**MATH**unesa
**Jurnal Ilmiah Matematika** *Volume 7 No.2 Tahun 2019*
*ISSN 2301-9115*

# MODEL MATEMATIKA INTERAKSI MANGSA PEMANGSA DENGAN FUNGSI RESPON BEDDINGTON-DEANGELIS DAN PEMANENAN TERHADAP PEMANGSA

**Vernanda Aprilia**
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
*e*-mail : vernandaaprilia@mhs.unesa.ac.id

**Dian Savitri, S.Si., M.Si**
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
*e*-mail **:** diansavitri@unesa.ac.id

**Abstrak**

Penelitian ini membahas mengenai perilaku mangsa pemangsa dengan adanya pemanenan terhadap populasi pemangsa. Pemanenan pada dinamika mangsa pemangsa dapat menstabilkan keseimbangan kedua populasi agar tetap ada. Metode penelitian dengan mengkontruksi model matematika mangsa pemangsa yang mempertimbangkan pemanenan dengan upaya konstan. Laju pertumbuhan populasi mangsa mengikuti model pertumbuhan Lotka-Volterra, dengan pola interaksi menggunakan Beddington-DeAngelis. Laju pertumbuhan pemangsa menggunakan fungsi respon Beddington-DeAngelis dengan mempertimbangkan pemanenan.

**Kata kunci:** mangsa pemangsa, pemanenan, Beddington-DeAngelis

**Abstract**

This study discusses about predator-prey-behaviour with harvesting on predator population. Harvesting on the dynamics of predator-prey can stabilize the balance of both populations which still exists. The research method is done by constructing a mathematical model of predator-prey that consider harvesting with constant effort. The growth populations of prey follows the Lotka-Volterra growth model, with interaction system using Beddington-DeAngelis. The populations of predator growth rate uses the Beddington-DeAngelis responses funtions by considering harvesting.

**Keywords :** predator prey, harvesting, Beddington-DeAngelis

## 1. PENDAHULUAN

Model interaksi makhluk hidup dalam suatu ekosistem salah satu contohnya adalah model mangsa pemangsa. Predasi merupakan interaksi biologis di mana pemangsa memakan mangsanya (Roy et al., 2017). Hubungan interaksi antar mangsa pemangsa sangat erat sebab tanpa mangsa populasi pemangsa tidak dapat hidup. Sebaliknya, pemangsa juga berfungsi sebagai pengontrol populasi mangsa.

Pola interaksi antara mangsa dan pemangsa dalam penelitian ini memepertimbangkan interaksi kedua populasi tersebut yang dikenal sebagai fungsi respon Beddington-DeAngelis. Fungsi respon ini memberikan dekripsi bahwa pemangsaan tidak hanya bergantung pada populasi mangsa tetapi juga pada populasi pemangsa serta adanya batasan proteksi lingkungan (Haque, 2011).

Pemanenan pada model mangsa pemangsa menarik untuk dikaji dalam segi ekologi, karena adanya pemanenan dapat mencegah suatu populasi tidak berlebihan di populasi lain dan tetap dalam keadaan seimbang. Pemanenan sering dilakukan dalam perikanan, kehutanan, dan pengelolaan satwa liar (Xiao et al., 2006). Menurut Liu & Tang (2011) tujuan dari pemanenan ini memperoleh beberapa hasil yang secara teori bermanfaat untuk mempertahankan pengembangan ekosistem yang berkelanjutan serta menjaga perkembangan pemanenan dengan memperhatikan kelestarian fungsi lingkungan hidupnya.

Chakraborty et al (2012) mengkaji model mangsa pemangsa menggunakan fungsi respon rasio dependent yang mempertimbangkan pemanenan terhadap pemangsa. pemanenan yang digunakan peneliti adalah pemanenan dengan upaya konstan. Model interaksi yang digunakan peneliti adalah populasi bakteri bersel satu yaitu, *Paramecium Aurelia* sebagai mangsa dan *Didinium Nasutum* sebagai pemangsa. Berdasarkan latar belakang di atas, maka penulis tertarik untuk mengkaji dan mengkontruksi model matematika mangsa pemangsa dengan fungsi respon Beddington-DeAngelis dengan mempertimbangkan pemanenan. Pemanenan terjadi pada pemangsa menggunakan pemanenan dengan upaya konstan Oleh karena itu, dalam penelitian ini penulis mengambil judul “Model Matematika Interkasi Mangsa

Pemangsa Dengan Fungsi Respon Beddington-DeAngelis dan Pemanenan Terhadap Pemangsa".

