MATHunesa

Jurnal Ilmiah Matematika *Volume 7 No.1 Tahun 2019*

ISSN 2301-9115

BILANGAN FIBONACCI GRAF CEBONG

Anis Setyoningsih
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
E-mail : anissetyoningsih@mhs.unesa.ac.id
Dwi Juniati
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
E-mail : dwi_juniati@yahoo.com

Abstrak

Misalkan G adalah graf terhubung dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$, bilangan Fibonacci pada graf G adalah banyaknya himpunan independent $I(G)$, $i(G) = |I(G)|$ dengan $i(G)$ adalah bilangan Fibonacci pada graf G. Pada skripsi ini akan dibahas mengenai bilangan Fibonacci pada graf Lintasan P_n, graf Sikel C_k, dan graf Cebong. Bilangan Fibonacci pada graf Lintasan P_n adalah F_{n+2}, sedangkan bilangan Fibonacci pada graf Sikel C_k adalah L_n. Lebih lanjut akan dibahas mengenai sifat-sifat himpunan independent pada graf Cebong yang bersesuaian dengan bilangan Fibonacci pada graf Cebong, adapun graf Cebong merupakan graf hasil gabungan dari graf lintasan dan graf sikel. Dalam pembahasan ini akan dibahas sifst dari himpunan independen pada graf Cebong terhadap bilangan Fibonacci.

Kata kunci: Bilangan Fibonacci, himpunan Independen, dan graf cebong.

Abstract

If G is a connected graph with vertex set $V(G)$ and edge $E(G)$, fibonacci number of graph G is union of independent set $I(G)$, $i(G) = |I(G)|$, with $i(G)$ is defined by Fibonacci number of a graph G. In this thesis, will be discussed about Fibonacci number of path graph P_n, cycle graph C_k, and Tadpole graph. Fibonacci number of path graph P_n defined by F_{n+2}, while fibonacci number of cycle graph C_k defined by L_n. Furthermore, will be discussed about properties in independent set of tadpole graph which is corresponding to fibonacci number of Tadpole graph, tadpole graph is union of path graph and sikel graph. In this discussion will be discussed about properties of independent graph to fibonacci number.

Keywords : Fibonacci number, independent set, dan tadpole graph

1. PENDAHULUAN

Teori graf pertama kali dikenalkan tahun 1736, teori graf adalah satu dari banyak pembahasan dalam ilmu matematika yang masih berkembang pesat. Pada teori graf, graf digunakan sebagai representasi hubungan objek diskrit dan hubungan Antara objek tersebut.

Pada tahun 1982, matematikawan bernama Prodiger pertama kali melakukan penenlitihan terkait dengan bilangan Fibonacci graf. Prodiger menuliskan bahwa Bilangan Fibonacci pada G adalah $i(G) = |I(G)|$, dengan $I(G)$ adalah himpunan independent graf. Prodiger juga mendefinisikan bilangan Fionacci graf lintasan dan graf sikel. Pada graf lintasan P_n bilangan Fibonacci pada graf lintasan adalah F , simbol ini digunakan untuk merpesentasikan $i(P_n) = |I(P_n)|$, sedangkan pada graf sikel C_k bilangan Fibonacci direpresentasikan dalam barisan Lucas L_n, dengan $i(C_k) = |I(C_k)|$.

Graf cebong $T_{k,n}$ merupakan graf yang dibentuk dengan menggabungkan graf sikel C_k dan graf lintasan P_n dengan sebuah jembatan graf. Pada tahun 2014, DeMaio mendefinisikan bilangan Fibonacci graf cebong yaitu $i(T_{k,n}) = |I(T_{k,n})|$.

2. KAJIAN TEORI

A. Graf

Definisi 2.1: Graf G ialah pasangan terurut dua himpunan, yaitu himpunan tak kosong yang objeknya disebut titik di $V(G)$ .dan himpunan berhingga mungkin kosong yang elemennya disebut sisi $E(G)$.

(Budayasa,2007

B. Lintasan

Definisi 2.2: Misalkan $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k)$ sebuah jalan di G. Jika semua titik internal P berbeda, maka P disebut lintasan.

(Budayasa,2007)

C. Sikel

Definisi 2.3: Misalkan graf G memiliki jejak $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_{k-1}, v_{k-1}, \ldots, e_k, v_k)$ adalah sebuah jejak tertutup *(closed trail)* di G, maka W disebut sikel jika titik awal dan semua titik internalnya berbeda.

(Budayasa, 2007)

D. Graf Bagian

Definisi 2.5: Sebuah graf H disebut graf bagian graf F, ditulis $H \subset F$, apabila $V(H) \subset V(F)$, $E(H) \subset E(F)$.

