

BI-MULTIPLIER SIMETRIK PADA ALJABAR INCLINE

Fita Loka Dewi

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : fitadewi@mhs.unesa.ac.id

Dr. Agung Lukito, M.S.

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : agunglukito@unesa.ac.id

Abstrak

Aljabar *incline* merupakan generalisasi semiring dan latiss. Aljabar *incline* adalah himpunan tak-kosong dengan operasi biner "+" dan "*" yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Konsep *multiplier* juga diterapkan pada aljabar *incline* dengan sifat reguler dan kanselatif kanan. Setiap bi-multiplier *-simetrik adalah reguler. Bi-multiplier +-simetrik pada aljabar *incline* bersifat kanselatif kanan.

Kata kunci: Aljabar *incline*, bi-multiplier simetrik, latiss.

Abstract

Incline algebra is a generalization semiring and lattice. *Incline* algebra is an empty set with binary operations "+" and "*" satisfying the following certain axioms. The multiplier concept is also applied to *incline* algebra with regular and right cancellation. Every *-symmetric bi-multiplier is regular. +-symmetric bi-multiplier of *incline* algebra is right cancellation.

Keywords: *Incline* algebra, symmetric bi-multiplier, lattice.

1. PENDAHULUAN

Struktur aljabar merupakan suatu himpunan tak-kosong dengan satu atau lebih operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Beberapa struktur aljabar yang sering dipelajari meliputi grup dan ring tetapi sebenarnya masih banyak struktur aljabar lain, salah satunya adalah aljabar *incline*. Teori aljabar *incline* didasarkan pada teori *semiring* dan teori latiss (*lattice*). (Ozbal & Firat, 2016)

Konsep aljabar *incline* diperkenalkan oleh Alev Firat dan Sule Ayar Ozbal pada tahun 2016. Aljabar *incline* ini dibentuk dari himpunan tak-kosong dengan dua operasi biner serta memenuhi beberapa aksioma tertentu.

Konsep *multiplier* juga diterapkan pada aljabar *incline* dengan sifat reguler, himpunan titik tetap, kernel, ideal dan kanselatif kanan. Sifat-sifat multiplier pada aljabar *incline* tersebut dapat digunakan pada beberapa penerapan, yaitu untuk aplikasi dalam kemungkinan penalaran dan automata, aplikasi untuk grafik, pengelompokan dan pemrograman, serta sistem linear (Cao, Kim, & Roush, 1984). Karena itu multiplier pada aljabar *incline* menarik untuk dipelajari. Dengan demikian akan dikaji lebih dalam pada penelitian ini mengenai sifat-sifat bi-multiplier *-dan +-simetrik pada

aljabar *incline* yaitu reguler, himpunan titik tetap, kernel, ideal dan kanselatif kanan.

2. KAJIAN TEORI

Berikut ini diberikan beberapa definisi konsep yang digunakan untuk menunjang memahami pembahasan.

Fungsi

Definisi 2.1

Suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu aturan yang memetakan setiap elemen di A dengan elemen tunggal di B . Dilambangkan $f: A \rightarrow B$.

(Thomas, Weir, & Hass, 2004)

Operasi Biner

Definisi 2.2

Misalkan G himpunan tak-kosong. Operasi biner pada G adalah fungsi dari $G \times G$ ke G .

(Gallian, 2010)

Aljabar

Definisi 2.3

Himpunan tak-kosong R disebut aljabar jika dapat didefinisikan satu atau lebih operasi biner pada R .

(Mikhalev & Pilz, 2002)

Poset

Definisi 2.4

Poset (*Partially Order Set*) adalah himpunan tak-kosong dengan suatu relasi biner " $\leq$ " yang memenuhi sifat: 1. Refleksif: $a \leq a$, 2. Transitif: jika $a \leq b, b \leq c$ maka $a \leq c$ dan 3. Antisimetrik: jika $a \leq b, b \leq a$ maka $a = b$.

