\lambda = \Delta f^2$, *dan* $K = [1,0,\lambda] \in H(d)$.

(a). Untuk $\lambda \equiv 0 \pmod 4$ *terdapat himpunan*

$$M_0 = [4,4,\lambda+1] \in H(4d)$$
$$M_1 = \left[1,0,\frac{\lambda}{4}\right] \in H\left(\frac{d}{4}\right)$$
$$M_2 = [1,0,4d] \in H(4d).$$

Misalkan α *adalah bilangan bulat positif dan* $\lambda = 4^{\alpha}\mu$, *maka* $\mu \equiv 1, 2,$ *atau* $3 \pmod 4$.

(i). Untuk $\mu \equiv 1,2 \pmod 4$, *diperoleh Δ genap dan* $v_2(f) = \alpha$. *Akibatnya*

$$f_0(\sqrt{-\lambda}) = 2^{\frac{1}{2^{\alpha+3}}} e^{E(K, d) - E(M_0, 4d)}$$
$$f_1(\sqrt{-\lambda}) = 2^{\frac{2^{\alpha+1}-1}{2^{\alpha+2}}} e^{E(K, d) - E(M_1, d/4)}$$
$$f_2(\sqrt{-\lambda}) = 2^{\frac{1}{2^{\alpha+3}}} e^{E(K, d) - E(M_2, 4d)}$$

(ii). Untuk $\mu \equiv 3 \pmod 4$, *diperoleh* $\Delta \equiv -\mu \pmod 8$ *dan* $v_2(f) = \alpha + 1$.

Jika $\mu \equiv 3 \pmod 8$, *berlaku*

$$f_0(\sqrt{-\lambda}) = 2^{\frac{1}{3 \cdot 2^{\alpha+3}}} e^{E(K, d) - E(M_0, 4d)}$$
$$f_1(\sqrt{-\lambda}) = 2^{\frac{3 \cdot 2^{\alpha+1}-1}{3 \cdot 2^{\alpha+1}}} e^{E(K, d) - E(M_1, d/4)}$$
$$f_2(\sqrt{-\lambda}) = 2^{\frac{1}{3 \cdot 2^{\alpha+2}}} e^{E(K, d) - E(M_2, 4d)}$$

Jika $\mu \equiv 7 \pmod 8$, *berlaku*

$$f_0(\sqrt{-\lambda}) = e^{E(K, d) - E(M_0, 4d)}$$
$$f_1(\sqrt{-\lambda}) = \sqrt{2}\, e^{E(K, d) - E(M_1, d/4)}$$
$$f_2(\sqrt{-\lambda}) = e^{E(K, d) - E(M_2, 4d)}$$

b). Jika $\lambda \equiv 1 \pmod 4$ *diperoleh* Δ *genap dan* f *ganjil, terdapat himpunan*

$$M_0 = \left[2,2,\frac{\lambda+1}{2}\right] \in H(d)$$
$$M_1 = [4,0,\lambda] \in H(4d)$$
$$M_2 = [1,0,4\lambda] \in H(4d)$$

Akibatnya

$$f_0(\sqrt{-\lambda}) = 2^{1/4} e^{E(K, d) - E(M_0, d)}$$
$$f_1(\sqrt{-\lambda}) = 2^{1/8} e^{E(K, d) - E(M_1, 4d)}$$
$$f_2(\sqrt{-\lambda}) = 2^{1/8} e^{E(K, d) - E(M_2, 4d)}$$

(c). Jika $\lambda \equiv 2 \pmod 4$ *diperoleh* Δ *genap dan* f *ganjil, terdapat himpunan*

$$M_0 = [4, 4, \lambda+1] \in H(4d)$$
$$M_1 = \left[2, 0, \frac{\lambda}{2}\right] \in H(d)$$
$$M_2 = [1,0,4\lambda] \in H(4d)$$

Akibatnya

$$f_0(\sqrt{-\lambda}) = 2^{1/8} e^{E(K, d) - E(M_0, 4d)}$$
$$f_1(\sqrt{-\lambda}) = 2^{1/4} e^{E(K, d) - E(M_1, d)}$$

$$f_2(\sqrt{-\lambda}) = 2^{1/8}e^{E(Kd)-E(M_2 4d)}$$

d). Jika $\lambda \equiv 3\ (mod\ 4)$ diperoleh $\lambda \equiv -\Delta\ (mod\ 8)$ dan $f \equiv 2\ (mod\ 4)$, terdapat himpunan

$$M_0 = [1,\ 1,\ \frac{\lambda+1}{4}] \in H(\frac{d}{4})$$
$$M_1 = [4,\ 0, \lambda] \in H(4d)$$
$$M_2 = [1, 0, 4\lambda] \in H(4d)$$

