MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika *Volume 7 No. 2 Tahun 2019*
ISSN 2301-9115

TEOREMA TITIK TETAP DI RUANG BERNORMA-n NORMAL

Vika Dwi Yulianti
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : vikayulianti@mhs.unesa.ac.id

Manuharawati
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail **:** manuharawati@unesa.ac.id

Abstrak

Diketahui ruang bernorma-n pada X, $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ dan pemetaan $T: X \to X$ merupakan nonekspansif. Titik $x \in X$ disebut titik tetap pada pemetaan T jika dan hanya jika $T(x) = x$. Ruang bernorma-n merupakan generalisasi dari ruang norma. Ruang bernorma-n normal merupakan ruang bernorma-n yang memenuhi kondisi normal sehingga dirasa perlu menganalisis eksistensi titik tetap pada pemetaan nonekspansif di ruang bernorma-n normal. Hasil penelitian menjelaskan mengenai definisi dari struktur normal dan sifat-sifatnya pada ruang bernorma-n. Teorema titik tetap pada pemetaan nonekspansif terbukti melalui kondisi struktur normal di ruang bernorma-n normal.

Kata kunci: titik tetap, ruang bernorma-n, struktur normal, pemetaan nonekspansif

Abstract

Given n-normed space in $X, (X, \| \cdot, \dots, \cdot \|)$ and $T: X \to X$ are nonexpansive mapping. The point $x \in X$ is called a fixed point on the mapping T if and only if $T(x) = x$. n-normed space is a generalization of the norm space. Normal n-normed space is a n-normed space that satisfies normal conditions so it is necessary to analyze the existence of fixed points for nonexpansive mapping in normal n-normed space. The results of the study explain the definition of normal structure and its properties in n-normed space. Fixed point theorems for nonexpansive mapping are proved via the normal structure conditions in n-normed spaces.

Keywords : fixed point; n-normed space; normal structure; nonexpansive mapping

1. PENDAHULUAN

Matematika dibagi menjadi beberapa cabang, salah satunya ialah analisis. Cabang analisis sendiri dibagi menjadi dua, yaitu analisis klasik dan analisis modern. Pada analisis klasik menjelaskan tentang kekontinuan, sistem bilangan, kekonvergenan suatu deret maupun kekonvergenan suatu barisan, pengintegralan dan pendiferensial. Sedangkan pada analisis modern menjelaskan tentang konsep yang bersifat abstrak dan bekerja pada konsep ruang. Salah satunya yang dibahas pada analisis modern ialah suatu studi tentang ruang bernorma atau yang biasa dikenal dengan analisis fungsional.

Pada tahun 1964 G$\ddot{a}$hler memperkenalkan suatu konsep tentang ruang bernorma-2 dan diperluas menjadi konsep ruang bernorma-n. Beberapa ilmuwan seperti Iseki dan Gunawan juga membahas tentang teorema titik tetap serta membuktikan teorema titik tetap di ruang bernorma-n (Meng & Song, 2017). Titik tetap (*fixed point*) mempunyai peranan penting dalam analisis fungsional. Terdapat banyak masalah matematis yang dapat dipecahkan dengan menggunakan prinsip titik tetap. Beberapa diantaranya ialah persamaan linier, persamaan integral, persamaan diferensial biasa, dan persamaan diferensial parsial. Salah satu metode untuk menyelesaikan problem matematika ialah dengan menggunakan titik tetap. Keberadaan titik tetap (*fixed point*) untuk suatu fungsi juga telah banyak dikaji oleh para ahli.

Salah satu teorema titik tetap yang penulis bahas ialah teorema titik tetap di ruang bernorma-n normal. Pada teorema tersebut, keberadaan titik tetap terjamin kebenarannya untuk fungsi yang nonekspansif dan terdefinisi pada ruang normal. Pada tahun 1965, F. Browder membuktikan bahwa jika K adalah bagian konveks tertutup terbatas dari ruang Banach konveks seragam, dan $T: K \to K$ adalah pemetaan nonekspansif, maka T mempunyai sebuah titik tetap di K. Pada tahun 2015, K. Matsuzaki menunjukkan generalisasi dari konveks seragam di teori grup geometri dan membuktikan sifat titik tetap. Struktur normal memainkan peran penting pada beberapa kasus dari teori titik tetap. Berdasarkan hasil tersebut, rumus dari struktur normal dan perumumannya dapat diaplikasikan untuk membuktikan teorema titik tetap pada pemetaan nonekspansif di ruang bernorma-n normal (Meng & Song, 2017). Oleh karena itu, penulis tertarik untuk membahas teorema titik tetap di ruang bernorma-n normal.

2. KAJIAN TEORI

Ruang Vektor

Definsi 2.1 Misalkan V suatu himpunan tak kosong dan $\mathbb{R}$ menyatakan himpunan skalar real. V dikatakan ruang vektor atas $\mathbb{R}$ jika memenuhi:

1. $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in V$, untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$
2. $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$, untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$
3. $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$, untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$
4. Terdapat $\mathbf{0} \in V$ sehingga $\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}$, untuk setiap $\boldsymbol{x} \in V$
5. Untuk setiap $\boldsymbol{x} \in V$, terdapat $-\boldsymbol{x} \in V$ sehingga $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$
6. $\alpha\boldsymbol{x} \in V$, untuk setiap $\boldsymbol{x} \in V$ dan untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$
7. $\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}$, untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ dan untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$
8. $(\alpha+\beta)\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}$, untuk setiap $\boldsymbol{x} \in V$ dan untuk setiap $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
9. $(\alpha\beta)\boldsymbol{x}=\alpha(\beta\boldsymbol{x})$, untuk setiap $\boldsymbol{x} \in V$ dan untuk setiap $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
10. Terdapat 1 sebagai unsur identitas perkalian sehingga $1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$, untuk setiap $\boldsymbol{x} \in V$.