(Masriyah, 2015)

Supremum

Definisi 2.5

Misalkan S subhimpunan dari poset A . Sebuah elemen $u \in A$ disebut batas atas dari S jika untuk semua $x \in S$ berlaku $x \leq u$. Selanjutnya, jika $u \leq v$ dengan v adalah sebarang batas atas A , maka u adalah batas atas terkecil A (*Supremum A* ditulis $\text{Sup } A$).

(Manuharawati, 2013)

Infimum

Definisi 2.6

Misalkan S subhimpunan dari poset A . Sebuah elemen $u \in A$ disebut batas bawah dari S jika untuk semua $x \in S$ berlaku $u \leq x$. Selanjutnya, jika $v \leq u$ dengan v adalah sebarang batas bawah A , maka u adalah batas bawah terbesar A (*Infimum A* ditulis $\text{Inf } A$).

(Manuharawati, 2013)

Latis

Definisi 2.7

Misalkan L himpunan tak-kosong dan tertutup terhadap operasi $\wedge$ dan $\vee$. Maka, L sebuah latis jika untuk $a, b, c \in L$ memenuhi aksioma berikut:

1. $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$, dan $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ (*asosiatif*)
 2. $a \wedge b = b \wedge a$, dan $a \vee b = b \vee a$ (*komutatif*) dengan $a + a = a$.
 3. $a \wedge (a \vee b) = a$, dan $a \vee (a \wedge b) = a$ (*absorpsi*).
- Jika latis L juga memenuhi aksioma distributif, $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, dan $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

Maka L disebut latis distributif.

(Cao, Kim, & Roush, 1984)

3. PEMBAHASAN

Berikut ini akan dibahas lebih lanjut mengenai definisi dan sifat-sifat bi-multiplier simetrik pada aljabar incline.

Aljabar Incline

Definisi 3.1

Aljabar R dengan operasi biner " $+$ " dan " $*$ " disebut aljabar *incline*, untuk semua $x, y, z \in R$ memenuhi aksioma-aksioma berikut:

$$(R1) \quad x + y = y + x.$$

$$(R2) \quad x + (y + z) = (x + y) + z.$$

$$(R3) \quad x * (y * z) = (x * y) * z.$$

$$(R4) \quad x * (y + z) = (x * y) + (y * z).$$

$$(R5) \quad (y + z) * x = (y * x) + (z * x).$$

$$(R6) \quad x + x = x.$$

$$(R7) \quad x + (x * y) = x.$$

$$(R8) \quad y + (x * y) = y.$$

Untuk selanjutnya, operasi $+$ disebut penjumlahan dan operasi $*$ disebut perkalian.

(Ozbal & Firat, 2016)

Definisi 3.2

Aljabar incline R dikatakan komutatif jika $x * y = y * x$ untuk semua $x, y \in R$.

(Ozbal & Firat, 2016)

Definisi 3.3

Misalkan R aljabar incline.

Untuk semua $x, y \in R$, didefinisikan $x \leq y$ jika $x + y = y$.

(Ozbal & Firat, 2016)

Lemma 3.4

Misalkan R aljabar incline.

Relasi $\leq$ dalam Definisi 3.3 memenuhi sifat berikut:

$$(i) \quad x \leq y \Rightarrow x * z \leq y * z.$$

$$(ii) \quad x \leq y \Rightarrow z * x \leq z * y.$$

Bukti:

$$(i) \quad x + y = y.$$

$$(x + y) * z = y * z$$

$$(x * z) + (y * z) = y * z.$$

$$x * z \leq y * z.$$

$$(ii) \quad x + y = y.$$

$$z * (x + y) = y * z.$$

$$(z * x) + (z * y) = y * z.$$

$$z * x \leq z * y.$$

Proposisi 3.5

Misalkan R aljabar incline. Relasi $\leq$ dalam Definisi 3.3 memenuhi sifat berikut:

$$(i) \quad x * y \leq x \text{ dan } x * y \leq y \text{ untuk semua } x, y \in R.$$

$$(ii) \quad y \leq z \text{ menyiratkan } x * y \leq x * z \text{ dan } y * x \leq z * x \text{ untuk semua } x, y \in R.$$

$$(iii) \quad \text{Jika } x \leq y, a \leq b, \text{ maka } x + a \leq y + b, x * a \leq y * b.$$

