

PELABELAN ANGGUN-AJAIB-SISI SUPER PADA GRAF PETERSEN YANG DIPERUMUM

Devy Anggun Wardhani

Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
email: devywardhani@mhs.unesa.ac.id

I Ketut Budayasa

Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
email: ketutbudayasa@yahoo.com

Abstrak

Misalkan G sebuah graf dengan p titik dan q sisi. Pelabelan anggun-ajaib-sisi super pada G adalah sebuah fungsi bijektif f dari himpunan $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan bilangan bulat positif $\{1, 2, \dots, p + q\}$ sedemikian hingga untuk semua sisi $uv \in E(G)$, nilai $|f(u) + f(v) - f(uv)|$ adalah konstan k dan $f(V(G)) = \{1, 2, \dots, p\}$, dengan k dinamakan konstanta ajaib pelabelan. Graf G yang mempunyai pelabelan anggun-ajaib-sisi super disebut graf anggun-ajaib-sisi super. Graf Petersen yang diperumum dilambangkan dengan $P(n, m)$, $n \geq 3$, $1 \leq m < \frac{n}{2}$ adalah graf beraturan-3 dengan $2n$ titik, $\{u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan sisi-sisi $\{u_i, v_i\}$, $\{u_i, u_{i+1}\}$, $\{v_i, v_{i+m}\}$ untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ dengan indeks direduksi modulo n . Pada skripsi ini akan dibahas pelabelan anggun-ajaib-sisi super pada graf Petersen yang diperumum, yaitu $P(n, 1)$, $P\left(n, \frac{n-1}{2}\right)$, dan $P(n, 2)$ dengan n ganjil.

Kata Kunci: pelabelan anggun-ajaib-sisi super, graf anggun-ajaib-sisi super, graf Petersen yang diperumum.

Abstract

Let G be a simple graph on p vertices and q edges. A super edge-magic-graceful labeling on G is a bijective function

$$f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p + q\}$$

such that for each $uv \in E(G)$, $|f(u) + f(v) - f(uv)| = k$ where k is a positive integer and $f(V(G)) = \{1, 2, \dots, p\}$. The value of k is called magic constant of labeling. A graph G having a such is called a super edge-magic-graceful graph. A generalized Petersen graph is denoted by $P(n, m)$, $n \geq 3$, $1 \leq m < \frac{n}{2}$ is 3-regular graph on $2n$ vertices, $u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n$ and the edges $\{u_i, v_i\}$, $\{u_i, u_{i+1}\}$, $\{v_i, v_{i+m}\}$ for every $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ with the index taken modulo n . In this thesis, we are concerned with super edge-magic-graceful labeling on generalized Petersen graphs. We prove that $P(n, 1)$, $P\left(n, \frac{n-1}{2}\right)$, and $P(n, 2)$ are super edge-magic-graceful graphs where n is odd.

Keywords: super edge-magic-graceful labeling, super edge-magic-graceful graph, generalized Petersen graphs.

1. PENDAHULUAN

Sebuah Graf G didefinisikan sebagai pasangan tak berurutan dari himpunan berhingga tak kosong $V(G)$ yang disebut titik ke himpunan berhingga (mungkin kosong) $E(G)$ yang elemennya disebut sisi. Sebuah titik dalam graf G digambarkan dengan noktah sedangkan sisi yang menghubungkan dua titik digambarkan dengan kurva (Budayasa, 2007). Banyak hal yang dikaji dalam teori graf, salah satunya pelabelan. Pelabelan graf menjadi topik yang menarik dan berguna, baik aplikasi maupun teoritis. Pelabelan graf dapat dirasakan perannya

terutama pada sektor sistem komunikasi dan transportasi maupun ilmu komputer.