Akibatnya, untuk $\lambda \equiv 3\ (mod\ 8)$, berlaku:

$$f_0(\sqrt{-\lambda}) = 2^{1/3}e^{E(Kd)-E(M_0\ d/4)}$$
$$f_1(\sqrt{-\lambda}) = 2^{1/12}e^{E(Kd)-E(M_1 4d)}$$
$$f_2(\sqrt{-\lambda}) = 2^{1/12}e^{E(Kd)-E(M_2 4d)}$$

dan untuk $\lambda \equiv 7\ (mod\ 8)$, berlaku:

$$f_0(\sqrt{-\lambda}) = \sqrt{2}e^{E(Kd)-E(M_0\ d/4)}$$
$$f_1(\sqrt{-\lambda}) = e^{E(Kd)-E(M_1 4d)}$$
$$f_2(\sqrt{-\lambda}) = e^{E(Kd)-E(M_2 4d)}$$

2.3 BENTUK $k(\lambda)$ DAN $K[\sqrt{\lambda}]$

Teorema 2.3.1 *Diketahui suatu bilangan asli λ, diskriminan $d = -4\lambda = \Delta f^2$, dengan Δ dan f didefinisikan pada Definisi 2.1.5, p adalah bilangan prima, $c_p(\Delta, f)$ didefinisikan pada Definisi 2.1.6, $E(K, d)$ didefinisikan pada Definisi 2.1.13. Misalkan $K = [1,0,\lambda] \in H(d)$, $h(\Delta)$ class number of Δ, $w(\Delta)$ number of roots of unity in Δ*

a). Jika $\lambda \equiv 0\ (mod\ 4)$ untuk himpunan

$$M_o = [4,\ 4,\ \lambda+1] \in H(4d),$$
$$M_2 = [1,\ 0,\ 4\lambda] \in H(4d)$$

berlaku

$$k(\lambda) = e^{4(E(M_o 4d)-E(M_2 4d))}$$

Misalkan α adalah bilangan bulat positif dan $\lambda = 4^{\alpha}\mu$, dengan $\mu \equiv 1,2\ atau\ 3\ (mod\ 4)$. Maka nilai integral eliptik lengkap pertama $K[\sqrt{\lambda}]$ adalah

$$2^{\beta}\pi^{\frac{1}{2}}\lambda^{-\frac{1}{2}}\prod_{p|f} p^{\frac{c_p(\Delta,f)}{2}}\left(\prod_{n=1}^{|\Delta|}\Gamma\left(\frac{m}{|\Delta|}\right)^{\left(\frac{\Delta}{m}\right)}\right)^{\frac{w(\Delta)}{4h(\Delta)}}e^{2E(Kd)-2E(M_0 4d)}$$

dengan $\Gamma(\frac{m}{|\Delta|})$ menyatakan fungsi Gamma

$$\beta = \begin{cases} \frac{1}{2^{\alpha+1}} - \frac{5}{2}, & jika\ \mu \equiv 1\ atau\ 2\ (mod\ 4) \\ \frac{1}{3\cdot 2^{\alpha}} - \frac{5}{2}, & jika\ \mu \equiv 3\ (mod\ 8) \\ -\frac{5}{2}, & jika\ \mu \equiv 7\ (mod\ 8) \end{cases}$$

b). Jika $\lambda \equiv 1\ (mod\ 4)$ dengan

$$M_o = [2,\ 2,\ \frac{\lambda+1}{2}] \in H(d)$$
$$M_2 = [1,\ 0,\ 4\lambda] \in H(4d)$$

maka

$$k(\lambda) = 2^{-1/2}e^{4(E(M_o d)-E(M_2 4d))}$$

dan nilai integral eliptik lengkap pertama $K[\sqrt{\lambda}]$ adalah

$$2^{-\frac{3}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}\lambda^{-\frac{1}{2}}\prod_{p|f} p^{\frac{c_p(\Delta,f)}{2}}\left(\prod_{n=1}^{|\Delta|}\Gamma\left(\frac{m}{|\Delta|}\right)^{\left(\frac{\Delta}{m}\right)}\right)^{\frac{w(\Delta)}{4h(\Delta)}}e^{2E(Kd)-2E(M_0 4d)}$$

