MATH*unesa*
Jurnal Ilmiah Matematika *Volume 7 No. 2 Tahun 2019*
ISSN 2301-9115

TEOREMA KETUNGGALAN TITIK TETAP PADA RUANG b-METRIK LENGKAP

Huna Hikmatut Tarbiyyah
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : hunatarbiyyah@mhs.unesa.ac.id

Manuharawati
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail **:** manuharawati@unesa.ac.id

Abstrak

Artikel ini membahas tentang ruang b- metrik. Ruang b-metrik adalah perumuman ruang metrik. Materi yang dibahas dalam ruang b-metrik di antaranya adalah barisan konvergen dan Cauchy, ruang b-metrik lengkap serta teorema ketunggalan titik tetap pada ruang b-metrik lengkap. Teorema ketunggalan titik tetap pada ruang b-metrik diperoleh menggunakan pemetaan kontraktif, C-kontraktif dan K-kontraktif.

Kata kunci: titik tetap , ruang metrik, ruang b-metrik, pemetaan kontraktif, C-kontraktif, K-kontraktif

Abstract

In this article we will discuss b-metric space. b-metric space is the generalization of metric space. Material that discussed in b-metric space among convergent and Cauchy sequence, complete b-metric space, and unique fixed point theorem in complete b-metric space. Unique fixed point theorem in complete b-metric space obtained using contractive mapping, C-contractive, and K-contractive.

Keywords: *fixed point, metric space, b-metric space, contractive mapping, C-contractive, K-contractive.*

1. PENDAHULUAN

Dalam matematika banyak topik yang mengalami perluasan, salah satu satu topik yang mengalami perluasan adalah analisis fungsional, seperti dalam hal ruang metrik, ruang vektor, ruang norm, dan lain-lain. Pada tahun 1906, Mourice Frechet memperkenalkan ruang metrik (Kreyszig,1978). Pada tahun 1989, Backhtin memperkenalkan ruang b-metrik. Suatu pasangan (X, d_b) dikatakan ruang b-metrik, jika d sebagai metrik memiliki sifat $d(x,y) \leq s\big(d(x,z) + d(z,y)\big)$, dengan $s \in \mathbb{R}, s \geq 1$.

Topik lain yang juga dibahas dalam analisis adalah titik tetap. Teori titik tetap merupakan alat penting yang digunakan dalam pemecahan masalah di berbagai cabang ilmu, seperti dalam bidang ekonomi, ilmu komputer, ilmu tekhnik, dan perkembangan analisis nonlinier. Teorema titik tetap pertama kali diperkenalkan oleh Stefan Banach yang dikenal sebagai *Banach Contraction Principle (BCP)* pada tahun 1920 (Kreyzig,1978). Teorema tersebut menjadi dasar dalam pengembangan teori titik tetap oleh beberapa ilmuan, seperti Kannan dalam penelitiannya yang berjudul *Some Remarks on Fixed Point* (Kannan, 1960)serta Nadler dalam penelitiannya yang berjudul *Sequences of Contraction and Fixed Points* (Nadler, 1968). Pada tahun 2013, Mehmet Kir dan Hukmi Kiziltunc, membuktikan serta menganalisis eksistensi dan ketunggalan titik tetap yang memenuhi kondisi kontraktif , C-kontraktif, dan K-kontraktif pada ruang b-metrik (Kir & Kiziltunc, 2013).

Hasil dari penelitian Mehmet Kir dan Hukmi Kiziltunc akan dibahas lebih rinci dalam paper yang berjudul "Teorema Ketunggalan Titik Tetap pada Ruang b-Metrik Lengkap". Selain itu, akan dibahas kriteria barisan konvergen dan Cauchy pada ruang b-metrik, serta ruang b-metrik lengkap yang digunakan untuk menganalisis ketunggalan titik tetap pada ruang b-metrik lengkap.

2. KAJIAN TEORI

Definisi 1.1 Diberikan X himpunan tak kosong. Fungsi $d: X \times X \to \mathbb{R}$ merupakan metrik jika setiap $x, y, z \in X$ memenuhi:
$(p1)$ $d(x,y) \geq 0$, dan $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
$(p2)$ $d(x,y) = d(y,x)$
$(p3)$ $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$
Pasangan (X,d) disebut ruang metrik. (Ghozali, 2010).