(Budayasa, 2007)

E. Isomorfisme

Definisi 2.6: Dua graf P dan Q dikatakan isomorfik, dilambangkan $P \cong Q$, jika terdapat korespondensi satu – satu antara himpunan titik P dan himpunan titik Q, sedemikian sehingga dua titik di P berhubungan langsung jika dan hanya jika petanya juga berhubungan langsung di Q.

(Budayasa, 2007)

F. Dua Titik Berhubungan Langsung *(Incident)*

Definisi 2.7: Misalkan u dan v adalah dua titik di graf G dan $e = (u, v)$ merupakan sisi di G. titik u dan titik v disebut berhubungan langsung karena terdapat sisi e yang terkait dengan u dan v dan menghubungkan u dan v.

(Budayasa, 2017)

G. Graf Sikel

Definisi 2.8: Graf sikel adalah graf terhubung yang memiliki tepat satu sikel. Graf sikel dengan n titik dinotasikan dengan C_k, dengan $k \geq 3$.

(Movarraeni dan Boxwala, 2015)

H. Graf Lintasan

Definisi 2.9: Graf lintasan dengan k titik dinotasikan dengan P_n adalah graf yang memiliki tepat satu lintasan, dengan $n \geq 0$.

(Movarraeni dan Boxwala, 2015)

I. Jembatan Graf

Definisi 2.11: Misalkan G graf terhubung. Sisi $e \in E(G)$ merupakan sisi pada graf G yang apabila sisi tersebut dihilangkan, maka G menjadi graf tidak terhubung. Sisi $G - \{e\}$ merupakan jembatan graf G.

(Harris, 2008)

J. Graf Cebong *(Tadpole)*

Definisi 2.12: Graf cebong yang dilambangkan dengan $T_{k,n}$ merupakan graf yang dibentuk dengan menggabungkan graf sikel C_k dan graf lintasan P_n, dengan menambahkan sebuah jembatan graf yang menghubungkan graf sikel dan graf lintasan.

(Aruldoss,2016)

K. Barisan Bilangan Fibonacci

Definisi 2.13: Barisan bilangan Fibonacci F_n didefinisikan sebagai barisan rekursif dimana suku ke-n barisan merupakan hasil penjumlahan dua suku sebelumnya, dengan pengecualian dua bilangan pertama yaitu $F_0 = 0$ dan $F_1 = 1$. Sedangkan bentuk umum barisan Fibonacci:

$$F_0 = 0 \text{ dan } F_1 = 1$$
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \ n \geq 2.$$

(Luma, 2010)

L. Barisan Bilangan Lucas

Definisi 2.14: Barisan Lucas L_n didefinisikan sebagai barisan rekursif dimana suku ke-$n$barisan merupakan hasil penjumlahan dua suku sebelumnya, dengan pengecualian dua bilangan pertama yaitu $L_0 = 2$ dan $L_1 = 1$. Sedangkan bentuk umum barisan Lucas:

$$L_0 = 2 \text{ dan } L_1 = 1$$
$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \ n \geq 2.$$

(Luma, 2010)

M. Penjodohan

Definisi 2.16: Misalkan G graf. Penjodohan pada G adalah himpunan sisi yang saling lepas *(Independemt)*. Dua sisi dikatakan saling lepas jika kedua sisi tersebut tidak mempunyai titik ujung persekutuan. Perjodohan pada G dilambangkan dengan M.

(Budayasa, 2007)

3. PEMBAHASAN

A. Bilangan Fibonacci Graf

Definisi 3.1: Misalkan G graf. Himpunan independen di G merupakan himpunan titik-titik pada G dimana tidak ada dua titik yang berhubungan langsung. Koleksi semua himpunan independen G dilambangkan dengan $I(G)$ (Kitaev,2006).

(Kitaev,2006)

Teorema 3.1

Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari koleksi semua himpunan independent, atau secara simbolik dapat dituliskan sebagai: $\emptyset \subset I(G)$.

Bukti:

Akan dibuktikan: $\emptyset \subset I(G)$, dengan $I(G)$ adalah koleksi semua himpunan independent pada graf G tidak kosong.

Karena $I(G)$ merupakan himpunan tidak kosong, terdapat paling sedikit satu, yaitu x. Maka $x \in I(G)$

Andaikan $\emptyset \not\subset I(G)$

Karena $\emptyset \not\subset I(G)$, berarti $\exists x$, dengan $x \in \emptyset$ dan $x \notin I(G)$.

Hal ini kontradiksi dengan definisi himpunan kosong yang tidak memiliki anggota. Karena terjadi kontradiksi, maka pengandaian salah, yang benar adalah: $\emptyset \subset I(G)$.

Definisi 3.2: Misalkan G adalah graf. Bilangan Fibonacci G adalah $i(G) = |I(G)|$.