Jika $M_o = [4,\ 4,\ \lambda+1] \in H(4d)$

$$M_2 = [1,\ 0,\ 4\lambda] \in H(4d)$$

dengan $\lambda \equiv 2\ (mod\ 4)$

maka

$$k(\lambda) = e^{4(E(M_o 4d)-E(M_2 4d))}$$

dan dan nilai integral eliptik lengkap pertama $K[\sqrt{\lambda}]$ adalah

$$2^{-2}\pi^{\frac{1}{2}}\lambda^{-\frac{1}{2}}\prod_{p|f} p^{\frac{c_p(\Delta,f)}{2}}\left(\prod_{n=1}^{|\Delta|}\Gamma\left(\frac{m}{|\Delta|}\right)^{\left(\frac{\Delta}{m}\right)}\right)^{\frac{w(\Delta)}{4h(\Delta)}}e^{2E(Kd)-2E(M_0 4d)}$$

c). Untuk $\lambda \equiv 3\ (mod\ 4)$, terdapat himpunan

$$M_o = [1,\ 1,\ \frac{\lambda+1}{2}] \in H(\frac{d}{4})$$
$$M_2 = [1,\ 0,\ 4\lambda] \in H(4d)$$

sedemikian hingga

untuk $\lambda \equiv 3\ (mod\ 8)$, berlaku

$$k(\lambda) = 2^{-1}e^{4(E(M_o d/4)-E(M_2 4d))}$$

dan nilai integral eliptik lengkap pertama $K[\sqrt{\lambda}]$ adalah

$$2^{-\frac{7}{6}}\pi^{\frac{1}{2}}\lambda^{-\frac{1}{2}}\prod_{p|f} p^{\frac{c_p(\Delta,f)}{2}}\left(\prod_{n=1}^{|\Delta|}\Gamma\left(\frac{m}{|\Delta|}\right)^{\left(\frac{\Delta}{m}\right)}\right)^{\frac{w(\Delta)}{4h(\Delta)}}e^{2E(Kd)-2E(M_0 d/4)}$$

untuk $\lambda \equiv 7\ (mod\ 8)$, berlaku

$$k(\lambda) = 2^{-2}e^{4(E(M_o d/4)-E(M_2 4d))}$$

dan nilai integral eliptik lengkap pertama $K[\sqrt{\lambda}]$ adalah

$$2^{-\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}\lambda^{-\frac{1}{2}}\prod_{p|f} p^{\frac{c_p(\Delta,f)}{2}}\left(\prod_{n=1}^{|\Delta|}\Gamma\left(\frac{m}{|\Delta|}\right)^{\left(\frac{\Delta}{m}\right)}\right)^{\frac{w(\Delta)}{4h(\Delta)}}e^{2E(Kd)-2E(M_0 d/4)}$$

PEMBAHASAN

3.1 INTEGRAL ELIPTIK

Definisi 3.1.1 *Jika $R(x,y)$ adalah suatu fungsi rasional dari x dan y, dimana y^2 adalah polinomial pangkat dua atau empat dalam x, bentuk integral*

$$\int R(x,y)dx$$

disebut integral eliptik.

Definisi 3.1.2 *Diketahui $k \in \mathbb{R}$ dengan $0 < k < 1$. Integral eliptik lengkap pertama $K(k)$ didefinisikan sebagai*

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} .$$

bilangan k disebut modulus dari integral eliptik dan θ disebut amplitudo integral eliptik .

3.2 EVALUASI INTEGRAL ELIPTIK

Pada bagian ini penulis akan memaparkan cara mengevaluasi nilai integral eliptik lengkap pertama $K[\sqrt{17}]$ dengan menggunakan Definisi yang sudah ada pada sub bab dalam kajian teori. $\lambda = 17$, $d = -4\lambda = -68$, $\Delta = d = -68$, dan $f = 1$.

Grup dari $H(-68)$ yang memenuhi definite positif, primitive, kuadratik biner dari diskriminan -68 di bawah komposisi grup modular adalah

$$\{I, A, A^2, A^3\}, \quad A^4 = I$$

dengan

$I = [1,0,17]$, $A = [3,-2,6]$,
$A^2 = [2,2,9]$, $A^3 = [3,2,6]$.