Definisi 1.2 Barisan (x_n) pada (X,d) dikatakan konvergen jika ada $x \in X$, sedemikian hingga untuk setiap $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, ada $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d(x_n, x) < \varepsilon$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}, n \geq N$, dinotasikan dengan $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x$ atau $x_n \to x$ dan x disebut limit barisan (x_n) (Kreyszig, 1978).

Definisi 1.3 Barisan (x_n) pada (X,d) merupakan barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, ada $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $d(x_m,x_n) < \varepsilon$ untuk setiap $m,n \in \mathbb{N}, m,n > N$ (Kreyszig, 1978).

Teorema 1.1 Setiap barisan yang konvergen pada ruang metrik adalah barisan Cauchy (Kreyszig, 1978).

Definisi 1.4 (X,d) disebut ruang metrik lengkap jika setiap barisan Cauchy pada X konvergen (Kreyszig, 1978).

Definisi 1.5 Diketahui $T: X \to Y$ dari ruang metrik (X,d_X) ke ruang metrik (Y,d_Y). T kontinu di titik $x \in X$ jika untuk setiap $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ ada $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ sedemikian hingga $d_Y(T(x),T(x_0)) < \varepsilon$ untuk setiap $x \in X$ dengan $d_X(x,x_0) < \delta$. Jika T kontinu di setiap titik $x \in X$, maka T disebut fungsi kontinu pada X (Tao, 2016).

Teorema 1.2 Pemetaan $T: X \to Y$ dari ruang metrik (X,d_X) ke ruang metrik (Y,d_Y) kontinu di titik $x_0 \in X$ jika dan hanya jika

$x_n \to x_0$ mengakibatkan $T(x_n) \to T(x_0)$

(Sihombing & Septiati, 2018).

Definisi 1.6 Diketahui pemetaan $T: X \to X$. Titik x disebut titik tetap T jika $T(x) = x$ (Kreyszig, 1978).

Definisi 1.7 Diketahui ruang metrik (X,d) dan $T: X \to X$. T dikatakan kontraktif pada X jika ada $k \in \mathbb{R}, k \in (0,1)$ sedemikian hingga $d\big(T(x),T(y)\big) \le kd(x,y)$ untuk setiap $x,y \in X$ (Conrad, 2014).

Definisi 1.8 Diketahui ruang metrik (X,d) dan $T: X \to X$. T dikatakan C-kontraktif pada X jika ada $k \in \mathbb{R}, k \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$ sedemikian hingga untuk setiap $x,y \in X$ berlaku:

$$d(T(x),T(y)) \le k\left(d\big(x,T(y)\big) + d\big(y,T(x)\big)\right)$$

(Sihombing & Septiati, 2018).

Definisi 1.9 Diketahui ruang metrik (X,d) dan $T: X \to X$. T dikatakan K-kontraktif pada X jika ada $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$ sedemikian hingga untuk setiap $x,y \in X$ berlaku:

$$d\big(T(x),T(y)\big) \le \alpha\left(d\big(x,T(x)\big) + d\big(y,T(y)\big)\right)$$

(Hussain, Parvaneh , Samet , & Vetro, 2015).

3. PEMBAHASAN

Pada bagian ini dibahas kriteria barisan konvergen dan barisan Cauchy pada ruang b-metrik, ruang b-metrik lengkap, hubungan ruang b-metrik dengan ruang metrik serta beberapa teorema ketunggalan titik tetap pada ruang b-metrik lengkap.

Definisi 3.1 Diberikan X himpunan tak kosong dan $s \in \mathbb{R}, s \ge 1$. Suatu fungsi $d_b: X \times X \to \mathbb{R}$ disebut b-metrik jika setiap $x,y,z \in X$ memenuhi:

i) $d_b(x,y) \ge 0$ dengan $d_b(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ii) $d_b(x,y) = d_b(y,x)$

iii) $d_b(x,y) \le s\big(d_b(x,z) + d_b(z,y)\big)$

Pasangan (X,d_b) disebut ruang b-metrik.

(Kir & Kiziltunc, 2013).

Suatu ruang metrik merupakan ruang b-metrik karena terdapat $s = 1$ sehingga syarat ruang b-metrik terpenuhi. Oleh karena itu, ruang b-metrik merupakan perumuman ruang metrik.