(Prodinger dan Ticky, 1982)

Definisi 3.3: Himpunan independen pada graf lintasan, dan graf sikel dapat direpresentasikan dalam biner 0 dan 1, cara ini digunakan untuk melihat pola himpunan independen graf tersebut. Himpunan independen dilambangkan dengan S_b.

Contoh 3.1:
Akan ditunjukkan himpunan independen dalam bentuk biner graf lintasan P_3.
Karena P_3 merupakan graf lintasan dengan 3 titik dan himpunan independen P_3 adalah $I\ (P_3) = \{\emptyset,\ \ \{p_1\}, \{p_2\},\ \{p_3\},\ \{p_1, p_3\}\}$ maka setiap himpunan independen yang dibentuk akan sepanjang 3, bentuk binernya addalah:

$*)\quad \emptyset = 000$	$*)\quad \{p_1\} = 100$
$*)\quad \{p_2\} = 010$	$*)\quad \{p_3\} = 001$
$*)\quad \{p_1, p_3\} = 101$	

Jadi, bentuk biner koleksi semua himpunan independen P_3 adalah $S_b\ (P_3) = \{000, 100, 010, 001, 101\}$.

Teorema 3.1:
Bilangan Fibonacci dari graf P_n adalah F_{n+2} , untuk $n \geq 0$.
(DeMaio dan Jacobson, 2014)

Bukti:

- Untuk $n = 0$, maka:
  - $i(P_0) = F_2$
  - $I(P_0) = \{\emptyset\}, S_b = \{0\}$, dan $i(P_0) = 1$
  - $i(P_0) = F_2$
    $i(P_0) = 1$
    $F_2 = 1$

  Jadi, $i(P_0) = F_2$
- Asumsikan benar untuk $n = k$
  $i(P_k) = F_{k+2}$
  $\quad = F_{k+1} + F_k$
- Akan dibuktikan untuk $n = k + 1$
  $i(P_{k+1}) = F_{(k+1)+2}$
  $\quad = F_{k+2} + F_{k+1}$

  Bukti :
  Ambil $x \in S_b(P_n)$
  Maka x merupakan barisan 0 dan 1 dimana tidak ada bilangan 1 yang muncul berurutan (11). Berdasarkan bilangan akhir x, maka $S_b(P_n)$ dapat dipartisi menjadi 2 himpunaan, yaitu S_0 himpunan yang berakhir dengan 0 dan S_1 himpunan yang berakhir dengan 1. $S_b(P_n) = S_0$ dan S_1.
  - Akan ditunjukkan $\circ\ (S_0\ ) = i(S_b(P_{n-1}))$.
    Untuk setiap $x \in S_0$, maka berakhir dengan 0, sehingga x' yang diperoleh dari x dengan menghilangkan akhiran 0 akan menjadi elemen $S_b(P_{n-1})$. Sementara itu setiap elemen dari $S_b(P_{n-1})$ jika ditambah dibelakang 0 akan menjadi anggota $S_b(P_n)$ dengan barisan berakhiran 0 yaitu S_0. Jadi $\circ\ (S_0\ ) = i\ (S_b(P_{n-1}))$.
  - Akan ditunjukkan $\circ\ (S_1\ ) = i(S_b(P_{n-2}))$.
    Untuk setiap $x \in S_1$, maka berakhir dengan 01, sehingga x' yang diperoleh dari x dengan menghilangkan akhiran 01 akan menjadi elemen $S_b(P_{n-2})$. Sementara itu setiap elemen dari $S_b(P_{n-2})$ jika ditambah dibelakang 01 akan menjadi anggota $S_b(P_n)$ dengan barisan berakhiran 1 yaitu S_1 . Jadi $\circ\ (S_1\ ) = i\ (S_b(P_{n-2}))$.

  Jadi, $i(P_{k+1}) = F_{k+3}$ ∎

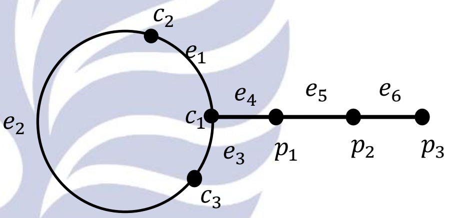
Teorema 3.2:
Bilangan Fibonacci dari graf C_n adalah L_n , untuk $n \geq 3$
(Prodinger dan Ticky, 1982)

B. Bilangan Fibonacci Graf Cebong

Berikut akan ditunjukkan dan dibuktikan menggenai sifat-sifat bilangan Fibonacci graf cebong.