(Hefferon, Linear Algebra Third Edition, 2009)

Bebas Linier dan Bergantung Linear

Definisi 2.2 Diberikan ruang vektor V. Jika $S=\{\boldsymbol{s_1}, \boldsymbol{s_2}, \ldots, \boldsymbol{s_n}\}$ merupakan suatu himpunan vektor-vektor di dalam ruang vektor V. S dikatakan bebas linier di ruang vektor V jika persamaan vektor

$$k_1\boldsymbol{s_1}+k_2\boldsymbol{s_2}+\cdots+k_n\boldsymbol{s_n}=\mathbf{0}$$

dipenuhi hanya bila $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$.

Jika tidak demikian maka S dikatakan bergantung linier.

(Hefferon, Linear Algebra, 2009)

Ruang Bernorma

Definisi 2.3 Misalkan V ruang vektor atas $\mathbb{R}$. Suatu fungsi $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ disebut norma pada V, jika untuk setiap $x, y \in V$ dan $c \in \mathbb{R}$ berlaku

1) $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$
2) $\|\boldsymbol{x}\|=0$ jika dan hanya jika $x=\mathbf{0}$
3) $\|c\boldsymbol{x}\|=|c|\|\boldsymbol{x}\|$
4) $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$

Suatu ruang vektor yang dilengkapi norma disebut ruang bernorma. Ruang bernorma tersebut dinotasikan dengan $(V, \|\cdot\|)$.

(Rynne & Youngson, 2000)

Himpunan Terbuka dan Himpunan Tertutup

Definisi 2.4 Jika (X, d) adalah ruang metrik, $x \in X$ dan $r \in \mathbb{R}, r>0$, maka

1. $B_x(r)=\{y \in X | d(x,y)<r\}$ disebut bola terbuka
2. $B_x(r)=\{y \in X | d(x,y) \leq r\}$ disebut bola tertutup.

(Rynne & Youngson, 2000)

Himpunan Konveks

Definisi 2.5 Diberikan ruang vektor V. Suatu himpunan $K \subset V$ dikatakan konveks jika diberikan sebarang $x_1, x_2 \in K$, maka $\alpha x_1+(1-\alpha)x_2 \in K$ untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha=[0,1]$.

(Luenberger, 1969)

Definisi 2.6 Misalkan S adalah sebarang himpunan di ruang vektor. Penutup konveks atau *Convex hull* S yang dinotasikan $Co(S)$ dapat didefinisikan sebagai irisan semua himpunan konveks yang memuat S.

(Luenberger, 1969)

Himpunan Perentang

Definisi 2.7 Misalkan V suatu ruang vektor atas $\mathbb{R}$ dan $S=\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ adalah himpunan bagian dari V. S dikatakan merentang V jika setiap vektor $\boldsymbol{v}$ di V dapat disajikan sebagai kombinasi linear vektor-vektor di S.

(Hefferon, 2009)

Sifat-sifat determinan:

Misal X, Y adalah matriks berukuran $n \times n$, maka

1. $\det(XY)=\det(X)\det(Y)$.
2. $\det(X^T)=\det(Y)$.
3. Jika X matrik diagonal, maka determinannya ialah perkalian dari semua entri pada diagonal utama.
4. Jika X matrik segitiga, maka determinannya ialah perkalian dari semua entri pada diagonal utama.
5. Jika $X_{n\times n}$, maka $\det(cX)=k^n\det(cX)$.
6. $\det(X^{-1})=\frac{1}{\det(X)}$.
7. Jika X memuat baris yang nol atau kolom yang nol, maka determinannya sama dengan nol.
8. Pada operasi baris elementer (OBE), determinan memiliki sifat:
   a. Jika X' didapat dari X dengan cara mengalikan satu baris pada X dengan konstanta c tidak nol, maka $\det(X')=c\det(X)$
   b. Jika X' didapat dari X dengan cara menukar dua baris, maka $\det(X')=\det(X)$

c. Jika X' didapat dari X dengan cara menjumlahkan kelipatan satu baris dengan baris yang lain, maka $\det(X') = \det(X)$

9. Jika X memuat dua baris yang berkelipatan atau dua kolom yang berkelipatan, maka determinannya sama dengan nol.

('Imrona, 2002)

Ruang Bernorma-n

Definisi 2.8 Diberikan n bilangan asli ($n \in \mathbb{N}$) dan X merupakan ruang vektor atas $\mathbb{R}$ dengan dim $(X) \geq n$. Fungsi bernilai real $\|\cdot,\dots,\cdot\|$ pada X^n disebut norma-n jika untuk setiap $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n} \in X$ memenuhi 4 sifat berikut:

1) $\| \boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_n} \| = 0$ jika dan hanya jika $\{\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n}\}$ bergantung linier pada X,
2) $\| \boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_n} \|$ invarian di bawah permutasi pada $\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_n}$.
3) $\| \alpha\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_{n-1}}, \boldsymbol{x_n} \| = |\alpha| \| \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_{n-1}}, \boldsymbol{x_n} \|$ untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$,
4) $\| \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n} \| \leq \| \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n} \| + \| \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n} \|$.

   Pasangan $(X, \|\cdot,\dots,\cdot\|)$ disebut suatu ruang bernorma-n pada X.