Lemma 3.2.1 *Misalkan p prima $\neq 2, 17$*

(i). Jika $\left(\frac{-1}{p}\right) = \left(\frac{17}{p}\right) = 1$ dan $p = x^2 + 17y^2$ untuk suatu bilangan bulat x dan y maka

$$pC_K = PQRS,$$
$$N(P) = N(Q) = N(R) = N(S) = p,$$

dengan P, Q, R, S adalah ideal prima berbeda dari C_K.

(ii). Jika $\left(\frac{-1}{p}\right) = \left(\frac{17}{p}\right) = 1$ dan $p = 2x^2 + 2xy + +9y^2$ untuk suatu bilangan bulat x dan y maka

$$pC_K = PQ$$
$$N(P) = N(Q) = p^2,$$

dengan P, Q adalah ideal prima berbeda dari C_K.

(iii). Jika $\left(\frac{-1}{p}\right) = -1$, $\left(\frac{17}{p}\right) = 1$ maka

$$pC_K = PQ,\ N(P) = N(Q) = p^2,$$

dengan P, Q adalah ideal prima berbeda dari C_K.

(iv). Jika $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$, $\left(\frac{17}{p}\right) = -1$ maka

$$pC_K = PQR$$
$$N(P) = N(Q) = p$$
$$N(R) = p^2$$

dengan P, Q, R adalah ideal prima berbeda dari C_K.

(v). Jika $\left(\frac{-1}{p}\right) = \left(\frac{17}{p}\right) = -1$ maka

$$pC_K = P,\ N(P) = p^4$$

dengan P adalah ideal prima dari C_K.

(vi). $2C_K = P^2, N(P) = 2^2$, P adalah ideal prima.

(vii). $17C_K = PQR^2, N(P) = N(Q) = N(R) = 17$ dengan P, Q, R adalah ideal prima berbeda dari C_K.

Lemma 3.2.2 *Jika p prima untuk suatu bilangan bulat x dan y dengan $\left(\frac{-68}{p}\right) = -1$, maka*

(i). $K_p = I \Leftrightarrow p = x^2 + 17y^2$

(ii). $K_p = A^2 \Leftrightarrow p = 2x^2 + 2xy + 9y^2$

(iii). $K_p = A = A^3 \Leftrightarrow p = 3x^2 \pm 2xy + 6y^2$

Bukti. Menggunakan Definisi 2.1.4, dan Lemma 3.2.1

Definisi 3.2.1 *Untuk $s > 1$ dan $\varepsilon, \eta \in \{-1, +1\}$ didefinisikan*

$$A_{\varepsilon\eta}(s) = \prod_{\substack{p \neq 2, 17 \\ \left(\frac{-1}{p}\right) = \varepsilon, \left(\frac{17}{p}\right) = \eta}} \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

dan

$$E_{\varepsilon\eta}(s) = \prod_{\substack{p \neq 2, 17 \\ \left(\frac{-1}{p}\right) = \varepsilon, \left(\frac{17}{p}\right) = \eta}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

selanjutnya hanya akan dituliskan $A_{+1+1}(s)$, $A_{+1-1}(s)$, ... berurutan dengan $A_{++}(s)$, $A_{+-}(s)$, ...

Lemma 3.2.3 Untuk $s > 1$ maka

$$A_{\varepsilon\eta}(s) = \frac{E_{\varepsilon\eta}(2s)}{E_{\varepsilon\eta}(s)} \quad \text{dengan } \varepsilon, \eta \in \{-1, +1\}$$

$$A'_{++} = \frac{E'_{++}(2s)}{E'_{++}(s)},$$

dan

$$A''_{++} = \frac{E''_{++}(2s)}{E''_{++}(s)}$$

Bukti Menggunakan definisi himpunan A pada Definisi 3.2.1

Definisi 3.2.2 *Untuk $s > 1$ fungsi Riemann Zeta didefinisikan sebagai*

$$\varsigma(s) = \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

Definisi 3.2.3 *Misalkan p prima. Jika D adalah bilangan bulat dengan $D \equiv 0$ atau $1 \pmod 4$ dan $\left(\frac{D}{p}\right)$, untuk $s > 1$ deret L-Dirichlet yang dinotasikan dengan L didefinisikan*

$$L(s, D) = \prod_p \left(1 - \frac{\left(\frac{D}{p}\right)}{p^s}\right)^{-1} \text{ untuk } s > 0$$