Definisi 3.4: Misalkan $T_{n,k}$ graf cebong. Bilangan Fibonacci $T_{n,k}$ adalah $i(T_{n,k}) = |I(T_{n,k})|$.
(Prodinger dan Ticky, 1982)

Contoh 3.2:
Akan ditunjukkan bilangan Fibonacci graf cebong:



Gambar 3.1 Graf Cebong $T_{3,3}$

$$I(T_{3,3}) = \{\emptyset, \{c_1\}, \{c_2\}, \{c_3\}, \{p_1\}, l\{p_2\}, \{p_3\}, \{c_1, p_2\}, \{c_1, p_3\}, \{c_2, p_1\}, \{c_2, p_2\}, \{c_2, p_3\}, \{c_3, p_1\}\{c_3, p_2\}, \{c_3, p_3\}, \{p_1, p_3\}, \{c_2, p_1, p_3\}, \{c_3, p_1, p_3\}\}$$

Himpunan independent $I(T_{3,3}) = 18$ dan $i(T_{3,3}) = 18$.

Berikut merupakan simbol-simbol dan pengertiannya yang akan digunakan pada teorema-teorema:

- $T_{n,k}$ = Graf cebong yang merupakan gabungan graf sikel C_n dan graf lintasan P_k.
- $i(T_{n,k})$ = Bilangan Fibonacci graf cebong.
- F_n = Barisan Fibonacci.
- L_n = Barisan Lucas.
- $t_{n,k}$ = Elemen ke-n pada baris ke-k dalam segitiga cebong.
- $S_b(G)$ = Representasi himpunan independen dalam bentuk biner.

Teorema 3.3:
$i(T_{n,k}) = i(T_{n,k-1}) + i(T_{n,k-2})$, dengan $n \geq 3$ dan $k \geq 0$

(DeMaio dan Jacobson, 2014)

Bukti:
Ambil $x \in S_b(P_k)$
Maka x merupakan barisan 0 dan 1 dimana tidak ada bilangan 1 yang muncul berurutan (11). Berdasarkan bilangan akhir x, maka $S_b(P_k)$ dapat dipartisi menjadi 2 himpunaan, yaitu S_0 himpunan yang berakhir dengan 0 dan S_1 himpunan yang berakhir dengan 1. $S_b(P_k) = S_0$ dan S_1.

- Akan ditunjukkan $\circ (S_0) = i(S_b(P_{k-1}))$.
  Untuk setiap $x \in S_0$, maka berakhir dengan 0, sehingga x' yang diperoleh dari x dengan menghilangkan akhiran 0 akan menjadi elemen $S_b(P_{k-1})$. Sementara itu setiap elemen dari $S_b(P_{k-1})$ jika ditambah dibelakang 0 akan menjadi anggota $S_b(P_k)$ dengan barisan berakhiran 0 yaitu S_0. Jadi $\circ (S_0) = i(S_b(P_{k-1}))$.
- Akan ditunjukkan $\circ (S_1) = i(S_b(P_{k-2}))$.
  Untuk setiap $x \in S_1$, maka berakhir dengan 01, sehingga x' yang diperoleh dari x dengan menghilangkan akhiran 01 akan menjadi elemen $S_b(P_{k-2})$. Sementara itu setiap elemen dari $S_b(P_{k-2})$ jika ditambah dibelakang 01 akan menjadi anggota $S_b(P_k)$ dengan barisan berakhiran 1 yaitu S_1. Jadi $\circ (S_1) = i(S_b(P_{k-2}))$.

Jadi, $i(T_{n,k}) = i(T_{n,k-1}) + i(T_{n,k-2})$ ■

Teorema 3.4:
$i(T_{n,k}) = i(T_{n-1,k}) + i(T_{n-2,k})$, dengan $n \geq 3$ dan $k \geq 0$

(DeMaio dan Jacobson, 2014)

Definisi 3.3: Barisan bilangan Gibonacci G_n merupakan barisan rekursif yang didefinisikan deng an barisan bilangan bulat positif dengan $G_0 = a$ dan $G_1 = b$. Bentuk umum barisan bilangan Gibonacci adalah:

$$G_n = G_{n-1} + G_{n-2},\ n \geq 2.$$

(DeMario dan Jacobson, 2014)

Diketahui bahwa $T_{n,0}$ adalah graf sikel C_n dengan n titik dan graf lintasan P_k dengan 0 titik. Dengan menghitung banyak himpunan independen pada beberapa graf cebong, diketahui $i(T_{3,0}) = 4$, $i(T_{3,1}) = 7$, $i(T_{3,2}) = 11$ dan $i(T_{4,1}) = 12$. Selanjutnya, menggunakan formula bentuk umum barisan Gibonacci dapat dibentuk Tabel 3.1

Tabel 3.1 bilangan Fibonacci pada Graf Cebong

	n	0	1	2	3	4	5
k							
3		4	7	11	18	29	47
4		7	12	19	31	50	81
5		11	19	30	49	79	128
6		18	31	49	80	129	209
7		29	50	79	129	208	337
8		47	81	128	209	337	546
9		76	131	207	338	545	883
10		123	212	335	547	882	1429

Teorema 3.5:
$i(T_{n,k}) = L_{n+k} + F_{n-3}F_k$, dengan $n \geq 3$ dan $k \geq 0$