(Manuharawati & Jakfar, 2017)

Himpunan Terbatas

Definisi 2.9 Diberikan E ruang bernorma-n. Himpunan tak kosong K dikatakan terbatas di E jika ada $M \in \mathbb{R}, M > 0$ sehingga

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n}\| \leq M$$

untuk setiap $\boldsymbol{x} \in K, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n} \in E$.

(Gunawan, Neswan, & Sukaesih, 2015)

Pemetaan Nonekspansif

Definisi 2.10 Diberikan E ruang bernorma-n dan $C = \{\boldsymbol{c_1}, \dots, \boldsymbol{c_n}\}$ adalah kumpulan n vektor bebas linier di E. Pemetaan $T: E \to E$ merupakan pemetaan nonekspansif terhadap C, jika untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$ dan $\{i_2, \dots, i_n\} \subseteq \{1,2,\dots,n\}$ berlaku

$$\left\|T(\boldsymbol{x}) - T(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{c_{i_2}}, \dots, \boldsymbol{c_{i_n}}\right\| \leq \left\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{c_{i_2}}, \dots, \boldsymbol{c_{i_n}}\right\|.$$

(Meng & Song, 2017)

Titik Tetap

Definisi 2.11 Diberikan pemetaan $T: X \to X$. Titik x adalah titik tetap T jika $x \in X$ dengan $T(x) = x$.

(Kreyszig, 1978)

Supremum dan Infimum

Definisi 2.12 Diberikan $A \subset \mathbb{R}$. Elemen $\alpha \in \mathbb{R}$ disebut batas atas terkecil (supremum) A dan dinotasikan dengan $\sup A$ jika:

(i) Untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ berlaku $a \leq \alpha$ (α batas atas A),

(ii) Jika u sebarang batas atas A maka $\alpha \leq u$.

Definisi 2.13 Diberikan $A \subset \mathbb{R}$. Elemen $\beta \in \mathbb{R}$ disebut batas bawah terbesar (infimum) A dan dinotasikan dengan $\inf A$ jika:

(i) Untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ berlaku $\beta \leq a$ (β batas bawah A),

(ii) Jika t sebarang batas bawah A maka $t \leq \beta$.

(Manuharawati, 2013)

Himpunan Urutan Parsial dan Rantai

Definisi 2.14 Suatu himpunan terurut parsial merupakan suatu himpunan $M, M \neq \emptyset$ dimana terdapat definisi terurut parsial, ditulis $a \leq b$ dan memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $a \leq a$
2. Jika $a \leq b$ dan $b \leq c$, maka $a \leq c$
3. Jika $a \leq b$ dan $b \leq a$, maka $a = b$

Karena parsial, maka M mungkin memuat elemen a dan b dengan $a \nleq b$ atau $b \nleq a$. Maka a, b dikatakan elemen yang tak sebanding. Dan sebaliknya, elemen a dan b dikatakan elemen sebanding jika $a \leq b$ atau $b \leq a$.

Suatu himpunan terurut total atau rantai merupakan suatu himpunan terurut parsial sehingga setiap dua elemen pada himpunan tersebut dapat dibandingkan. Atau disebut juga suatu himpunan terurut parsial yang tidak memiliki elemen yang tak sebanding.

Suatu batas atas dari himpunan bagian W pada himpunan terurut parsial M merupakan sebuah elemen $u \in M$ sehingga

$x \leq u$ untuk setiap $x \in W$.

$m \in M$ disebut elemen maksimal pada M jika

$m \leq x$ mengakibatkan $m = x$

Dengan menggunakan konsep di atas, dapat dirumuskan lemma zorn yang dianggap sebagai sebuah aksioma.

Lemma Zorn

Diberikan $M \neq \emptyset$ himpunan terurut parsial. Misalkan setiap rantai $C \subset M$ mempunyai batas bawah. Maka setidaknya M memiliki satu elemen minimal.

(Kreyszig, 1978)

3. PEMBAHASAN

Ruang bernorma-n Normal

Diberikan $(E, \|\cdot,\dots,\cdot\|)$ ruang bernorma-n dan $C = \{\boldsymbol{c_1}, \dots, \boldsymbol{c_n}\}$ adalah kumpulan n vektor bebas linier di E.

Definisi 3.1 Diberikan E suatu ruang bernorma-n. Diameter dari suatu himpunan bagian terbatas $K \subseteq E$ dinotasikan dengan $\delta(K)$, didefiniskan sebagai

$$\delta(K) = \sup \{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n}\| : \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in K\} \text{ dan } \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n} \in E$$

(Meng & Song, 2017)

Berdasarkan sifat norma-n N. 4),

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n}\| = \|\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{y}), \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n}\| \leq \| \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n} \| + \| -\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n} \|$$

Berdasarkan sifat norma-n N. 3),

$$\| \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n} \| + \| -\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n} \| = \| \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n} \| + |-1| \, \| \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n} \|$$

Karena $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in K$ dan K terbatas, maka ada $M \in \mathbb{R}, M > 0$ sehingga

$$\| \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n} \| + |-1| \, \| \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n} \| \leq M + M$$
$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n}\| \leq 2M$$

Maka K terbatas.