(Ozbal & Firat, 2016)

Bukti:

$$(i) \quad (x * y) + x = x + (x * y).$$

$$(x * y) + x = x.$$

$$x * y \leq x.$$

$$(x * y) + y = y + (x * y).$$

$$(x * y) + y = y.$$

$$x * y \leq y.$$

$$(ii) \quad y + z = z.$$

$$x * (y + z) = x * z.$$

$$(x * y) + (x * z) = x * z.$$

$$x * y \leq x * z.$$

$$(y + z) * x = z * x.$$

$$(y * x) + (z * x) = z * x.$$

$$y * x \leq z * x.$$

$$(iii) \quad x + y = y, \quad a + b = b.$$

$$(x + y) + (a + b) = y + b.$$

$$((x + y) + a) + b = y + b.$$

$$(x + (y + a)) + b = y + b.$$

$$(x + (a + y)) + b = y + b.$$

$$(x + a) + (x + y) + b = y + b.$$

$$(x + a) + (y + b) = y + b.$$

$$x + a \leq y + b.$$

$$(x * y) + (a * b) = y * b.$$

$$((x * y) + a) * b = y * b.$$

$$(x * (y + a)) * b = y * b.$$

$$(x * (a + y)) * b = y * b.$$

$$(x * a) + (x + y) * b = y * b.$$

$$(x * a) + (y * b) = y * b.$$

$$x * a \leq y * b.$$

Definisi 3.6

Subincline pada aljabar incline R adalah subhimpunan tak-kosong M dari R yang tertutup di bawah penjumlahan dan perkalian.

(Ozbal & Firat, 2016)

Definisi 3.7

Ideal di aljabar incline R adalah subincline $S \subseteq R$ sedemikian hingga jika $x \in S$ dan $y \leq x$ maka $y \in S$.

(Ozbal & Firat, 2016)

Definisi 3.8

(i) Elemen nol, ditulis 0, pada aljabar incline R jika memenuhi $x + 0 = x = 0 + x$ dan $x * 0 = 0 * x = 0$ untuk semua $x \in R$.

(ii) Identitas perkalian, ditulis 1, pada aljabar incline R memenuhi $x * 1 = 1 * x = x$ untuk semua $x \in R$.

(iii) Elemen tak-nol a pada aljabar incline R dengan elemen nol disebut pembagi nol kiri atau kanan jika ada elemen tak-nol $b \in R$ sehingga $a * b = 0$ atau $b * a = 0$.

(iv) Pembagi nol adalah elemen pada R yang merupakan pembagi nol kiri dan pembagi nol kanan.

(Ozbal & Firat, 2016)

Definisi 3.9

Aljabar incline R dengan identitas perkalian dan elemen nol disebut aljabar incline integral jika tidak memiliki pembagi nol.

(Ozbal & Firat, 2016)

Definisi 3.10

Misalkan R aljabar incline.

Operasi pada R dikatakan memenuhi hukum kanselatif kiri jika

$$a + b = a + c \Rightarrow b = c,$$

dan kanselatif kanan jika

$$b + a = c + a \Rightarrow b = c,$$

untuk semua $a, b, c \in R$.

(Ozbal & Firat, 2016)

Hubungan Antara Aljabar Incline dan Latis

Distributif

Proposisi 3.11

a. Setiap latis distributif adalah aljabar incline.

b. Aljabar incline adalah latis distributif jika dan hanya jika $x * x = x$ untuk semua $x \in R$.

(Ozbal & Firat, 2016)

Bi-Multiplier *-dan +-Simetrik pada Aljabar Incline

Definisi 3.12

Misalkan R aljabar incline. Pemetaan $f(.,.): R \times R \rightarrow R$ disebut simetrik jika

$$f(x, y) = f(y, x),$$

untuk semua $x, y \in R$.