(DeMaio dan Jacobson, 2014)

Bukti:
Dengan induksi matematika

- Untuk $k = 0$, maka :
  $$\begin{aligned} i(T_{n,0}) &= L_{n+0} + F_{n-3}F_0 \\ &= L_n \end{aligned}$$
- Asumsikan benar untuk $k = m$
  $$i(T_{n,m}) = L_{n+m} + F_{n-3}F_m$$
- Akan dibuktikan untuk $k = m + 1$, maka:
  $$\begin{aligned} i(T_{n,m+1}) &= i(T_{n,m}) + i(T_{n,m-1}) \\ &= L_{n+m} + F_{n-3}F_m + L_{n+(m-1)} \\ &\quad + F_{n-3}F_{n-1} \\ &= L_{n+m} + F_{n-3}F_m + L_{n+m-1} \\ &\quad + F_{n-3}F_{m-1} \\ &= L_{n+m} + L_{n+m-1} + F_{n-3}F_m \\ &\quad + F_{n-3}F_{m-1} \\ &= L_{n+m+1} + F_{n-3}F_{m+1} \ ■ \end{aligned}$$

C. Segitiga Cebong

Akan dibentuk sebuah segitiga cebong yang nilai-nilai dalam segitiga ini diperoleh pada Tabel 3.1 dimana (k,n) dengan $k \geq 3$ dan $n \geq 0$.
Nilai n bertambah satu dan nilai k berkurang satu pada setiap elemen dalam satu baris. Hal ini berlaku untuk setiap baris segitiga tersebut. Simbol $t_{n,k}$ lambang elemen ke-n pada baris ke-k dalam segitiga cebong. Nilai dari $t_{n,k} = i(T_{n-k,k})$.

Gambar 3.1 Segitiga Bilangan Fibonacci Graf Cebong

4
7 7
11 12 11
18 19 19 18
29 31 30 31 29
47 50 49 49 50 47
76 81 79 80 79 81 76

Teorema 3.6

$t_{n,k} = t_{n,n-k-3}$, dengan $n \geq 3$ dan $k \geq 0$

(DeMaio dan Jacobson, 2014)

Bukti:

Diketahui $i(T_{n,k}) = L_{n+k} + F_{n-3}F_k$ Berdasarkan Teorema 3.5. Diperoleh $i(T_{n-k,k}) = L_n + F_{n-k-3}F_k$. Maka:

$$\begin{aligned} t_{n,k} &= t_{n,n-k-3} \\ &= i(T_{n-(n-k-3),n-k-3}) \\ &= i(T_{k+3,n-k-3}) \\ &= L_{k+3+(n-k-3)} + F_{(k+3)-3}F_{n-k-3} \\ &= L_n + F_kF_{n-k-3} \\ &= i(T_{n-k,k}) \\ &= t_{n,k} \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 3.7

$(-1)^k F_{n-2k-4} = t_{n,k+1} - t_{n,k}$, $0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor$

(DeMaio dan Jacobson, 2014)

Bukti:

Diketahui $i(T_{n-k,k}) = L_n + F_{n-k-3}F_k$. Berdasarkan Teorema 3.5. Maka:

$$\begin{aligned} (-1)^k F_{n-2k-4} &= t_{n,k+1} - t_{n,k} \\ &= L_n + F_{n-(k+1)-3}F_{k+1} - (L_n + F_{n-k-3}F_k) \\ &= L_n + F_{n-k-4}F_{k+1} - L_n - F_{n-k-3}F_k \\ &= F_{n-k-4}F_{k+1} - F_{n-k-3}F_k \end{aligned}$$

Menurut identitas d'Ocagne's (Keskin, 2014) barisan bilangan Fibonacci $F_mF_{n+1} - F_nF_{m+1} = (-1)^n F_{m-n}$

Maka, $F_{n-k-4}F_{k+1} - F_{n-k-3}F_k$ dapat dibentuk dalam identitas d'Ocagne's, dengan:

$n = k, \quad m = n - k - 4$

Jadi, $(-1)^k F_{n-k-4-k} = F_{n-k-4}F_{k+1} - F_{n-k-3}F_k$

$(-1)^k F_{n-2k-4} = F_{n-k-4}F_{k+1} - F_{n-k-3}F_k \blacksquare$

Teorema 3.8

Jika $\sum_{k=0}^{n-3}(-1)^k t_{n,k}$ merupakan jumlah bilangan baris segitiga cebol, maka untuk mencari elemen ke-n pada baris ke-k meenggunakan:

$$\sum_{k=0}^{n-3}(-1)^k t_{n,k} = \begin{cases} 0, untuk\ n\ genap \\ 2F_n, untuk\ n\ ganjil \end{cases}$$

(DeMaio dan Jacobson, 2014)