Definisi 3.2 Diketahui (X,d_b) ruang b-metrik. Barisan (x_n) pada X adalah barisan konvergen jika terdapat $x \in X$ dan untuk setiap $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ ada $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \ge N$ berlaku $d_b(x_n,x) < \varepsilon$. Dalam hal ini dinotasikan $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x$ (Kir & Kiziltunc, 2013).

Definisi 3.3 Diketahui (X,d_b) ruang b-metrik. Barisan (x_n) pada X adalah barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n,m \in \mathbb{N}, m \ge N, n \ge N$ berlaku $d_b(x_n,x_m) < \varepsilon$ (Kir & Kiziltunc, 2013).

Definisi 3.4 (X,d_b) disebut ruang b-metrik lengkap, jika setiap barisan Cauchy pada X konvergen (Kir & Kiziltunc, 2013).

Selain definisi tersebut diperoleh juga teorema sebagai berikut.

Teorema 3.1 Setiap barisan konvergen pada ruang b-metrik merupakan barisan Cauchy.

Selanjutnya terdapat tiga teorema untuk membuktikan ketunggalan pada ruang b-metrik. Teorema pertama pada pemetaan kontraktif.

Lemma 3.1 Setiap pemetaan kontraktif T pada ruang b-metrik (X,d_b) adalah kontinu.

Lemma 3.2 Pemetaan $T: X \to Y$ dari ruang metrik (X,d_{bX}) ke ruang metrik (Y,d_{bY}) adalah kontinu di titik $x_0 \in X$ jika dan hanya jika

$x_n \xrightarrow{bX} x_0$ mengakibatkan $T(x_n) \xrightarrow{bY} T(x_0)$.

Teorema 3.3 Diberikan (X, d_b) ruang b-metrik lengkap dengan $s \geq 1$ dan $T: X \to X$. Jika T memenuhi:

$$d_b\big(T(x), T(y)\big) \leq k d_b(x, y) \quad \text{untuk setiap } x, y \in X$$

untuk suatu $k \in (0,1)$ dan $ks < 1$, maka T memiliki titik tetap tunggal.

Bukti. Bentuk barisan (x_n) melalui rumus rekursi. Ambil $x_0 \in X$, $x_n = T(x_{n-1}) = (T^n(x_0))$, dengan T^n adalah fungsi komposit sebanyak n kali.
Karena T memenuhi kondisi $d_b\big(T(x), T(y)\big) \leq k d_b(x, y)$ maka diperoleh:

$$d_b(x_n, x_{n+1}) \leq k^n \left(d_b(x_0, x_1)\right)$$

Selanjutnya, misalkan (x_n) sebarang barisan di X. Akan dibuktikan bahwa barisan (x_n) merupakan barisan Cauchy di X.
Diberikan $m, n \in \mathbb{N}, m > n$, maka diperoleh:

$$d_b(x_n, x_m) \leq s d_b(x_n, x_{n+1}) + s^2 d_b(x_{n+1}, x_{n+2}) + s^3 d_b(x_{n+2}, x_{n+3}) + \cdots$$

$$d_b(x_n, x_m) \leq s k^n d_b(x_0, x_1) + s^2 k^{n+1} d_b(x_0, x_1) + s^3 k^{n+2} d_b(x_0, x_1) + \cdots$$

Saat $m, n \to \infty$, diperoleh:

$$\lim_{m,n\to\infty} d_b(x_n, x_m) = 0$$

Oleh karena itu, barisan (x_n) merupakan barisan Cauchy di X. Karena (X, d_b) ruang b-metrik lengkap, maka (x_n) konvergen ke $x \in X$. Karena T pemetaan kontraktif, maka berdasarkan Lemma 3.1 dan Lemma 3.2 diperoleh:

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} T(x_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} (x_n) = x$$

Sehingga diperoleh bahwa x titik tetap T. Selanjutnya dibuktikan bahwa x adalah titik tetap tunggal. Andaikan y titik tetap T yang berbeda dengan x, $T(y) = (y)$.
Berdasarkan sifat pemetaan kontraktif:

$$d_b\big(T(y), T(x)\big) \leq k d_b(y, x)$$

$$d_b(y, x) \leq k d_b(y, x)$$

Pertidaksamaan di atas terpenuhi jika $k \geq 1$. Kontradiksi dengan nilai k yang diberikan, maka terbukti bahwa titik tetap T tunggal.