(Ozbal & Firat, 2016)

Definisi 3.13

(i) Misalkan R aljabar incline.

Pemetaan $f(.,.): R \times R \rightarrow R$ disebut bi-multiplier

*-simetrik jika

$$f(x, y * z) = f(x, y) * z, \text{ untuk semua } x, y, z \in R.$$

(ii) Misalkan R aljabar incline.

Pemetaan $f(.,.): R \times R \rightarrow R$ disebut bi-multiplier

+simetrik jika

$$f(x, y + z) = f(x, y) + z, \text{ untuk semua } x, y, z \in R.$$

R.

(Ozbal & Firat, 2016)

Definisi 3.14

Misalkan suatu bi-multiplier *-atau +-simetrik pada aljabar incline R dan a merupakan elemen di R .

Himpunan $Fix_{f,a}(R)$ didefinisikan sebagai:

$$Fix_{f,a}(R) = \{x \in R \mid f(a, x) = x\}.$$

(Ozbal & Firat, 2016)

Definisi 3.15

Misalkan f suatu bi-multiplier $*$ -simetrik pada aljabar incline R dengan elemen nol. $\text{Kernel } f$ ditulis $\text{Ker}(f)$ didefinisikan sebagai:

$$\text{Ker}(f) = \{x \in R \mid f(0, x) = 0\}.$$

(Ozbal & Firat, 2016)

Proposisi 3.16

Misalkan R aljabar incline dengan identitas perkalian dan f suatu bi-multiplier $*$ -simetrik pada R . Maka untuk semua $x, y, z \in R$ berlaku:

- (i) $f(x, y) = f(x, 1) * y$.
- (ii) jika $f(x, 1) = 1$, maka $f(x, y) = y$.
- (iii) $f(x, y * z) \leq f(x, y) + z$.

(Ozbal & Firat, 2016)

Bukti:

- (i) Misalkan $x, y \in R$.

$$\begin{aligned} \text{Maka kita punya } f(x, y) &= f(x, 1 * y) \\ &= f(x, 1) * y. \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } f(x, y) = f(x, 1) * y.$$

- (ii) Misalkan $x, y \in R$.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x, 1) * y \\ &= 1 * y \\ &= y. \end{aligned}$$

- (iii) Misalkan $x, y, z \in R$.

$$\begin{aligned} f(x, y * z) &= f(x, y) * z \\ f(x, y) * z &\leq f(x, y), \text{ dan} \\ f(x, y) * z &\leq z. \end{aligned}$$

$$\text{Maka, diperoleh } f(x, y) * z \leq f(x, y) + z.$$

$$\text{Karena } f(x, y * z) = f(x, y) * z.$$

Maka,

$$f(x, y * z) \leq f(x, y) + z.$$

Definisi 3.17

Misalkan R aljabar incline. Pemetaan simetrik $f(.,.): R \times R \rightarrow R$ pada aljabar incline R dengan elemen 0 dikatakan reguler jika $f(0, 0) = 0$.

(Ozbal & Firat, 2016)

Proposisi 3.18

Setiap bi-multiplier $*$ -simetrik adalah reguler.

(Ozbal & Firat, 2016)

Bukti:

Misalkan f suatu bi-multiplier $*$ -simetrik pada aljabar incline R dengan elemen nol. Maka diperoleh,

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= f(0, x * 0) \\ &= f(0, x) * 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Proposisi 3.19

Misalkan f suatu bi-multiplier $*$ -simetrik pada aljabar incline R . Jika $x \in \text{Fix}_{f,a}(R)$, maka $x * y \in \text{Fix}_{f,a}(R)$ untuk semua $y \in R$.

(Ozbal & Firat, 2016)

Bukti:

$$f(a, x) = x.$$

Misalkan $y \in R$ maka,

$$\begin{aligned} f(a, x * y) &= f(a, x) * y \\ &= x * y. \end{aligned}$$

Sehingga, diperoleh $x * y \in \text{Fix}_{f,a}(R)$.