- Misalkan $\sum_{k=0}^{n-3}(-1)^k t_{n,k} = 2F_n$, dengan menggunakan induksi matematika, maka:
  - Untuk $n = 3$, maka :

    $\sum_{k=0}^{0}(-1)^k t_{3,k} = 2F_3$

    $(-1)^0 t_{3,0} = t_{3,0}$

    $t_{3,0} = L_3 + F_0F_0$

    $t_{3,0} = L_3 = 4 = 2F_3$

    $t_{3,0} = L_3 = 4 = 2F_3$
  - Asumsikan un$n = m$ benar, maka:

    $\sum_{k=0}^{m-3}(-1)^k t_{m,k} = 2F_m$
  - Akan dibuktikan untuk $n = m + 2$, maka:

    $$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{(m+2)-3}(-1)^k t_{m+2,k} &= 2F_{(m+2)} \\ \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k t_{m+2,k} &= 2F_{(m+2)} \\ \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k t_{m+2,k} &= \left(\sum_{k=0}^{m-3}(-1)^k t_{m+2,k}\right) + (-1)^2 t_{m+2,m-2} + (-1)^1 t_{m+2,m-1} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{m-3}(-1)^k t_{m+2,k}\right) - (L_{m+2} + F_{m-2}) + (L_{m+2}) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{m-3}(-1)^k [t_{m,k} + t_{m+1,k}]\right) - F_{m-2} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{m-3}(-1)^k t_{m,k} + (-1)^k t_{m+1,k}\right) - F_{m-2} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{m-3}(-1)^k t_{m,k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{m-2}(-1)^k t_{m+1,k}\right) - t_{m+1,m-2} - F_{m-2}) \\ &= 2F_m + \left(\sum_{k=0}^{m-2}(-1)^k t_{m+1,k}\right) - t_{m+1,m-2} - F_{m-2} \\ &= 2F_m + 0 - t_{m+1,m-2} - F_{m-2} \\ &= 2F_m + L_{m+1} - F_{m-2} \\ &= 2F_m + (F_m + F_{m+2}) - F_{m-2} \\ &= 2F_m + F_{m-1} + F_{m-2} + F_{m+2} - F_{m-2} \\ &= 2F_m + F_{m-1} + F_{m+2} \\ &= F_m + F_{m+1} + F_{m+2} \\ &= F_{m+2} + F_{m+2} = 2F_m \blacksquare \end{aligned}$$

- Misalkan $\sum_{k=0}^{n-3}(-1)^k t_{n,k} = 0$.Diketahui $i(T_{n-k,k}) = L_n + F_{n-k-3}F_k$. Berdasarkan Teorema 3.5. Maka: misal $n = 2k$ genap, maka:

  $\sum_{k=0}^{2k-3}(-1)^k t_{n,k} = (-1)^0 t_{2k,0} + (-1)^1 t_{2k,1} + (-1)^2 t_{2k,2} + \ldots + (-1)^{2k-5} t_{2k,2k-5} + (-1)^{2k-4} t_{2k,2k-4} + (-1)^{2k-3} t_{2k,2k-3}$

1. Akan ditunjukkan bahwa jumlah $(-1)^0 t_{2k,0} + (-1)^{2k-3} t_{2n,2k-3} = 0$

   (*). $(-1)^0 t_{2k,0} = L_{2k} + F_{2k-0-3}F_0$
   $= L_{2k} + F_{2k-3}F_0$

   (**).$(-1)^{2k-3} t_{2k,2k-3} = L_{2k} + F_{2k-(2k-3)-3}F_{2k-3}$
   $= L_{2k} + F_{2k-(2k-3)-3}F_{2k-3}$

   Dari (*) dan (**) dapat dilihat bahwa jumlah $(-1)^0 t_{2k,0} + (-1)^{2k-3} t_{2n,2k-3} = 0$.
2. Akan ditunjukkan bahwa jumlah $(-1)^2 t_{2k,2} + (-1)^{2k-5} t_{2n,2k-5} = 0$

   (*). $(-1)^2 t_{2k,2} = L_{2k} + F_{2k-2-3}F_2$
   $= L_{2k} + F_{2k-5}F_2$

   (**).$(-1)^{2k-5} t_{2k,2k-5} = -(L_{2k} + F_{2k-(2k-5)-3}F_{2k-5})$
   $= -(L_{2k} + F_2F_{2k-5})$

Dari (*) dan (**) dapat dilihat bahwa jumlah $(-1)^2 t_{2k,2} + (-1)^{2k-5} t_{2n,2k-5} = 0$.