Definisi 3.2 Diberikan E suatu ruang bernorma-n. E dikatakan ruang bernorma-n konveks seragam terhadap C jika untuk sebarang $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, ada $\delta \in \mathbb{R}, \delta = \delta(C, \varepsilon) > 0$, sehingga untuk semua $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S_C(E)$, dengan $S_C(E) = \{\boldsymbol{e} \in E : \|\boldsymbol{e}, \boldsymbol{c_{i_2}}, \dots, \boldsymbol{c_{i_n}}\| = 1\}$, $\{i_2, \dots, i_n\} \subseteq \{1,2, \dots, n\}$, dan

$$\left\|\frac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}{2}, \boldsymbol{c_{i_2}}, \dots, \boldsymbol{c_{i_n}}\right\| > 1-\delta$$

berlaku,

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, \boldsymbol{c_{i_2}}, \dots, \boldsymbol{c_{i_n}}\| < \varepsilon$$

Jika untuk sebarang $C \subseteq E$, E merupakan ruang bernorma-n konveks seragam terhadap C, maka E disebut ruang bernorma-n konveks seragam.

(Meng & Song, 2017)

Definisi 3.3 Diberikan E suatu ruang bernorma-n. E disebut ruang bernorma-n konveks seragam di setiap arah terhadap C, jika untuk sebarang $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ dan $\boldsymbol{z} \in E - \{\boldsymbol{0}\}$, ada $\delta \in \mathbb{R}, \delta = \delta(C, \varepsilon, z) > 0$ sehingga jika $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S_C(E)$, $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} = \lambda \boldsymbol{z}$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\left\|\frac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}{2}, \boldsymbol{c_{i_2}}, \dots, \boldsymbol{c_{i_n}}\right\| > 1-\delta$$

berlaku $|\lambda| < \varepsilon$.

Jika untuk sebarang $C \subseteq E$, E merupakan ruang bernorma-n konveks seragam di setiap arah terhadap C, maka E disebut ruang bernorma-n konveks seragam di setiap arah.

(Meng & Song, 2017)

Proposisi 3.1 Jika E merupakan ruang bernorma-n konveks seragam terhadap C, maka E merupakan ruang bernorma-n konveks seragam di setiap arah terhadap C.

Bukti:

Untuk sebarang $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ dan $\boldsymbol{z} \in E - \{\boldsymbol{0}\}$, misalkan $\varepsilon' = \varepsilon \cdot \|\boldsymbol{z}, \boldsymbol{c_{i_2}}, \dots, \boldsymbol{c_{i_n}}\|$.

Karena E merupakan ruang bernorma-n konveks seragam terhadap C, maka terdapat $\delta = \delta(C, \varepsilon') > 0$, sehingga untuk $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S_C(E)$, $\boldsymbol{z} \in E - \{\boldsymbol{0}\}, x - y = \lambda z$,

$$\left\|\frac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}{2}, \boldsymbol{c_{i_2}}, \dots, \boldsymbol{c_{i_n}}\right\| > 1-\delta$$

oleh karena itu

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, \boldsymbol{c_{i_2}}, \dots, \boldsymbol{c_{i_n}}\| < \varepsilon'.$$

Sehingga diperoleh $|\lambda| < \varepsilon'$, karena $\varepsilon' = \varepsilon \cdot \|\boldsymbol{z}, \boldsymbol{c_{i_2}}, \dots, \boldsymbol{c_{i_n}}\|$, maka

$|\lambda| < \varepsilon \cdot \|\boldsymbol{z}, \boldsymbol{c_{i_2}}, \dots, \boldsymbol{c_{i_n}}\|$

$|\lambda| < \varepsilon$.

Jadi E merupakan ruang bernorma-n konveks seragam di setiap arah terhadap C.■

Definisi 3.4 Diberikan E ruang bernorma-n, modulus berarah konveksitas terhadap C pada E, dinotasikan $\delta_C^E(\boldsymbol{z}, \varepsilon)$, $\boldsymbol{z} \in E$ dan didefinisikan sebagai:

$$\delta_C^E(\boldsymbol{z}, \varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \frac{\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{c_{i_2}}, \dots, \boldsymbol{c_{i_n}}\|}{2} : \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in B_C(E), \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, \boldsymbol{c_{i_2}}, \dots, \boldsymbol{c_{i_n}}\| > \varepsilon, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} = t\boldsymbol{z}, t \in R \right\}$$

dengan ε adalah sebarang bilangan real, $\varepsilon > 0$, $B_C(E) = \{\boldsymbol{e} \in E : \|\boldsymbol{e}, \boldsymbol{c_{i_2}}, \dots, \boldsymbol{c_{i_n}}\| \leq 1\}$ dan $\{i_2, \dots, i_n\} \subseteq \{1,2, \dots, n\}$.

(Meng & Song, 2017)

Proposisi 3.2 Untuk $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, jika $\delta_C^E(z, \varepsilon) > 0$, maka E merupakan ruang bernorma-n konveks seragam di setiap arah terhadap C.

Bukti:

Misal ε adalah sebarang bilangan real dengan $\varepsilon > 0$. z adalah sebarang elemen di E.

$$\delta_C^E(\boldsymbol{z}, \varepsilon) = \inf \left\{ \begin{array}{c} 1 - \frac{\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{c_{i_2}}, \dots, \boldsymbol{c_{i_n}}\|}{2} : \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in B_C(E), \\ \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, \boldsymbol{c_{i_2}}, \dots, \boldsymbol{c_{i_n}}\| > \varepsilon, \\ \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} = t\boldsymbol{z}, t \in R \end{array} \right\} > 0$$

$B_C(E) = \{\boldsymbol{e} \in E : \|\boldsymbol{e}, \boldsymbol{c_{i_2}}, \dots, \boldsymbol{c_{i_n}}\| \leq 1\}$ dan $\{i_2, \dots, i_n\} \subseteq \{1,2, \dots, n\}$.

jika $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in B_C(E)$, $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} = t\boldsymbol{z}$, $t \in \mathbb{R}$,

$$\left\|\frac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}{2}, \boldsymbol{c_{i_2}}, \dots, \boldsymbol{c_{i_n}}\right\| > 1-\delta$$

maka $|t| < \varepsilon$. Jadi E merupakan ruang bernorma-n konveks seragam di setiap arah terhadap C.■