Proposisi 3.20

Misalkan f suatu bi-multiplier $*$ -simetrik pada aljabar incline R dengan elemen nol. Jika $x \in \text{Ker}_f$, maka $x * y \in \text{Ker}_f$ untuk semua $y \in R$.

(Ozbal & Firat, 2016)

Bukti:

$$f(0, x) = 0.$$

Misalkan $y \in R$ maka,

$$\begin{aligned} f(0, x * y) &= f(0, x) * y \\ &= 0 * y \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sehingga, diperoleh $x * y \in \text{Ker}_f$.

Teorema 3.21

Misalkan f suatu bi-multiplier $*$ -simetrik pada aljabar incline integral R dengan elemen nol. Jika

$$f(0, x + y) = f(0, x) + f(0, y),$$

untuk semua $x, y \in R$, maka Ker_f ideal.

(Ozbal & Firat, 2016)

Bukti:

Misalkan $y \in R$ dan $x \neq 0 \in \text{Ker}_f$.

Sehingga $y \leq x$ maka,

$$\begin{aligned} 0 &= f(0, x). \\ &= f(0, x + (y * x)). \\ &= f(0, x) + f(0, y * x). \\ &= f(0, x) + f(0, y) * x. \\ &= 0 + f(0, y) * x. \\ &= f(0, y) * x. \end{aligned}$$

Karena R aljabar incline integral, $x \neq 0$, diperoleh $f(0, y) = 0$.

Sehingga diperoleh $y \in \text{Ker}_f$.

Ker_f adalah ideal.

Proposisi 3.22

Misalkan R aljabar incline dengan elemen nol dan f suatu bi-multiplier $+$ -simetrik pada R . Maka untuk semua $x, y \in R$ berlaku:

- (i) $y \leq f(x, y)$.
 - (ii) $f(x, 0) + y \leq f(x, y)$.
 - (iii) jika $f(0, 0) = 0$, maka $x \leq f(0, x)$.
- (Ozbal & Firat, 2016)

Bukti:

- (i) Misalkan $x, y \in R$.

$$f(x, y) = f(x, y + y).$$

$$= f(x, y) + y.$$

$$y \leq f(x, y).$$
- (ii) Misalkan $x, y \in R$.

$$f(x, y) + f(x, y) = (f(x, 0) + y) + f(x, y).$$

$$f(x, y) = (f(x, 0) + y) + f(x, y).$$

$$f(x, 0) + y \leq f(x, y).$$
- (iii) Misalkan $x, y \in R$.
 Tetapkan $x = 0$ dan $y = x$.

$$f(0, 0) + x \leq f(0, x).$$

$$0 + x \leq f(0, x).$$

$$x \leq f(0, x).$$

Proposisi 3.23

Misalkan f suatu bi-multiplier $+$ -simetrik pada aljabar incline.

Jika $x \in \text{Fix}_{f,a}(R)$, maka $x + y \in \text{Fix}_{f,a}(R)$ untuk semua $y \in R$.

(Ozbal & Firat, 2016)

Bukti:

$f(a, x) = x$.
 Misalkan $y \in R$ maka,

$$f(a, x + y) = f(a, x) + y.$$

$$= x + y.$$

Sehingga, diperoleh $x + y \in \text{Fix}_{f,a}(R)$.

Proposisi 3.24

Misalkan f suatu bi-multiplier $+$ -simetrik pada aljabar incline dengan kanselatif kanan.

Jika $x + y \in \text{Fix}_{f,a}(R)$ dan $y \in \text{Fix}_{f,a}(R)$, maka $x \in \text{Fix}_{f,a}(R)$.