3. Akan ditunjukkan bahwa jumlah $(-1)^{15} t_{2k,15} + (-1)^{2k-18} t_{2k,2k-18} = 0$

(*). $(-1)^{15} t_{2k,15} = L_{2k} + F_{2k-(15)-3} F_{15}$

$= L_{2k} + F_{2k-5} F_2$

(**).$(-1)^{2k-18} t_{2k,2k-18} = L_{2k} + F_{2k-(2k-18)-3} F_{2k-18}$

$= L_{2k} + F_{15} F_{2k-18}$

Dari (*) dan (**) dapat dilihat bahwa jumlah $(-1)^{15} t_{2k,15} + (-1)^{2k-18} t_{2k,2k-18} = 0$.

Dari 1 sampai 3 dapat dilihat bahwa setiap bilangan pada $\sum_{k=0}^{n-3} (-1)^k t_{n,k}$ untuk n genap memiliki pasangan yang hasil jumlahnya 0, karena terdapat n pasangan pada $\sum_{k=0}^{n-3} (-1)^k t_{n,k}$, maka $\sum_{k=0}^{n-3} (-1)^k t_{n,k} = 0$ ■

Definisi 3.4: Rasio emas *(Golden Ratio)* $\varphi = 1{,}618$, adalah suatu nilai rasio yang konveren barisan bilangan Fibonacci.

(Tandino, 2016)

Lemma 3.1

Misalkan x_n perbandingan rasio Antara bilangan Fibonacci ke $-(n+1)$ dan ke $-n$, maka $x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$. Barisan (x_n)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$$

Bukti :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n}$$

$$= \frac{F_n}{F_n} + \frac{F_{n-1}}{F_n}$$

$$= 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}$$

$$= \lim_{x\to\infty}(1) + \lim_{x\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n}$$

$$= \lim_{x\to\infty}(1) + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}}$$

Misal $x = \lim_{x\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$

$$x = \lim_{x\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{x\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}$$

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

$$x^2 = x + 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$x = \varphi = 1{,}618$$ ■

Teorema 3.9

Rasio jumlah baris berurutan pada segitiga cebong, konvergen ke rasio emas φ.

(DeMaio dan Jacobson, 2014)

Bukti:

$$\sum_{k}^{n-3} t_{n,k} = \sum_{k}^{n-3} (L_n + F_{n-k-3} F_k)$$

$$= \sum_{k}^{n-3} L_n + \sum_{k}^{n-3} F_{n-k-3} F_k$$

$$= (n-2) L_n + \frac{(n-3)\, L_{n-3} - F_{n-3}}{5}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1-2)L_n + \frac{(n+1-3)\, L_{n+1-3} - F_{n+1-3}}{5}}{(n-2)L_n + \frac{(n-3)\, L_{n-3} - F_{n-3}}{5}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)L_{n+1} + \frac{(n-2)\, L_{n-2} - F_{n-2}}{5}}{(n-2)L_n + \frac{(n-3)\, L_{n-3} - F_{n-3}}{5}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{nL_{n+1} + nL_{n-2} - F_{n-2}}{nL_n + nL_{n-3} - F_{n-3}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+1} - L_{n-2}}{L_n - L_{n-3}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+1} + L_{n-2}}{L_n + L_{n-3}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{L_n}{L_{n-1}}$$

$$= \varphi$$ ■

D. Penjodohan sempurna

Definisi 3.5: Misalkan G graf. Titik v di G dikatakan tertutup oleh penjodohan M apabila titik v merupakan salah satu titik ujung dari suatu penjodohan, sehingga sisi pada M insiden dengan v. Jika titik v pada graf G tertutup oleh penjodohan M, maka titik v dikatakan $M-$ $saturated$ atau penjodohan M menutup v.

(Budayasa, 2007)

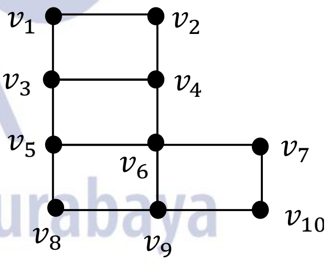
Definisi 3.6: Misalkan G adalah sebuah graf, sebuah penjodohan M di G dikatakan penjodohan sempurna jika M memuat semua titik G. Jika M penjodohan sempurna G maka setiap titik di G adalah $M - saturated$.

(Budayasa, 2007)

Definisi 3.7: Graf berbentuk L dengan lambang $L_{p,q}$ merupakan graf yang banyak titiknya adalah $2n$. Banyaknya persegi pada $L_{p,q}$ yaitu m, dengan $m = p + q + 1$.