Pelabelan graf adalah pemetaan dari gabungan himpunan titik dan himpunan sisi graf ke himpunan bilangan. Pada tahun 1967, Rosa memperkenalkan pelabelan graf yang disebut β -valuasi. β -valuasi dari graf G dengan q sisi didefinisikan sebagai pemetaan dari himpunan titik graf G ke himpunan $\{0, 1, 2, \dots, q\}$ sedemikian hingga ketika sisi uv diberi label $|f(u) - f(v)|$, hasil dari pelabelan berbeda (Gallian, 2018). Namun, Golomb (1972) menyebutnya pelabelan anggun. Sebuah graf G dengan q sisi dan p titik dikatakan sisi anggun jika ada suatu fungsi bijektif f dari himpunan sisi

ke himpunan $\{0, 1, 2, \dots, q\}$ sedemikian hingga diberikan fungsi bijektif $f(uv) = |f(u) - f(v)|$ (Vaidya & Shah, 2013). Stewart (1966) dan Sedlacek (1976) memperkenalkan tipe pelabelan ajaib. Pada tahun 1970, Kotzig dan Rosa mendefinisikan pelabelan ajaib dari graf G sebagai fungsi bijektif f dari $V(G) \cup E(G)$ ke $\{1, 2, \dots, p + q\}$ sedemikian hingga untuk setiap sisi uv $f(u) + f(v) + f(uv)$ adalah konstan (Kotzig & Rosac, 1970). Dan pada tahun 1998, Enomoto mendefinisikan pelabelan ajaib-sisi dikatakan ajaib sisi super jika himpunan titik dilabel dengan $\{1, 2, \dots, p\}$ (Enomoto, Llado, Nakamigawa, & Ringel, 1998). Pada skripsi ini akan dibahas tentang pelabelan anggun-ajaib-sisi super.

Tidak setiap graf mempunyai pelabelan anggun-ajaib-sisi super. Pertanyaan yang muncul adalah bagaimana mengkonstruksi pelabelan yang anggun-ajaib-sisi super. Secara umum, pertanyaan ini belum terjawab. Sekalipun untuk kelas-kelas graf tertentu, seperti graf Petersen. Graf Petersen dijadikan sebagai contoh penyangkal (*counter example*) di beberapa kasus dan memiliki sifat-sifat menarik. Graf Petersen yang diperumum adalah pengembangan dari graf Petersen.

Dalam artikel ini dibahas cara mengkonstruksi pelabelan anggun-ajaib-sisi super pada graf Petersen yang diperumum $P(n, 1)$, $P(n, \frac{n-1}{2})$, dan $P(n, 2)$ dengan n ganjil.

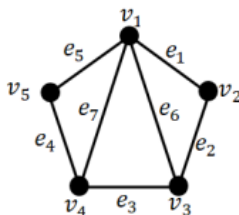
2. KAJIAN TEORI

1. Graf

Graf G terdiri atas dua himpunan, yaitu himpunan berhingga tak kosong $V(G)$ dari objek-objek yang disebut titik dan himpunan berhingga (mungkin kosong) $E(G)$ yang elemen-elemennya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen e dalam $E(G)$ merupakan pasangan tak berurutan titik-titik di $V(G)$. Himpunan $V(G)$ disebut himpunan titik G , dan himpunan $E(G)$ disebut himpunan sisi G .

Graf G dapat dipresentasikan dalam bentuk diagram (gambar) dengan setiap titik G digambarkan dengan noktah dan setiap sisi yang menghubungkan dua titik di G digambarkan dengan kurva sederhana dengan titik-titik akhir di kedua titik tersebut (Budayasa, 2007).

Contoh:

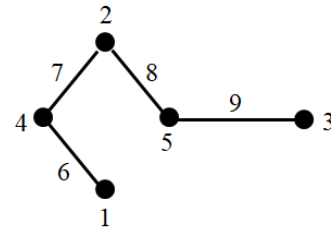


Gambar 1. Graf G dengan 5 titik dan 7 sisi

2. Pelabelan Anggun-Ajaib-Sisi Super

Misalkan G sebuah graf dengan p titik dan q sisi. Pelabelan anggun-ajaib-sisi super pada G adalah sebuah fungsi bijektif f dari himpunan $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan bilangan bulat positif $\{1, 2, \dots, p + q\}$ sedemikian hingga untuk semua sisi $uv \in E(G)$, nilai $|f(u) + f(v) - f(uv)|$ adalah konstan k dan $f(V(G)) = \{1, 2, \dots, p\}$, dengan k dinamakan konstanta ajaib pelabelan. Graf G yang mempunyai pelabelan anggun-ajaib-sisi super disebut graf anggun-ajaib-sisi super (Marimuthu, 2015).