Teorema selanjutnya adalah pada pemetaan C-kontraktif.

Teorema 3.4 Diberikan (X, d_b) ruang b-metrik lengkap dengan $s \geq 1$ dan $T: X \to X$. Jika:

$$d_b\big(T(x), T(y)\big) \leq \lambda\big[d_b\big(x, T(y)\big) + d_b\big(y, T(x)\big)\big]$$

untuk setiap $x, y \in X$ dan suatu λ yang memenuhi $s\lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, maka T memiliki titik tetap tunggal.

Bukti. Bentuk barisan (x_n) melalui rumus rekursi. Ambil $x_0 \in X$, $x_n = T(x_{n-1}) = (T^n(x_0))$, dengan T^n adalah fungsi komposit sebanyak n kali.
Karena T memenuhi kondisi

$$d_b\big(T(x), T(y)\big) \leq \lambda\big[d_b\big(x, T(y)\big) + d_b\big(y, T(x)\big)\big]$$

maka diperoleh:

$$d_b(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda\big[s\big(d_b(x_{n-1}, x_n) + d_b(x_n, x_{n+1})\big)\big]$$

$$d_b(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{\lambda s}{(1-\lambda s)} d_b(x_{n-1}, x_n) \leq \left(\frac{\lambda s}{(1-\lambda s)}\right)^n d_b(x_0, x_1)$$

Karena $\lambda s \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, maka $\frac{\lambda s}{(1-\lambda s)} \in (0,1)$ sehingga diperoleh T pemetaan kontraktif. Dengan menggunakan cara yang sama pada pembuktian Teorema 3.7 diperoleh bahwa (x_n) barisan Cauchy dan konvergen. Misalkan (x_n) konvergen ke $x \in X$.
Selanjutnya akan dibuktikan bahwa x titik tetap T.

$$\begin{aligned} d_b\big(x, T(x)\big) &\leq s\big[d_b(x, x_{n+1}) + d_b\big(x_{n+1}, T(x)\big)\big] \\ &\leq s d_b(x, x_{n+1}) + s\lambda d_b(x, x_{n+1}) \\ &\quad + s\lambda d_b\big(x_n, T(x)\big) \end{aligned}$$

Saat $n \to \infty$, diperoleh:

$$d_b\big(x, T(x)\big) \leq 0$$

Karena d_b b-metrik, maka $d_b\big(x, T(x)\big) = 0$ yang berarti $T(x) = x$.
Selanjutnya akan dibuktikan bahwa x adalah titik tetap tunggal. Andaikan y titik tetap T, $y \neq x$. Karena y titik tetap T, maka $T(y) = (y)$.
Berdasarkan sifat pemetaan C-kontraktif:

$$d_b\big(T(x), T(y)\big) \leq \lambda\big[d_b\big(x, T(y)\big) + d_b\big(y, T(x)\big)\big]$$

$$d_b(x, y) \leq \lambda[d_b(x, y) + d_b(y, x)]$$

$$d_b(x, y) \leq \lambda 2 d_b(x, y)$$

Karena $d_b(x, y) \leq \lambda 2 d_b(x, y)$, maka λ yang memenuhi adalah $\lambda \geq \frac{1}{2}$. Kontradiksi dengan $\lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Jadi, titik tetap T adalah tunggal.

Teorema terakhir yang yaitu titik tetap pada pemetaan K-kontraktif.

Teorema 3.5 Diberikan (X, d_b) ruang b-metrik lengkap dengan $s \geq 1$ dan $T: X \to X$. Jika T memenuhi:

$$d_b\big(T(x), T(y)\big) \leq \mu\big[d_b\big(x, T(x)\big) + d_b\big(y, T(y)\big)\big]$$

untuk setiap $x, y \in X$ serta suatu $\mu \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, maka T memiliki titik tetap tunggal.