Lemma 3.2.4 *Untuk $s > 1$, maka*

(i). $\varsigma(s) = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)^{-1}\left(1 - \frac{1}{17^s}\right)^{-1} B_{-}(s) E_{-+}(s) E_{+-}(s) E_{++}(s)$

(ii). $L(s, -4) = \left(1 - \frac{1}{17^s}\right)^{-1} \frac{E_{--}(2s) E_{-+}(2s)}{E_{--}(s) E_{-+}(s)} E_{-+}(s) E_{++}(s)$

(iii). $L(s, 17) = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)^{-1} \frac{E_{--}(2s)}{E_{--}(s)} E_{-+}(s) \frac{E_{+-}(2s)}{E_{+-}(s)} E_{++}(s)$

(iv). $L(s, -68) = B_{-}(s) \frac{E_{-+}(2s)}{E_{-+}(s)} \frac{E_{+-}(2s)}{E_{+-}(s)} E_{++}(s)$

Bukti (i). Dengan menggunakan Definisi 3.2.2 dan mengalikannya dengan $\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\left(1 - \frac{1}{17^s}\right)$ serta menyubstitusikan pada Definisi 3.2.1

(ii). Menggunakan Definisi 3.2.3 dan Definisi 3.2.1

(iii). Menggunakan Definisi 3.2.3 dan Definisi 3.2.1

(iv). Menggunakan Definisi 3.2.1 dan Definisi 3.2.3

Lemma 3.2.5 *Untuk $s > 1$, maka*

(i). $B_{-}(s)^4 = L(s, -4)^{-1} L(s, 17)^{-1} L(s, -68) E_{--}(2s)^2 \varsigma(s)$

(ii). $E_{-+}(s)^4 = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)^2 L(s, -4)^{-1} L(s, 17) L(s, -68)^{-1} E_{-+}(2s)^2 \varsigma(s)$

(iii). $E_{+-}(s)^4 = \left(1 - \frac{1}{17^s}\right)^2 L(s, -4) L(s, 17)^{-1} L(s, -68)^{-1} E_{+-}(2s)^2 \varsigma(s)$

(iv). $E_{++}(s)^4 = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{17^s}\right)^2 L(s, -4) L(s, 17) L(s, -68) E_{--}(2s)^{-2} E_{-+}(2s)^{-2} E_{+-}(2s)^{-2} \varsigma(s)$

Bukti Menggunakan Lemma 3.2.4.

Lemma 3.2.6 *Untuk* $s > 1$ *berlaku*

$$\zeta_K(s) = \left(1-\frac{1}{2^{2s}}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{17}\right)^{-3} E_{--}(4s)$$
$$E_{-+}(2s)^2 E_{+-}(2s) E''_{++}(2s)^2 E_{+-}(s)^2 E'_{++}(s)^4$$

Bukti. Berdasarkan Definisi 3.2.2, perkalian suku di bawah semua ideal prima p, ada 7 kemungkinan. Lalu menggunakan Lemma 3.2.1 kemudian dengan mengalikan semua kemungkinan tersebut secara bersama-sama.

Lemma 3.2.7 *Untuk* $s > 1$ *berlaku*

(i). $E'_{++}(s)^8 = \left(1-\frac{1}{2^s}\right)^2\left(1+\frac{1}{2^s}\right)^2\left(1-\frac{1}{17^s}\right)^4$
$L(s,-4)^{-1}L(s,17)L(s,-68)E_{--}(4s)^{-2}$
$E_{-+}(2s)^{-4}E''_{++}(2s)^{-4}\zeta_K(s)^2\zeta(s)^{-1}$

(ii). $E''_{++}(s)^8 = \left(1-\frac{1}{2^s}\right)^2\left(1+\frac{1}{2^s}\right)^{-2}L(s,-4)^3$
$L(s,17)L(s,-68)E_{--}(4s)^2E_{--}(2s)^{-4}$
$E''_{++}(2s)^4\zeta_K(s)^{-2}\zeta(s)^3$

Bukti. (i). Dengan menggunakan Lemma 3.2.6. dan Lemma 3.2.5 bagian (iii)
(ii).Menggunakan Definisi 2.4.2, Teorema 2.1.1, Definisi 3.2.1, Lemma 3.2.5(iv) dan Lemma 3.2.6. serta Lemma 3.2.5(iii).