Contoh:

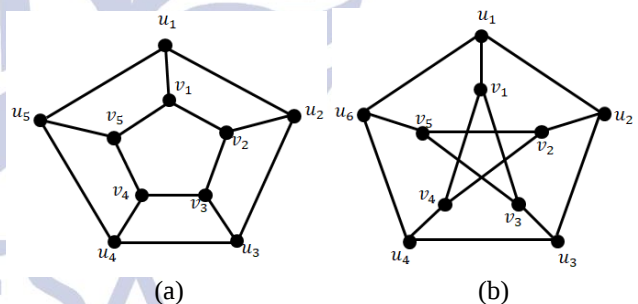


Gambar 2. Pelabelan anggun-ajaib-sisi super pada graf

3. Graf Petersen Yang Diperumum

Graf Petersen yang diperumum dilambangkan dengan $P(n, m)$, $n \geq 3$, $1 \leq m < \frac{n}{2}$ adalah graf beraturan-3 dengan $2n$ titik, $\{u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan sisi-sisi $\{u_i, v_i\}$, $\{u_i, u_{i+1}\}$, $\{v_i, v_{i+m}\}$ untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ dengan indeks direduksi modulo n .

Contoh:



Gambar 3. (a) $P(5,1)$; (b) $P(5,2)$

3. PEMBAHASAN

1. Konstruksi Pelabelan Anggun-Ajaib-Sisi Super Pada Graf Petersen Yang Diperumum $P(n, m)$

Berikut akan dibuktikan bahwa untuk n ganjil dan $m = 1$ graf Petersen yang diperumum $P(n, m)$ merupakan graf anggun-ajaib-sisi super.

Teorema 3.1:

Jika n ganjil dan $n \geq 3$, maka graf Petersen yang diperumum $P(n, 1)$ memiliki pelabelan anggun-ajaib-sisi super dengan konstanta ajaib $k = \frac{1}{2}(3n - 1)$.

Bukti:

Adapun pelabelan yang dimaksud adalah sebagai berikut:

$$f : V(P(n, 1)) \cup E(P(n, 1)) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 5n\},$$

sedemikian hingga, $f(u_i) =$
 $\begin{cases} \frac{1}{2}(3n + i), & i \equiv 1 \pmod{2} \\ \frac{1}{2}(2n + i), & i \equiv 0 \pmod{2} \end{cases};$

$$f(v_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}(i + 1), & i \equiv 1 \pmod{2} \\ \frac{1}{2}(n + i + 1), & i \equiv 0 \pmod{2} \end{cases};$$

$$f(u_i u_{i+1}) = 4n + i;$$

$$f(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} 2n + (i + 1), & i \neq n \\ 2n + 1, & i = n \end{cases};$$

$$f(u_i v_i) = 3n + i.$$

Karena ada tiga tipe sisi pada graf Petersen $P(n, m)$ yaitu $u_i u_{i+1}$, $u_i v_i$, $v_i v_{i+1}$, maka dalam pembuktian ditinjau tiga kasus.