Definisi 3.5 Suatu ruang E bernorma-n dikatakan mempunyai struktur normal terhadap C jika untuk setiap himpunan bagian tertutup, terbatas, dan konveks $K \subseteq E$ dengan $\delta(K) > 0$ terhadap C, maka ada $\boldsymbol{u} \in K$ dan $\{i_2, \dots, i_n\} \subseteq \{1,2,\dots,n\}$, sehingga

$$sup_{\boldsymbol{x}\in K}\left\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}, \boldsymbol{c}_{i_2}, \dots, \boldsymbol{c}_{i_n}\right\| \leq \delta(K).$$

Jika untuk sebarang $C \subseteq E$, E mempunyai struktur normal terhadap C, maka E dikatakan mempunyai struktur normal.

(Meng & Song, 2017)

Lemma 3.1 Diberikan E suatu ruang bernorma-n. $K \subseteq E$ merupakan himpunan bagian tertutup terbatas tak kosong dan konveks terhadap C $(C \notin span\, K)$ dan $T: K \to K$. Jika K memiliki sifat irisan (barisan turun suatu himpunan bagian tertutup tak kosong K mempunyai irisan tak kosong), maka ada paling sedikit satu T-invarian, himpunan bagian tertutup terbatas tak kosong dan konveks terhadap C.

Bukti:

Misalkan F_C merupakan keluarga himpunan bagian K T-invarian tertutup terbatas tak kosong dan konveks terhadap C. Karena K mempunyai sifat irisan, maka berdasarkan Lemma Zorn yaitu jika diberikan $F_C \neq \emptyset$ himpunan terurut parsial. Misalkan setiap rantai $T \subset F_C$ mempunyai batas bawah. Maka setidaknya F_C memiliki satu elemen minimal. Artinya terdapat paling sedikit satu himpunan bagian T-invarian tertutup terbatas tak kosong dan konveks terhadap C. ■

Lemma 3.2 Jika D adalah elemen minimal, maka *convex hull* tertutup pada $T(D)$ terhadap C adalah D.

Bukti:

Karena D merupakan elemen minimal, maka berdasarkan Lemma 3.1, D merupakan T-invarian, $T(D) \subseteq D$. Sehingga

T *convex hull* tertutup pada $T(D)$ terhadap $C \subseteq T(D)$ $\subseteq$ *convex hull* tertutup pada $T(D)$ terhadap C.

Sehingga *convex hull* tertutup pada $T(D)$ terhadap C merupakan T-invarian. Berdasarkan minimalitas D dan D merupakan T-invarian, maka D merupakan *convex hull* tertutup $T(D)$ terhadap C. ■

Titik Tetap di Ruang Bernorma-n Normal

Teorema 3.1 Diberikan E ruang bernorma-n dan $K \subseteq E$ merupakan himpunan bagian terbatas tertutup tak kosong dan konveks terhadap C $(C \notin span\, K)$ yang mempunyai sifat irisan. Jika E mempunyai struktur normal, maka pemetaan nonekspansif $T: K \to K$ mempunyai sebuah titik tetap.

Bukti:

Berdasarkan Lemma 3.1, diperoleh elemen minimal D.

- Kasus 1: Jika $\delta(D) = 0$, maka $D = \{\boldsymbol{x_0}\}$ sehingga $T(\boldsymbol{x_0}) = \boldsymbol{x_0}$. Terbukti bahwa $T: D \to D$ mempunyai sebuah titik tetap.
- Kasus 2: Jika $\delta(D) \neq 0$, maka D mempunyai lebih dari satu titik. Karena E mempunyai struktur normal, maka berdasarkan Definisi 3.5 ada $\boldsymbol{u} \in D$, sehingga

$$\alpha = sup_{\boldsymbol{x}\in D}\left\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}, \boldsymbol{c}_{i_2}, \dots, \boldsymbol{c}_{i_n}\right\| < \delta(D). \quad (3.1)$$

Untuk setiap $\boldsymbol{x} \in D$

$$\left\|T(\boldsymbol{u}) - T(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{c}_{i_2}, \dots, \boldsymbol{c}_{i_n}\right\| \leq \left\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_{i_2}, \dots, \boldsymbol{c}_{i_n}\right\| < \alpha$$

sehingga $T(\boldsymbol{u}), T(\boldsymbol{x}) \in D$. Karena x sebarang, maka diperoleh

$$T(D) \subseteq B_C(T(\boldsymbol{u}), \alpha) = \left\{\boldsymbol{y} \in D : \left\|T(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{c}_{i_2}, \dots, \boldsymbol{c}_{i_n}\right\| < \alpha\right\}. \quad (3.2)$$

Misalkan $G = D \cap B_C(T(\boldsymbol{u}), \alpha)$, maka

1) G merupakan T-invarian,
2) $D \cap B_C(T(\boldsymbol{u}), \alpha) = B_C(T(\boldsymbol{u}), \alpha)$,
3) $T(\boldsymbol{u}) \in G$ merupakan himpunan bagian terbatas tertutup tak kosong dan konveks terhadap C.
4) Karena D elemen minimal, maka

$$D \subset B_C(T(\boldsymbol{u}), \alpha)$$
$$D = B_C(T(\boldsymbol{u}), \alpha)$$
$$D = G.$$

Karena $D = G$, maka $D \subseteq B_C(T(\boldsymbol{u}), \alpha)$, sehingga

$$sup_{\boldsymbol{y}\in D}\left\|T(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{c}_{i_2}, \dots, \boldsymbol{c}_{i_n}\right\| \leq \alpha. \quad (3.3)$$

Dibentuk

$$D' = \left\{\boldsymbol{z} \in D, sup_{\boldsymbol{y}\in D}\left\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}, \boldsymbol{c}_{i_2}, \dots, \boldsymbol{c}_{i_n}\right\| \leq \alpha\right\} \quad (3.4)$$

Maka diperoleh

1) $D' \subseteq D$, suatu himpunan terbatas tertutup tak kosong dan konveks terhadap C
2) $(T(\boldsymbol{u}) \in D')$.