Lemma 3.2.8

(i). $E_{--}(2)E_{-+}(2)E_{+-}(2)E_{++}(2) = \frac{3\zeta\pi^2}{289}$

(ii). $t_1(-68) = \frac{289}{3\zeta\pi^2}E_{-+}(2)E_{+-}(2)$

Bukti.(i). Menggunakan Lemma 3.2.4 bagian (i) dan fungsi Riemann Zeta (Kenneth, 1999:182)
(ii). Menggunakan Definisi 2.1.13 dan Definisi 3.2.1 serta Lemma 3.2.8 (i)

Lemma 3.2.9

$$\lim_{s\to 1^+}\left(\frac{\zeta_K(s)}{\zeta(s)}\right) = \frac{\pi^2}{4\sqrt{17}}\log_{10}\left(\frac{1+\sqrt{2+2\sqrt{17}}+\sqrt{17}}{4}\right)$$

Bukti. Dengan menggunakan sifat $\lim_{s\to 1^+}(s-1)\zeta(s) = 1$ (Siegel, 1961:53), Definisi 3.2.2 (regulator) dan sifat limit.

Lemma 3.2.10 (i). $L(1,-4) = \frac{\pi}{4}$

(ii). $L(1,17) = \frac{2}{17}\log(4+\sqrt{17})$

(iii). $L(1,-68) = \frac{2\pi}{\sqrt{17}}$

Bukti. Bentuk bilangan dari deret Dirichlet untuk suatu lapangan kuadratik $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ dari diskriminan d diberikan oleh:

$$L(1,d) = \begin{cases} \dfrac{2h(d)\log\eta(d)}{\sqrt{d}}, & jika\, d > 0 \\ \dfrac{2\pi h(d)}{w(d)\sqrt{|d|}}, & jika\, d < 0 \end{cases}$$

dengan

$h(d)$ adalah class number dari $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$

$\eta(d)$ adalah fundamental unit dari $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$

$$w(d) = \begin{cases} 2, & d < -4 \\ 4, & d = -4 \\ 6, & d = -4 \\ -3, & d < 0 \end{cases}$$

Sehingga, $h(-4) = 1$, $h(17) = 1$, $h(-68) = 4$ dan berdasarkan tabel fundamental unit didapatkan $\eta(17) = 4+\sqrt{17}$.

$$L(1,-4) = \frac{2\pi h(d)}{w(d)\sqrt{|d|}} = \frac{2\pi \cdot 1}{4\sqrt{|-4|}} = \frac{2\pi}{4\bullet 2} = \frac{\pi}{4} \quad \blacksquare$$

$$L(1,17) = \frac{2h(d)\log\eta(d)}{\sqrt{d}} = \frac{2\bullet 1\bullet\log(4+\sqrt{17})}{\sqrt{17}} = \frac{2}{\sqrt{17}}\log(4+\sqrt{17}) \quad \blacksquare$$

$$L(1,-68) = \frac{2\pi h(d)}{w(d)\sqrt{|d|}} = \frac{2\pi\bullet 4}{2\sqrt{|-68|}} = \frac{2\pi}{\sqrt{17}} \quad \blacksquare$$

Lemma 3.2.11

$$\lim_{s\to 1^+}\left(\frac{E_{--}(s)}{E_{++}(s)}\right)^2 = \frac{17\sqrt{17}E_{--}(s)^2E_{-+}(2)E_{+-}(2)}{4\pi\log(4+\sqrt{17})}$$

Bukti. Dari Lemma 3.2.5 dengan $s \to 1^+$ dan Lemma 3.2.10.

Lemma 3.2.12

$$\lim_{s\to 1^+}\left(\frac{E'_{++}(s)}{E''_{++}}\right)^2 = \frac{24\pi}{17\sqrt{17}}\log\left(\frac{1+\sqrt{2+2\sqrt{17}}+\sqrt{17}}{4}\right)$$
$$E_{--}(4)^{-1}E_{--}(2)E_{-+}(2)^{-1}E_{+-}(2)^{-1}E''_{++}(2)^{-2}$$

Bukti. Menggunakan Lemma 3.2.7 dan Lemma 3.2.9

Lemma 3.2.13

(i). $j(A,-68) = \dfrac{17\sqrt{17}E_{-+}(2)E_{+-}(2)}{24\pi\log\left(\frac{1+\sqrt{2+2\sqrt{17}}+\sqrt{17}}{4}\right)}$

(ii). $j(A^2,-68) = \dfrac{17\sqrt{17}E_{-+}(2)E_{+-}(2)}{4\pi\log(4+\sqrt{17})}$

Bukti (ii). Menggunakan Akibat 2.1.2 dan Lemma 3.2.3 serta Lemma 3.2.11
(i). Menggunakan Definisi 2.1.12 dan Akibat 2.1.1 serta dengan menerapkan Lemma 3.2.12.