Kasus 1 : sisi $u_i u_{i+1}$

Subkasus 1.1 : $i \equiv 1 \pmod{2}$

Dalam hal ini diperoleh,

$$|f(u_i) + f(u_{i+1}) - f(u_i u_{i+1})| = \frac{1}{2}(3n - 1)$$

Subkasus 1.2 : $i \equiv 0 \pmod{2}$

Dalam hal ini diperoleh,

$$|f(u_i) + f(u_{i+1}) - f(u_i u_{i+1})| = \frac{1}{2}(3n - 1)$$

Kasus 2 : sisi $v_i v_{i+1}$

Subkasus 2.1 : $i \equiv 1 \pmod{2}$ dan $i \neq n$

Dalam hal ini diperoleh,

$$|f(v_i) + f(v_{i+1}) - f(v_i v_{i+1})| = \frac{1}{2}(3n - 1)$$

Subkasus 2.2 : $i \equiv 0 \pmod{2}$ dan $i \neq n$

Dalam hal ini diperoleh,

$$|f(v_i) + f(v_{i+1}) - f(v_i v_{i+1})| = \frac{1}{2}(3n - 1)$$

Kasus 3 : sisi $u_i v_i$

Subkasus 3.1 : $i \equiv 1 \pmod{2}$

Dalam hal ini diperoleh,

$$|f(u_i) + f(v_i) - f(u_i v_i)| = \frac{1}{2}(3n - 1)$$

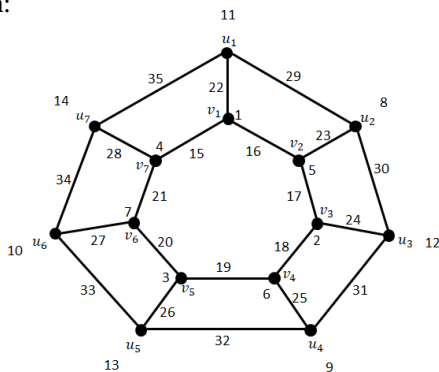
Subkasus 3.2 : $i \equiv 0 \pmod{2}$

Dalam hal ini diperoleh,

$$|f(u_i) + f(v_i) - f(u_i v_i)| = \frac{1}{2}(3n - 1)$$

Sehingga f merupakan pelabelan anggun-ajaib-sisi super pada graf $P(n, 1)$ dengan konstanta ajaib adalah $k = \frac{1}{2}(3n - 1)$. Dengan demikian teorema terbukti. ■

Contoh:



Gambar 1. Pelabelan anggun-ajaib-sisi super pada $P(7, 1)$ dengan konstanta ajaib $k = 10$

Berikut akan dibuktikan bahwa graf Petersen yang diperumum $P(n, m)$ untuk n ganjil dan $m = \frac{n-1}{2}$ memiliki pelabelan anggun-ajaib-sisi super.

Teorema 3.2:

Jika n ganjil dan $n \geq 5$, maka graf Petersen yang diperumum $P(n, \frac{n-1}{2})$ mempunyai pelabelan anggun-ajaib-sisi super dengan konstanta ajaib $k = \frac{1}{2}(3n - 1)$.

Bukti:

Adapun pelabelan yang dimaksud adalah sebagai berikut:

sedemikian hingga,

$$f : V \left(P \left(n, \frac{n-1}{2} \right) \right) \cup E \left(P \left(n, \frac{n-1}{2} \right) \right) \rightarrow \{1, 2, \dots, 5n\},$$

$$f(v_i) = \begin{cases} (n+2) - i, & i \neq 1 \\ 1, & i = 1 \\ 2n, & i = 1 \end{cases};$$

$$f(u_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2n + i - 1), & i \equiv 1 \pmod{2} \\ \frac{1}{2}(3n + i - 1), & i \equiv 0 \pmod{2} \end{cases};$$

$$f(u_i u_{i+1}) = \begin{cases} 5n, & i = 1 \\ 4n + i - 1, & i \neq 1 \end{cases};$$

$$f(u_i v_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}[(7n + 2) - i], & i \equiv 1 \pmod{2} \\ \frac{1}{2}[(8n + 2) - i], & i \equiv 0 \pmod{2} \end{cases};$$

$$f \left(v_i v_{i+\frac{n-1}{2}} \right) = \begin{cases} j + 1 + 2n, & i = 1 + \frac{n-1}{2}(j-1), j = 1, 2, \dots, n-1 \\ 2n + 1, & i = \frac{(n+3)}{2} \end{cases}.$$

Karena ada tiga tipe sisi pada graf Petersen $P(n, m)$ yaitu $u_i u_{i+1}$, $u_i v_i$, $v_i v_{i+\frac{n-1}{2}}$, maka dalam pembuktian ditinjau tiga kasus.