Bukti. Bentuk barisan (x_n) melalui rumus rekursi. Ambil $x_0 \in X$, $x_n = T(x_{n-1}) = (T^n(x_0))$, dengan T^n adalah fungsi komposit sebanyak n kali.
Karena T memenuhi kondisi

$$d_b\big(T(x), T(y)\big) \leq \mu\big[d_b\big(x, T(x)\big) + d_b\big(y, T(y)\big)\big]$$

maka diperoleh:

$$d_b(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{\mu}{1-\mu} d_b(x_{n-1}, x_n)$$

$$d_b(x_n, x_{n+1}) \leq \left(\frac{\mu}{(1-\mu)}\right)^n d_b(x_0, x_1)$$

Karena $\mu \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, maka $\frac{\mu}{(1-\mu)} \in (0,1)$ sehingga T merupakan pemetaan kontraktif. Dengan menggunakan cara yang sama pada pembuktian Teorema 3.7 diperoleh bahwa (x_n) barisan Cauchy dan konvergen. Misalkan (x_n) konvergen ke $x \in X$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa x titik tetap T.

$$d_b(x, T(x)) \leq s\left[d_b(x, x_n) + d_b(x_n, T(x))\right]$$

$$\leq s d_b(x, x_{n+1}) + s\mu d_b(x_n, x_{n+1}) + s\mu d_b(x, T(x))$$

saat $n \to \infty$, diperoleh:

$$d_b(x, T(x)) \leq 0$$

Karena d_b b-metrik, maka $d_b(x, T(x)) = 0$ yang berarti $T(x) = x$.

Selanjutnya, dibuktikan x adalah titik tetap tunggal. Andaikan y titik tetap T, $y \neq x$. Karena y titik tetap T, maka $T(y) = (y)$.

Berdasarkan sifat pemetaan K-kontraktif:

$$d_b(T(x), T(y)) \leq \mu\left[d_b(x, T(x)) + d_b(y, T(y))\right]$$

$$d_b(x, y) \leq \mu[d_b(x, x) + d_b(y, y)]$$

$$d_b(x, y) \leq 0$$

Karena d metrik, maka $d_b(x, y) \geq 0$ sehingga nilai d_b yang memenuhi adalah $d_b(x, y) = 0$ sehingga diperoleh $y = x$. Karena kontradiksi, maka pengandaian salah. Jadi, titik tetap T adalah tunggal.

4. PENUTUP

Simpulan

Berdasarkan pembahasan diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut.

1. Ruang b-metrik merupakan perumuman ruang metrik.
2. Setiap barisan konvergen pada ruang b-metrik merupakan barisan Cauchy. Jika setiap barisan Cauchy pada ruang b-metrik konvergen maka ruang b-metrik tersebut lengkap.
3. Pada ruang b-metrik lengkap diperoleh tiga teorema titik tetap yaitu:
   a. Teorema titik tetap pemetaan kontraktif
   b. Teorema titik tetap pemetaan C-kontraktif
   c. Teorema titik tetap pemetaan K-kontraktif

Saran

Pada artikel ini hanya dibahas mengenai sifat kekonvergenan, barisan Cauchy, dan ruang b-metrik lengkap serta ketunggalan titik tetap pada ruang b-metrik lengkap menggunakan pemetaan kontraktif, C-kontraktif dan K-kontraktif. Oleh karena itu, dapat dipelajari lebih lanjut sifat-sifat lain yang berlaku pada ruang b-metrik serta pemetaan selain pemetaan yang telah dibahas kemudian menganalisis ketunggalan titik tetapnya.

DAFTAR PUSTAKA

Conrad, K. (2014). The Contraction Mapping Theorem.

Ghozali, S. M. (2010). Pengantar Analisis Fungsional. Bandung, Jawa Barat, Indoneia: Universitas Pendidikan Indonesia.

Hussain, N., Parvaneh , V., Samet , B., & Vetro, C. (2015). Some Fixed Point Theorem for Generalized Contractive Mappings in Complete Metric Spaces. *Fixed Point Theory and Applications*.

Kannan, R. (1960). Some Remarks on Fixed Point. *Bull. Calcutta Math. Soc*, 71-76.

Kir, M., & Kiziltunc, H. (2013). On Some Well Known Fixed Point Theorem in b-Metric Space. *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, 13-16.

Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Application.* New York: Wiley.

Nadler, S. (1968). Sequences of Contraction and Fixed Points. *Pacific J. Math*, 579-585.

Sihombing, S. C., & Septiati, E. (2018). *Ruang Metrik dan Ruang Metrik Parsial.* Sleman: Deepublish.

Tao, T. (2016). Continuous Functions in Metric Spaces. *Analysis II*, *38*, 28.