Berdasarkan (3.1) sampai (3.4) diperoleh

$$\delta(D') \leq \alpha < \delta(D). \quad (3.5)$$

Karena (3.5), maka $D' \subsetneq D$.

Selanjutnya akan dibuktikan D' merupakan T-invarian.

Untuk setiap $\boldsymbol{w} \in D' \subsetneq D$, karena D elemen minimal, berdasarkan Lemma 3.2, diketahui D merupakan *convex hull* tertutup pada $T(D)$ terhadap C. Maka untuk setiap $y \in D$ dan untuk sebarang $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, ada $\boldsymbol{x_i} \in D$, $\lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, sehingga

$$\left\|\boldsymbol{y} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, T(\boldsymbol{x_i}), \boldsymbol{c}_{i_2}, \dots, \boldsymbol{c}_{i_n}\right\| < \varepsilon \quad (3.6)$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned}&\|T(\boldsymbol{w})-\boldsymbol{y},\boldsymbol{c}_{i_2},\dots,\boldsymbol{c}_{i_n}\|\\&\le\|T(\boldsymbol{w})-\textstyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i T(\boldsymbol{x}_i),\boldsymbol{c}_{i_2},\dots,\boldsymbol{c}_{i_n}\|+\\&\quad\|\textstyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i T(\boldsymbol{x}_i)-\boldsymbol{y},\boldsymbol{c}_{i_2},\dots,\boldsymbol{c}_{i_n}\|\\&\le\textstyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\|T(\boldsymbol{w})-T(\boldsymbol{x}_i),\boldsymbol{c}_{i_2},\dots,\boldsymbol{c}_{i_n}\|+\varepsilon\\&\le 1\|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{c}_{i_2},\dots,\boldsymbol{c}_{i_n}\|+\varepsilon\\&\le\alpha+\varepsilon.\end{aligned}$$

Maka $T(\boldsymbol{w})\in D'$. Kontradiksi dengan minimalitas D. Maka tidak ada $\delta(D)>0$, sehingga kasus 2 tidak mugkin terjadi. Berdasarkan kasus 1, terbukti bahwa $T:D\to D$ mempunyai sebuah titik tetap . ■

Lemma 3.3 Diberikan E ruang bernorma-n, $K\subseteq E$ merupakan himpunan bagian terbatas tertutup tak kosong dan konveks terhadap C yang mempunyai lebih dari satu titik, $\boldsymbol{z}\in S_C(E)$. Jika $\delta_C^E(\boldsymbol{z},1)>0$, maka E mempunyai struktur normal.

Bukti:

Karena $K\subseteq E$ mempunyai lebih dari satu titik, maka ada $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$ dan $\{i_2,\dots,i_n\}\subseteq\{1,2,\dots,n\}$, sehingga

$$sup_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in D}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{c}_{i_2},\dots,\boldsymbol{c}_{i_n}\|=\delta(K)$$

Untuk setiap $\varepsilon\in\mathbb{R},\varepsilon>0$, ada $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{c}_{i_2},\dots,\boldsymbol{c}_{i_n}\|\in D$ sehingga

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{c}_{i_2},\dots,\boldsymbol{c}_{i_n}\|\ge\delta(K)-\varepsilon$$

maka untuk setiap $\boldsymbol{u}\in K$,

$$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}_{i_2},\dots,\boldsymbol{c}_{i_n}\|\le\delta(K),$$
$$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{c}_{i_2},\dots,\boldsymbol{c}_{i_n}\|\le\delta(K),$$

Dan diberikan $\boldsymbol{z}=\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{c}_{i_2},\dots,\boldsymbol{c}_{i_n}\|}$, diperoleh

$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=\boldsymbol{z}\cdot\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{c}_{i_2},\dots,\boldsymbol{c}_{i_n}\|$$
$$\boldsymbol{u}-\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{y})=\boldsymbol{z}\cdot\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{c}_{i_2},\dots,\boldsymbol{c}_{i_n}\|$$

sehingga

$$\left\|\boldsymbol{u}-\frac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}{2},\boldsymbol{c}_{i_2},\dots,\boldsymbol{c}_{i_n}\right\|\le\delta(K)\left[1-\delta_C^E\left(z,\frac{\delta(K)-\varepsilon}{\delta(K)}\right)\right].$$

Berdasarkan kondisi $\delta_C^E(z,1)>0$ dapat disimpulkan untuk setiap $\boldsymbol{u}\in K$, ada $\frac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}{2}\in K$, sehingga

$$\left\|\boldsymbol{u}-\frac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}{2},\boldsymbol{c}_{i_2},\dots,\boldsymbol{c}_{i_n}\right\|<\delta(K).\ ■$$

Akibat 3.1 Diberikan E ruang bernorma-n konveks seragam di setiap arah dan $K\subseteq E$ himpunan bagian terbatas tertutup tak kosong dan konveks terhadap C $(C\notin span\ K)$ yang mempunyai sifat irisan. Jika $T:K\to K$ merupakan pemetaan nonekpansif, maka T mempunyai paling sedikit satu titik tetap.