Kasus 1 : sisi $u_i u_{i+1}$

Subkasus 1.1 : $i = 1$

Dalam hal ini diperoleh,

$$|f(u_i) + f(u_{i+1}) - f(u_i u_{i+1})| = \frac{1}{2}(3n - 1)$$

Subkasus 1.2 : $i \equiv 1 \pmod{2}$ dan $i \neq 1$

Dalam hal ini diperoleh,

$$|f(u_i) + f(u_{i+1}) - f(u_i u_{i+1})| = \frac{1}{2}(3n - 1)$$

Subkasus 1.3 : $i \equiv 0 \pmod{2}$

Dalam hal ini diperoleh,

$$|f(u_i) + f(u_{i+1}) - f(u_i u_{i+1})| = \frac{1}{2}(3n - 1)$$

Kasus 2 : sisi $u_i v_i$

Subkasus 2.1 : $i = 1$

Dalam hal ini diperoleh,

$$|f(u_i) + f(v_i) - f(u_i v_i)| = \frac{1}{2}(3n - 1)$$

Subkasus 2.2 : $i \equiv 1 \pmod{2}$ dan $i \neq 1$

Dalam hal ini diperoleh,

$$|f(u_i) + f(v_i) - f(u_i v_i)| = \frac{1}{2}(3n - 1)$$

Subkasus 2.3 : $i \equiv 0 \pmod{2}$

Dalam hal ini diperoleh,

$$|f(u_i) + f(v_i) - f(u_i v_i)| = \frac{1}{2}(3n - 1)$$

Kasus 3 : sisi $v_i v_{i+\frac{n-1}{2}}$

Subkasus 3.1 : $i = 1$

Dalam hal ini diperoleh,

$$|f(v_i) + f(v_{i+\frac{n-1}{2}}) - f(v_i v_{i+\frac{n-1}{2}})| = \frac{1}{2}(3n - 1)$$

Subkasus 3.2 : $i \neq 1$

Dalam hal ini diperoleh,

$$j = 2 \text{ maka } i = 1 + \frac{n-1}{2}, \rightarrow v_i v_{i+\frac{n-1}{2}} = v_{1+\frac{n-1}{2}} v_{1+2\frac{n-1}{2}}$$

$$|f(v_i) + f(v_{i+\frac{n-1}{2}}) - f(v_i v_{i+\frac{n-1}{2}})| = \frac{1}{2}(3n - 1)$$

$$j = 3 \text{ maka } i = 1 + 2\frac{n-1}{2} = n, \rightarrow v_i v_{i+\frac{n-1}{2}} =$$

$$v_n v_{\frac{3n-1}{2} \bmod n}$$

$$|f(v_i) + f(v_{i+\frac{n-1}{2}}) - f(v_i v_{i+\frac{n-1}{2}})| = \frac{1}{2}(3n - 1)$$

$$j = 4 \text{ maka } i = 1 + 3\frac{n-1}{2} = n, \rightarrow v_i v_{i+\frac{n-1}{2}} =$$

$$v_{1+3\frac{n-1}{2} \bmod n} v_{1+4\frac{n-1}{2} \bmod n}$$

$$|f(v_i) + f(v_{i+\frac{n-1}{2}}) - f(v_i v_{i+\frac{n-1}{2}})| = \frac{1}{2}(3n - 1)$$

Untuk $j = 5, 6, \dots, (n-1)$ dapat ditunjukkan dengan memasukkan nilai j pada persamaan $i = 1 + (j-1)\frac{n-1}{2}$ sehingga diperoleh nilai i . Nilai i untuk menentukan

$v_i v_{i+\frac{n-1}{2}}$, dengan demikian didapatkan nilai $|f(v_i) +$

$f(v_{i+\frac{n-1}{2}}) - f(v_i v_{i+\frac{n-1}{2}})| = \frac{1}{2}(3n - 1)$ berdasarkan fungsi pada Teorema 3.3.

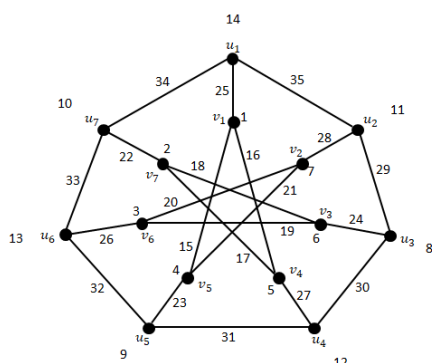
Subkasus 3.3 : $i = \frac{(n+3)}{2}$

Dalam hal ini diperoleh,

$$|f(v_i) + f(v_{i+\frac{n-1}{2}}) - f(v_i v_{i+\frac{n-1}{2}})| = \frac{1}{2}(3n - 1)$$