(Ozbal & Firat, 2016)

Bukti:

Misalkan f suatu bi-multiplier $+$ -simetrik pada aljabar incline, $x + y \in \text{Fix}_{f,a}(R)$ dan $y \in \text{Fix}_{f,a}(R)$ maka,

$$x + y = f(a, x + y).$$

$$= f(a, x) + y.$$

Karena R kanselatif kanan maka diperoleh:

$f(a, x) = x$.

Jadi, $x \in \text{Fix}_{f,a}(R)$.

4. PENUTUP

Simpulan

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan sifat-sifat bi-multiplier $*$ dan $+$ -simetrik pada aljabar incline adalah sebagai berikut:

- a. Misalkan R aljabar incline dengan identitas perkalian 1 dan f suatu bi-multiplier $*$ -simetrik pada R . Maka untuk semua $x, y, z \in R$ berlaku:
 - (i) $f(x, y) = f(x, 1) * y$.
 - (ii) jika $f(x, 1) = 1$, maka $f(x, y) = y$.
 - (iii) $f(x, y * z) \leq f(x, y) + z$.
- b. Setiap bi-multiplier $*$ -simetrik adalah reguler.
- c. Misalkan f suatu bi-multiplier $*$ -simetrik pada aljabar incline R . Jika $x \in \text{Fix}_{f,a}(R)$, maka $x * y \in \text{Fix}_{f,a}(R)$ untuk semua $y \in R$.
- d. Misalkan f suatu bi-multiplier $*$ -simetrik pada aljabar incline R dengan elemen nol. Jika $x \in \text{Ker}_f$, maka $x * y \in \text{Ker}_f$ untuk semua $y \in R$.
- e. Misalkan f suatu bi-multiplier $*$ -simetrik pada aljabar incline integral R dengan elemen nol. Jika $f(0, x + y) = f(0, x) + f(0, y)$, untuk semua $x, y \in R$, maka Ker_f ideal.
- f. Misalkan R aljabar incline elemen nol dan f suatu bi-multiplier $+$ -simetrik pada R . Maka untuk semua $x, y \in R$ berlaku:
 - (i) $y \leq f(x, y)$.
 - (ii) $f(x, 0) + y \leq f(x, y)$.
 - (iii) jika $f(0, 0) = 0$, maka $x \leq f(0, x)$.
- g. Misalkan f suatu bi-multiplier $+$ -simetrik pada aljabar incline. Jika $x \in \text{Fix}_{f,a}(R)$, maka $x + y \in \text{Fix}_{f,a}(R)$ untuk semua $y \in R$.
- h. Misalkan f suatu bi-multiplier $+$ -simetrik pada aljabar incline dengan kanselatif kanan. Jika $x + y \in \text{Fix}_{f,a}(R)$ dan $y \in \text{Fix}_{f,a}(R)$, maka $x \in \text{Fix}_{f,a}(R)$.

Saran

Pada skripsi ini, penulis hanya membahas tentang sifat-sifat bi-multiplier $*$ -dan $+$ -simetrik pada aljabar incline. Penulis menyarankan bagi pembaca untuk mengkaji lebih dalam mengenai bisa atau tidaknya terbentuk aljabar incline baru dari pasangan aljabar incline yang sudah ada.

DAFTAR PUSTAKA

- Cao, Z., Kim, K., & Roush, F. (1984). *Incline Algebra and Applications*. Chichester, UK: Ellis Horwood Limited.

- Firat, A., & Ozbal, S. A. (2016). On Symmetric Bi-Multipliers of Incline Algebras. *International Mathematical Forum*, 189-196.
- Gallian, J. A. (2010). *Contemporary Abstract Algebra. Seventh Edition*. Duluth: University of Minnesota Duluth.
- Manuharawati. (2013). *Analisis Real I*. Surabaya: Zifatama Publisher.
- Masriyah. (2015). *Dasar- Dasar Matematika*. Surabaya: Unesa University Press.
- Mikhalev, A. V., & Pilz, G. F. (2002). *The Concise Handbook of Algebra*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Thomas, G., Weir, M., & Hass, J. G. (2004). *Thomas' Calculus*. New York: Pearson Education.