## 2. KAJIAN TEORI

### Model Mangsa Pemangsa Lotka-Volterra

Diasumsikan bahwa $x$ dan $y$ populasi mangsa dan pemangsa pada waktu $t$. Dalam mengkontruksi sebuah model interaksi dua spesies, maka diasumsikan sebagai berikut (Boyce & DiPrima, 2008) :

1. Dengan tidak adanya pemangsa, mangsa tumbuh pada tingkat yang sebanding dengan populasi saat ini, sehingga $\frac{dx}{dt} = rx, r > 0$ ketika $y = 0$.
2. Dengan tidak adanya mangsa untuk bertahan hidup, tingkat kematian pemangsa menghasilkan peluruhan eksponensial, sehingga $\frac{dy}{dt} = -\mu y, \mu > 0$ ketika $x = 0$.
3. Jumlah pemangsaan antara mangsa dan pemangsa sebanding dengan banyaknya populasi mereka. Setiap pemangsaan tersebut cenderung untuk menaikkan pertumbuhan pemangsa dan untuk menghambat pertumbuhan mangsa. Dengan demkian tingkat pertumbuhan pemangsa yang meningkat sebesar bentuk dari $\delta xy$. Sedangkan tingkat pertumbuhan mangsa menurun sebesar $-\gamma xy$, di mana $\delta$ dan $\gamma$ adalah konstanta positif ukuran dari efek interaksi antara dua spesies.

Sebagai konsekuensi dari asumsi ini, kita diarahkan ke sistem persamaan :

$$\frac{dx}{dt} = rx - \gamma xy = x(r - \gamma y)$$
$$\frac{dy}{dt} = -\mu y + \delta xy = y(-\mu + \delta x) \quad (1)$$

Konstanta $r, \mu, \gamma,$ dan $\delta$ semuanya bernilai positif. $r$ adalah tingkat pertumbuhan intrinsik mangsa dan $\mu$ adalah tingkat kematian alami pemangsa saat tidak ada mangsa. Persamaan (1) dikenal sebagai persamaan Lotka-Volterra. Persamaan tersebut dikembangkan oleh Lotka pada tahun 1925 dan oleh Volterra pada tahun 1926.

Berdasarkan tingkat pertumbuhan mangsa saat tidak ada populasi pemangsa mengikuti pertumbuhan logistik, sebagai berikut :

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) \quad (2)$$

$r$ dan $K$ adalah parameter positif di mana $r$ memberikan tingkat pertumbuhan populasi ketika $x$ kecil, sedangkan $K$ adalah daya dukung lingkungan *(carrying capacity).*

pertumbuhan populasi logistik dikembangkan oleh P. Verhulst pada tahun (1804-1849). Berdasarkan persamaan (1) dan (2), diperoleh sistem persamaan sebagai berikut :

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \gamma xy$$
$$\frac{dy}{dt} = -\mu y + \delta xy \quad (3)$$

### Fungsi Respon

Salah satu komponen dasar pada model mangsa pemangsa adalah fungsi respon. Fungsi respon menggambarkan pola interaksi antara mangsa dan pemangsa yang menyatakan jumlah mangsa yang dikonsumsi oleh setiap pemangsa per satuan waktu (Chakraborty et al., 2012). Fungsi respon Beddington-DeAngelis diberikan sebagai berikut :

$$f(x, y) = \frac{\gamma xy}{x + \beta y + \alpha} \quad (4)$$

dengan :

$x$ = Kepadatan populasi mangsa
$y$ = kepadatan populasi pemangsa
$\gamma$ = Tingkat predasi maksimum pemangsa
$\beta$ = Koefisien kepadatan populasi pemangsa
$\alpha$ = Batasan proteksi lingkungan

DeAngelis pertama kali memperkenalkan fungsi respon yang lebih umum, untuk solusi dari masalah mengenai model interaksi trofik mangsa pemangsa klasik, dan secara mandiri dilanjutkan oleh Beddington untuk menggambarkan interaksi antara inang parasit. Fungsi respon Beddington-DeAngelis memberikan dekripsi bahwa pemangsaan tidak hanya bergantung pada populasi mangsa tetapi juga pada populasi pemangsa serta adanya batasan proteksi lingkungan (Haque, 2011). Substitusi tingkat pemangsaan ke model Lotka-Volterra pada sistem persamaan (3) dengan persamaan fungsi respon Beddington-DeAngelis pada persamaan (4), sehingga diperoleh :

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\gamma xy}{x + \beta y + \alpha}$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{\delta xy}{x + \beta y + \alpha} - \mu y \quad (5)$$

dengan $x(t), y(t)$ masing-masing mewakili kepadatan populasi mangsa dan pemangsa pada waktu $t$. Dengan masing – masing $r, K, \gamma, \beta, \alpha, \delta, \mu$ adalah parameter bernilai positf yang menyatakan tingkat pertumbuhan intrinsik mangsa, daya dukung lingkungan bagi mangsa, tingkat predasi maksimum pemangsa, koefisien kepadatan populasi pemangsa, batasan proteksi lingkungan, tingkat konversi yang menunjukkan jumlah pemangsa yang baru terlahir untuk setiap mangsa yang ditangkap, dan tingkat kematian alami pemangsa saat tidak ada mangsa.