Dengan demikian f adalah pelabelan anggun-ajaib-sisi super dengan konstanta ajaib $k = \frac{1}{2}(3n - 1)$ pada graf Petersen yang diperumum $P(n, \frac{n-1}{2})$. Dengan demikian teorema terbukti. ■

Contoh:



Gambar 2. Pelabelan anggun-ajaib-sisi super pada $P(7,3)$ dengan konstanta ajaib $k = 10$

Teorema 3.3:

Jika n ganjil dan $n \geq 7$, maka graf Petersen yang diperumum $P(n, 2)$ mempunyai pelabelan anggun-ajaib-sisi super dengan konstanta ajaib $k = \frac{1}{2}(3n - 1)$.

Bukti:

Adapun pelabelan yang dimaksud adalah sebagai berikut:

$$f : V(P(n, 2)) \cup E(P(n, 2)) \rightarrow \{1, 2, \dots, 5n\},$$

sedemikian hingga,

$$f(u_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}(5n - i - 1), & i = n - 1 \\ \frac{1}{2}(4n - i - 1), & i \equiv 1 \pmod{2} ; \\ \frac{1}{2}(3n - i - 1), & i \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

$$f(v_i) = \begin{cases} \text{untuk } n \equiv -1 \pmod{4} \\ \frac{i+3}{4}, & i \equiv 1 \pmod{4} \\ \frac{1}{4}(6n + i + 3) \bmod n, & i \equiv 3 \pmod{4} \\ \frac{1}{4}(5n + i + 3) \bmod n, & i \equiv 2 \pmod{4} \\ \frac{1}{4}(3n + i + 3) \bmod n, & i \equiv 0 \pmod{4} \end{cases} ;$$

$$f(v_i) = \begin{cases} \text{untuk } n \equiv 1 \pmod{4} \\ \frac{i+3}{4}, & i \equiv 1 \pmod{4} \\ \frac{1}{4}(6n + i + 3) \bmod n, & i \equiv 3 \pmod{4} \\ \frac{1}{4}(3n + i + 3) \bmod n, & i \equiv 2 \pmod{4} \\ \frac{1}{4}(5n + i + 3) \bmod n, & i \equiv 0 \pmod{4} \end{cases} ;$$

$$f(u_i u_{i+1}) = \begin{cases} 5n - i - 2, & 1 \leq i \leq (n-3) \\ 6n - i - 2, & (n-2) \leq i \leq n \end{cases} ;$$

$$f(v_i v_{i+2}) = \begin{cases} 2n + 1 + j, & i = 2j - 1 \pmod{n} \text{ dimana } 1 \leq j \leq (n-1) ; \\ 2n + 1, & i = n - 1 \end{cases}$$

$$f(u_i v_i) = 3n + j, \quad i = n - 1 - 4j \pmod{n} \text{ dimana } 1 \leq j \leq n.$$

Karena ada tiga tipe sisi pada graf Petersen $P(n, m)$ yaitu $u_i u_{i+1}$, $u_i v_i$, $v_i v_{i+2}$, maka dalam pembuktian ditinjau tiga kasus.

Sehingga f merupakan pelabelan anggun-ajaib-sisi super pada graf $P(n, 2)$ dengan konstanta ajaib adalah $k = \frac{1}{2}(3n - 1)$. Dengan demikian teorema terbukti. ■

4.PENUTUP

Simpulan

Berdasarkan pembahasan dapat disimpulkan:

1. Konstruksi graf Petersen yang diperumum $P(n, 1)$ dengan $n \geq 3$ berdasarkan fungsi berikut:

$$f(u_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}(3n + i), & i \equiv 1 \pmod{2} \\ \frac{1}{2}(2n + i), & i \equiv 0 \pmod{2} \end{cases};$$

$$f(v_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}(i + 1), & i \equiv 1 \pmod{2} \\ \frac{1}{2}(n + i + 1), & i \equiv 0 \pmod{2} \end{cases};$$

$$f(u_i u_{i+1}) = 4n + i;$$

$$f(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} 2n + (i + 1), & i \neq n \\ 2n + 1, & i = n \end{cases};$$