Lemma 3.2.14

$$E(I,-68) = \frac{1}{4}\log\left(\frac{1+\sqrt{2+2\sqrt{17}}+\sqrt{17}}{4}\right) + \frac{1}{16}\log(4+\sqrt{17})$$

$$E(A^2, -68) = -\frac{1}{4}\log\left(\frac{1+\sqrt{2+2\sqrt{17}}+\sqrt{17}}{4}\right) + \frac{1}{16}\log(4+\sqrt{17})$$

Bukti. (i). Menggunakan Definisi 2.1.13 dan Lemma 3.2.10 (ii). untuk $r = 2$, serta menggunakan Lemma 3.2.13 untuk $A^r \in K$ dengan $r = 0,1,2,3$

Teorema 2 *Nilai dari integral eliptik lengkap pertama pada moduli singular* $k = \sqrt{17}$ *dalam deret Fungsi Gamma adalah*

$$2^{-\frac{9}{2}} 17^{-\frac{1}{4}} \pi^{-\frac{1}{2}} (\sqrt{17}-4)^{\frac{1}{8}} \left[1+\sqrt{2+2\sqrt{17}}+\sqrt{17}\right]^{\frac{3}{2}} \left\{\prod_{n=1}^{68} \Gamma\left(\frac{m}{68}\right)^{\left(\frac{-68}{m}\right)}\right\}^{\frac{1}{8}}$$

Bukti. Menggunakan Teorema 2.6.1(b), Definisi 2.1.13, Definisi 2.1.6 dan Lemma 3.2.14

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan pada bab III, maka diperoleh kesimpulan bahwa nilai dari integral eliptik lengkap pertama pada moduli singular $k = \sqrt{17}$ adalah

$$2^{-\frac{9}{2}} 17^{-\frac{1}{4}} \pi^{-\frac{1}{2}} (\sqrt{17}-4)^{\frac{1}{8}} \left[1+\sqrt{2+2\sqrt{17}}+\sqrt{17}\right]^{\frac{3}{2}} \left\{\prod_{n=1}^{68} \Gamma\left(\frac{m}{68}\right)^{\left(\frac{-68}{m}\right)}\right\}^{\frac{1}{8}}$$

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Abramowitz M , Stegun I.A (1964) Handbook of Mathematical Function With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. Termuat pada http://people.math.sfu.ca/-cbm/aands/intro.htm#001 [diakses pada 03 Oktober 2012 pukul 00.06]

[2]. Muzaffar Habib, Williams Kenneth S (2006) Evaluation of Complete Elliptic Integrals of the First Kind at Singular Moduli. Termuat pada http://www.math.nthu.edu.tw/tjm [diakses pada 29 September 2012 pukul 17.07]

[3]. Williams S. Kenneth, Poorten van der Alfred (1999) Values of the Dedekind Eta Function at Quadratic Irrationalities. Termuat pada http://people.math.carleton.ca/~williams/papers/pdf/220.pdf [diakses pada 08 Oktober 2012 pukul 20.18]

[4]. Neukirch (1999) Termuat pada http://en.Wikipedia.org/wiki/Fundamental_unit_%28number_theory%29 [diakses pada 30 Maret 2013 pukul 21.32]

[5]. Siegel, C. L (1961) On Advanced Analytic Number Theory. Tata Institute of Fundamental Research : Mumbai, India.

[6]. Muzaffar Habib, Williams Kenneth S (2000) Evaluation of Weber's Function at Quadratics Irrationalities. Termuat pada http://www.math.nthu.edu.tw/tjm [diakses pada 2 Oktober 2012 pukul 18.07]

[7]. W.Narkiewicz (1990) Elementary and Analytical Theory of Algebraic Numbers. Berlin Heidelberg : Springer - Verlag, New York.