Teorema 3.2 Diberikan E ruang bernorma-n konveks seragam di setiap arah dan $K\subseteq E$ himpunan bagian terbatas tertutup tak kosong dan konveks terhadap C $(C\notin span\ K)$ yang mempunyai sifat irisan. Jika untuk setiap $x,y\in K$ dan $x_2,\dots,x_n\in E, T:K\to K$ mengakibatkan

$$\begin{aligned}&\|T(x)-T(y),x_2,\dots,x_n\|\\&\le a\|x-y,x_2,\dots,x_n\|+b\|x-T(x),x_2,\dots,x_n\|+\\&\quad c\|x-T(y),x_2,\dots,x_n\|,\end{aligned}$$

$a+b+c=1$, maka T mempunyai paling sedikit satu titik tetap.

Bukti:

Berdasarkan Lemma 3.1, diperoleh elemen minimal D.

- Kasus 1: Jika $\delta(D)=0$, maka $D=\{\boldsymbol{x_0}\}$ sehingga $T(\boldsymbol{x_0})=\boldsymbol{x_0}$. Terbukti bahwa $T:D\to D$ mempunyai sebuah titik tetap.
- Kasus 2: Jika $\delta(D)\ne 0$, maka D mempunyai lebih dari satu titik. Karena E mempunyai struktur normal, maka berdasarkan Definisi 3.5 ada $\boldsymbol{u}\in D$, sehingga

$$\alpha=sup_{\boldsymbol{x}\in D}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u},\boldsymbol{c}_{i_2},\dots,\boldsymbol{c}_{i_n}\|<\delta(K)$$

untuk setiap $x\in D$

$$\begin{aligned}&\|T(\boldsymbol{u})-T(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{c}_{i_2},\dots,\boldsymbol{c}_{i_n}\|\\&\le a\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}_{i_2},\dots,\boldsymbol{c}_{i_n}\|+b\|\boldsymbol{u}-T(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{c}_{i_2},\dots,\boldsymbol{c}_{i_n}\|+\\&\quad c\|\boldsymbol{u}-T(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{c}_{i_2},\dots,\boldsymbol{c}_{i_n}\|\\&\le(a+b+c)\,sup_{\boldsymbol{x}\in D}\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}_{i_2},\dots,\boldsymbol{c}_{i_n}\|\\&\le\alpha\end{aligned}\qquad(3.1)$$

sehingga $T(\boldsymbol{u}),T(\boldsymbol{x})\in D$. Karena x sebarang, maka diperoleh

$$\begin{aligned}T(D)&\subseteq B_C(T(\boldsymbol{u}),\alpha)\\&=\{\boldsymbol{y}\in D:\|T(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{y},\boldsymbol{c}_{i_2},\dots,\boldsymbol{c}_{i_n}\|<\alpha\}\end{aligned}\qquad(3.2)$$

Misalkan $G=D\cap B_C(T(\boldsymbol{u}),\alpha)$, maka

1) G merupakan T-invarian,
2) $D\cap B_C(T(\boldsymbol{u}),\alpha)=B_C(T(\boldsymbol{u}),\alpha)$,
3) $T(\boldsymbol{u})\in G$ merupakan himpunan bagian terbatas tertutup tak kosong dan konveks terhadap C.
4) Karena D elemen minimal, maka

$$D\subset B_C(T(\boldsymbol{u}),\alpha)$$
$$D=B_C(T(\boldsymbol{u}),\alpha)$$
$$D=G.$$

Karena $D=G$, maka $D\subseteq B_C(T(\boldsymbol{u}),\alpha)$, sehingga

$$sup_{\boldsymbol{y}\in D}\|T(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{y},\boldsymbol{c}_{i_2},\dots,\boldsymbol{c}_{i_n}\|\le\alpha.\qquad(3.3)$$

Dibentuk

$$D'=\{\boldsymbol{z}\in D,sup_{\boldsymbol{y}\in D}\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{c}_{i_2},\dots,\boldsymbol{c}_{i_n}\|\le\alpha\}\qquad(3.4)$$

Maka diperoleh

1) $D'\subseteq D$, suatu himpunan terbatas tertutup tak kosong dan konveks terhadap C,
2) $(T(\boldsymbol{u})\in D')$.

Berdasarkan (3.1) sampai (3.4) diperoleh

$$\delta(D')\le\alpha<\delta(D).\qquad(3.5)$$

Karena (3.5), maka $D'\subsetneq D$.

Selanjutnya akan dibuktikan D' merupakan T-invarian.

Untuk setiap $\boldsymbol{w} \in D' \subsetneq D$, karena D elemen minimal, berdasarkan Lemma 3.2, diketahui D merupakan *convex hull* tertutup pada $T(D)$ terhadap C. Maka untuk setiap $y \in D$ dan untuk sebarang $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, ada $\boldsymbol{x_i} \in D$, $\lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, sehingga