$$f(u_i v_i) = 3n + i.$$

2. Konstruksi graf Petersen yang diperumum $P\left(n, \frac{n-1}{2}\right)$ dengan $n \geq 5$ berdasarkan fungsi berikut:

$$f(v_i) = \begin{cases} (n + 2) - i, & i \neq 1 \\ 1, & i = 1 \end{cases};$$

$$f(u_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2n + i - 1), & i \equiv 1 \pmod{2} \\ \frac{1}{2}(3n + i - 1), & i \equiv 0 \pmod{2} \end{cases};$$

$$f(u_i u_{i+1}) = \begin{cases} 5n, & i = 1 \\ 4n + i - 1, & i \neq 1 \end{cases};$$

$$f(u_i v_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}[(7n + 2) - i], & i \equiv 1 \pmod{2} \\ \frac{1}{2}[(8n + 2) - i], & i \equiv 0 \pmod{2} \end{cases};$$

$$f\left(v_i v_{i+\frac{n-1}{2}}\right) = \begin{cases} j + 1 + 2n, & i = 1 + \frac{n-1}{2}(j - 1), j = 1, 2, \dots, n - 1 \\ 2n + 1, & i = \frac{(n + 3)}{2} \end{cases}$$

3. Konstruksi graf Petersen yang diperumum $P\left(n, \frac{n-1}{2}\right)$ dengan $n \geq 5$ berdasarkan fungsi berikut:

$$f(u_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}(5n - i - 1), & i = n - 1 \\ \frac{1}{2}(4n - i - 1), & i \equiv 1 \pmod{2} \\ \frac{1}{2}(3n - i - 1), & i \equiv 0 \pmod{2} \end{cases};$$

untuk $n \equiv -1 \pmod{4}$

$$f(v_i) = \begin{cases} \frac{i + 3}{4}, & i \equiv 1 \pmod{4} \\ \frac{1}{4}(6n + i + 3) \bmod n, & i \equiv 3 \pmod{4} \\ \frac{1}{4}(5n + i + 3) \bmod n, & i \equiv 2 \pmod{4} \\ \frac{1}{4}(3n + i + 3) \bmod n, & i \equiv 0 \pmod{4} \end{cases};$$

untuk $n \equiv 1 \pmod{4}$

$$f(v_i) = \begin{cases} \frac{i + 3}{4}, & i \equiv 1 \pmod{4} \\ \frac{1}{4}(6n + i + 3) \bmod n, & i \equiv 3 \pmod{4} \\ \frac{1}{4}(3n + i + 3) \bmod n, & i \equiv 2 \pmod{4} \\ \frac{1}{4}(5n + i + 3) \bmod n, & i \equiv 0 \pmod{4} \end{cases};$$

$$f(u_i u_{i+1}) = \begin{cases} 5n - i - 2, & 1 \leq i \leq (n - 3) \\ 6n - i - 2, & (n - 2) \leq i \leq n \end{cases};$$

$$f(v_i v_{i+2}) = \begin{cases} 2n + 1 + j, & i = 2j - 1 \pmod{n} \text{ dimana } 1 \leq j \leq (n - 1) \\ 2n + 1, & i = n - 1 \end{cases};$$

$$f(u_i v_i) = 3n + j, \quad i = n - 1 - 4j \pmod{n} \text{ dimana } 1 \leq j \leq n.$$

Saran

Berdasarkan pembahasan, diberikan saran kepada pembaca agar dapat mengembangkan pembahasan dengan menemukan pelabelan anggun-ajaib-sisi-super pada graf Petersen yang diperumum selain $P(n, 1)$, $P\left(n, \frac{n-1}{2}\right)$, dan $P(n, 2)$.

DAFTAR PUSTAKA

- Budayasa, I. K. (2007). *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press.
- Enomoto, H., Llado, A. S., Nakamigawa, T., & Ringel, G. (1998). SUPER EDGE-MAGIC GRAPHS, 34(2), 105–109.
- Kotzig, A., & Rosac, A. (1970). Magic valuations of finite graphs, 13(4).
- Marimuthu, G. (2015). Super Edge Magic Graceful Labeling of Generalized Petersen Graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 48, 235–241. <https://doi.org/10.1016/j.endm.2015.05.035>