(Gutman dan Cyvin, 1990)

Contoh 3.8:



Gambar 3.2 Graf $L_{1,2}$

Himpunan perjodohn sempurna pada $L_{1,2}$ adalah:

$\{\{v_3, v_4\}, \{v_1, v_2\}, \{v_5, v_8\}, \{v_6, v_7\}, \{v_9, v_{10}\}\}$
$\{\{v_8, v_9\}, \{v_1, v_2\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_6\}, \{v_7, v_{10}\}\}$
$\{\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}, \{v_5, v_6\}, \{v_7, v_{10}\}, \{v_8, v_9\}\}$
$\{\{v_1, v_2\}, \{v_5, v_8\}, \{v_3, v_4\}, \{v_7, v_{10}\}, \{v_6, v_9\}\}$
$\{\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\}, , \{v_8, v_9\}, \{v_7, v_{10}\}, \{v_5, v_6\}\}$
$\{\{v_5, v_8\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_7, v_6\}, \{v_9, v_{10}\}\}$
$\{\{v_1, v_3\}, \{v_5, v_8\}, \{v_6, v_9\}, \{v_2, v_4\}, \{v_7, v_{10}\}\}$

Pada $L_{1,2}$, terdapat 7 perjodohan sempurna.

Banyaknya perjodohan sempurna pada graf $L_{p,q} = F_{p+q+2} + F_{p+1}F_{q+1}$ (Gutman dan Cyvin, 1990). Banyaknya perjodohan sempurna pada graf $L_{p,q}$ bersesuaian dengan bilangan pada kolom segitiga tadpole. Niali perjodohan yang bersesuaian ini menunjukkan bahwa baris pada segitiga tadpole memiliki sifat simetris karena $L_{p,q} \cong L_{q,p}$.

Teorema 3.10

Bilangan penjodohan sempurna graf $\boldsymbol{L}_{\mathbf{p,q}}$ yaitu: $F_{p+q+2} + F_{p+1}F_{q+1} = t_{p+q+1,q-1}$.

(DeMaio dan Jacobson, 2014)

Bukti:

$$
\begin{aligned}
F_{p+q+2} + F_{p+1}F_{q+1} &= t_{p+q+1,q-1} \\
&= L_{p+q+1} + F_{p-1}F_{q-1}
\end{aligned}
$$

Misalkan $n = p + q$, maka $L_{p+q+1} = F_{p+q} + F_{p+q+2}$

$$
\begin{aligned}
F_{p+q+2} + F_{p+1}F_{q+1} &= F_{p+q+2} + F_{p+q} + F_{p-1}F_{q-1} \\
&= F_{p+q+2} + \left(F_{p+1}F_{q+1} - F_{p-1}F_{q-1}\right) + F_{p-1}F_{q-1} \\
&= F_{p+q+2} + F_{p+1}F_{q+1} \blacksquare
\end{aligned}
$$

4. PENUTUP

A. Simpulan

1. Sifat bilangan Fibonacci yang bersesuaian dengan himpunan independent graf lintasan P_k dengan $k \geq 0$ adalah $i(P_k) = F_{n+2}$. Sedangkan sifat bilangan Fibonacci graf sikel C_n dengan $n \geq 3$ adalah $i(C_n) = L_n$.
2. Sifat bilangan Fibonacci yang bersesuaian dengan himpunan independent graf cebong $T_{n,k}$, adalah. jika $i(T_{n,k}) = i(T_{n,k-1}) + i(T_{n,k-2})$, dengan $n \geq 3$ dan $k \geq 0$ atau jika $i(T_{n,k}) = i(T_{n-1,k}) + i(T_{n-2,k})$, dengan $n \geq 3$ dan $k \geq 0$. $i(T_{n,k}) = L_{n+k} + F_{n-3}F_k$, dengan $n \geq 3$ dan $k \geq 0$

B. Saran

Dalam skripsi ini penulis membahas tentang sifat bilangan Fibonacci pada graf tadpole. Untuk penelitian selanjutnya penulis menyarankan dapat membahas tentang sfat bilangan Fibonacci yang terdapat pada jenis-jenis graf lainnya.

DAFTAR PUSTAKAjk

Budayasa, I. K. 2007. *Teori Graf dan Aplikasinya*. Surabaya: Unipress.

DeMaio, Joe, dan John Jacobson. *Fibonacci Number of the Tadpole Graph*. 2014. Electronic Journal of Graph Theory and Applications 2(2) (2014), 129-138.

Gutman, Ivan dan Sven J. Cyvin. 1990. *A Result on 1-Factors Related to Fibonacci Number*. Quarterly 28(1), 81-84

Suparno. 2000. *Langkah-langkah Penulisan Artikel Ilmiah* dalam Saukah, Ali dan Waseso, M.G. 2000. Menulis Artikel untuk Jurnal Ilmiah. Malang: UM Press.

H. Prodiger dan R.Tichy. 1982. *Fibonacci Number of Graphs,* Fibonacci. Quarterly 20(1)

Luma, A dan B. Raufi. 2010. *Relationship Between Fibonacci and Lucas Squences and Their Application in Symmetric Cryptosystems*. ISBN:978-960-474-208-0. ISSN:1792-4324

Manuharawati. 2007. *Analisis Real 1*. Surabaya: Unipress.