$$\left\|\boldsymbol{y} - \textstyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, T(\boldsymbol{x_i}), \boldsymbol{c_{i_2}}, \dots, \boldsymbol{c_{i_n}}\right\| < \varepsilon. \qquad (3.6)$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned}
&\left\|T(\boldsymbol{w}) - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{c_{i_2}}, \dots, \boldsymbol{c_{i_n}}\right\| \\
&\quad \leq \left\|T(\boldsymbol{w}) - \textstyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, T(\boldsymbol{x_i}), \boldsymbol{c_{i_2}}, \dots, \boldsymbol{c_{i_n}}\right\| + \left\|\textstyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, T(\boldsymbol{x_i}) - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{c_{i_2}}, \dots, \boldsymbol{c_{i_n}}\right\| \\
&\quad \leq \textstyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left\|T(\boldsymbol{w}) - T(\boldsymbol{x_i}), \boldsymbol{c_{i_2}}, \dots, \boldsymbol{c_{i_n}}\right\| + \varepsilon \\
&\quad \leq \textstyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left[a\left\|\boldsymbol{w} - \boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{c_{i_2}}, \dots, \boldsymbol{c_{i_n}}\right\| + b\left\|\boldsymbol{x_i} - T(\boldsymbol{x_i}), \boldsymbol{c_{i_2}}, \dots, \boldsymbol{c_{i_n}}\right\| + c\left\|\boldsymbol{x_i} - T(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{c_{i_2}}, \dots, \boldsymbol{c_{i_n}}\right\|\right] + \varepsilon \\
&\quad \leq 1\left[(a+b+c)\, sup_{x\in D}\left\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{c_{i_2}}, \dots, \boldsymbol{c_{i_n}}\right\|\right] + \varepsilon \\
&\quad \leq \alpha + \varepsilon
\end{aligned}$$

Maka $T(\boldsymbol{w}) \in D'$. Kontradiksi dengan minimalitas D. Diketahui D hanya mempunyai satu titik yang telah ditetapkan oleh T, sehingga T setidaknya mempunyai sebuah titik tetap di $D \subseteq K$. ■

4. PENUTUP

Simpulan

Dari pembahasan yang telah diuraikan dalam skripsi ini, dapat diambil kesimpulan bahwa:

1. Jika E merupakan ruang bernorma-n konveks seragam terhadap C, maka E merupakan ruang bernorma-n konveks seragam di setiap arah terhadap C.
2. Untuk $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, jika $\delta_C^E(\boldsymbol{z}, \varepsilon) > 0$, maka E merupakan ruang bernorma-n konveks seragam di setiap arah terhadap C.
3. Jika diberikan E ruang bernorma-n dan $K \subseteq E$ merupakan himpunan bagian terbatas tertutup tak kosong dan konveks terhadap C $(C \notin span\, K)$ yang mempunyai sifat irisan dan E mempunyai struktur normal, maka pemetaan nonekspansif $T: K \to K$ mempunyai sebuah titik tetap.
4. Jika diberikan E ruang bernorma-n, $K \subseteq E$ merupakan himpunan bagian terbatas tertutup tak kosong dan konveks terhadap C yang mempunyai lebih dari satu titik, $\boldsymbol{z} \in S_C(E)$. Jika $\delta_C^E(\boldsymbol{z}, 1) > 0$, maka E mempunyai struktur normal.
5. Jika diberikan E ruang bernorma-n konveks seragam di setiap arah dan $K \subseteq E$ himpunan bagian terbatas tertutup tak kosong dan konveks terhadap C $(C \notin span\, K)$ yang mempunyai sifat irisan, untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in K$ dan $\boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n} \in E$, $T: K \to K$ mengakibatkan
$$\begin{aligned}&\|T(\boldsymbol{x}) - T(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n}\| \\ &\leq a\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n}\| + b\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n}\| + c\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{T}(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n}\|,\end{aligned}$$
$a + b + c = 1$, maka T mempunyai paling sedikit satu titik tetap.

Saran

Pada artikel ini, hanya dibahas mengenai ruang bernorma-n, struktur normal, dan ruang bernorma-n normal, serta teorema titik tetap pada pemetaan nonekspansif di ruang bernorma-n normal. Sehingga dapat dilakukan penelitian lebih lanjut mengenai sifat-sifat lain yang berlaku pada ruang bernorma-n normal dan mungkin dapat ditemukan kondisi pemetaan nonekspansif yang lain, kemudian diteliti ketunggalan titik tetapnya.

DAFTAR PUSTAKA

Gunawan, H., Neswan, O., & Sukaesih, E. (2015). FIXED POINT THEOREMS ON BOUNDED SETS IN AN n-NORMED SPACE. *Journal of Mathematical Analysis* , 51-58.

Hefferon, J. (2009). *Linear Algebra.* United States Of America: Virginia Commonwealth University.

Hefferon, J. (2009). *Linear Algebra Third Edition.* Vermont: Saint Michael's College Colchester.

'Imrona, M. (2002). *Aljabar Linier Elementer.* Bandung.

Kreyszig, E. (1978). *Introduction Functional Analysis with Applications.* New York: John Wiley & Sons.

Luenberger, D. G. (1969). *Optimization by Vector Spaces Methods.* New York: Published simultaneously in Canada.

Mahayati. (2016). Analisa Ketunggalan Titik Tetap Pada Pemetaan Kontaktif Di Ruang Metrik Lengkap Dengan Memanfaatkan Jarak-W. *Jurnal Matematika "Mantik"* , 8-16.

Manuharawati. (2013). *Analisis Real I.* Surabaya: Zifatama Publisher.

Manuharawati, & Jakfar, M. (2017). Thy-Angle In An n-Normed Space. *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)* , 979-994.

Meng, J., & Song, M. (2017). Fixed Point Theorems In Normal n-Normed Spaces. *Journal Math Comput Science* , 84-91.

Rynne, B. P., & Youngson, M. A. (2000). *Linear Functional Analysis.* Britain: Athenaeum Press Ltd.

Susilo. (2016). Teorema Titik Tetap Di Ruang Norm. *Skripsi* , Universitas Islam Negeri Malang.

Usman, M. .., & Olayiwola, M. (2009). Uniformly Convex Spaces. *sciencepub* , 74-85.