### Pemanenan Pada Populasi

Jika suatu populasi dimodelkan dengan persamaan diferensial (Brauer & Castillo-Chavez, 2011) :

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (6)$$

Dikenakan pemanenan pada tingkat $h(t)$ per unit waktu untuk beberapa fungsi $h(t)$ yang diberikan, maka populasi pemanenan dengan menggunakan persamaan diferensial sebagai berikut :

$$\frac{dx}{dt} = f(x) - h(t) \quad (7)$$

Pemanenan pada populasi mangsa dan pemangsa dibedakan menjadi 2 jenis, diantaranya :

### a. Pemanenan hasil konstan

Jika fungsi $h(t)$ adalah konstanta $H$, sehingga pada konstanta tingkat $H$ per unit waktu dimodelkan dengan persamaan berikut (Brauer & Castillo-Chavez, 2011) :

$$\frac{dx}{dt} = f(x) - H \quad (8)$$

Jenis pemanenan ini disebut pemanenan hasil konstan. Pemanenan hasil konstan adalah pemanenan dengan hasil panen yang tetap setiap harinya dengan mengasumsikan usaha pemanenan dan kemampuan tangkapan suatu populasi mangsa pemangsa yang dijaga tetap konstan. Jika populasi diatur oleh pertumbuhan logistik, model dengan pemanenan adalah :

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - H \quad (9)$$

### b. Pemanenan Dengan Upaya Konstan

Jika fungsi $h(t)$ adalah fungsi linear dari ukuran populasi $h(t) = Ex(t)$, model persamaannya adalah (Brauer & Castillo-Chavez, 2011) :

$$\frac{dx}{dt} = f(x) - Ex \quad (10)$$

dengan :

$x$= Jumlah populasi mangsa yang dipanen per unit waktu

$E$ = Upaya yang dikeluarkan dalam pemanenan

Jenis pemanenan ini disebut pemanenan proposional. Pemanenan proposional adalah pemanenan dengan hasil panen yang meningkat secara proposional di setiap harinya. Pemanenan proposional diasumsikan adanya pengaruh dari tingkat kelahiran dan tingkat kematian, serta tingkat pemanenan yang berubah secara konstan disetiap harinya. Jika populasi diatur oleh model logistik, model mangsa yang dipanen adalah:

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - Ex \quad (11)$$

Pemanenan dengan upaya konstan dapat berupa adanya tangkapan yang disebut Pemanenan dengan koefisien tangkapan. Pemanenan tersebut diperlukan dalam pengelolaan sumber daya yang terfokus hanya pada permasalahan maksimalisasi penangkapan. Pemanenan dengan upaya konstan pada pemangsa dengan adanya koefisien tangkapan sebagai berikut :

$$qEy \quad (12)$$

dengan :

$q$ = Koefisien tangkapan

$Ey$ = Pemanenan dengan upaya konstan pada pemangsa

## 3. PEMBAHASAN

### Kontruksi Model

Secara umum model sistem interaksi mangsa pemangsa dinyatakan dalam bentuk sistem persamaan diferensial orde satu sebagai berikut (Arditi & Ginzburg, 1989) :

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = h(\bar{x})\bar{x} - f(\bar{x},\bar{y})\bar{y} \qquad \bar{x}(0)$$
$$\frac{d\bar{y}}{dt} = g(\bar{x},\bar{y})\bar{y} - \mu\bar{y} \qquad \bar{y}(0) > 0 \quad (13)$$

Diasumsikan $\bar{x}$ dan $\bar{y}$ pada sistem persamaan (13) adalah populasi mangsa dan pemangsa pada waktu $t$. Bentuk tingkat pertumbuhan mangsa ketika tidak ada pemangsa, yang dilambangkan dengan $h(\bar{x})\bar{x}$ pada sistem persamaan (13) diasumsikan mengikuti pertumbuhan logistik, sebagai berikut :

$$h(\bar{x}) = r\left(1 - \frac{\bar{x}}{K}\right) \quad (14)$$

dengan :

$r =$ Tingkat pertumbuhan intrinsik mangsa

$K =$ Daya dukung lingkungan bagi mangsa

Model pertumbuhan logistik digunakan karena adanya pertumbuhan yang membatasi populasi makhluk hidup di bumi yaitu daya tampung lingkungan, sehingga suatu populasi tidak akan tumbuh secara tidak terkendali dalam kurun waktu yang cukup lama.

Fungsi $f(\bar{x})\bar{x}$ pada sistem persamaan (13) menggambarkan mengenai faktor predasi. Fungsi respon pada penelitian ini menggunakan fungsi respon Beddington-DeAngelis. Persamaan fungsi respon Beddington-DeAngelis diberikan sebagai berikut :

$$f(\bar{x})\bar{x} = \frac{\gamma\bar{x}}{\bar{x} + \beta\bar{y} + \alpha} \quad (15)$$

dengan :

$\gamma$ = Tingkat predasi maksimum pemangsa

$\beta$ = Koefisien kepadatan populasi pemangsa

$\alpha$ = Batasan proteksi lingkungan

Sehingga secara matematis perubahan kepadatan populasi mangsa dalam penelitian ini, yaitu dengan substitusi persamaan (14) dengan persamaan fungsi respon pada persamaan (15) diperoleh :

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = r\bar{x}\left(1 - \frac{\bar{x}}{K}\right) - \frac{\gamma\bar{x}\bar{y}}{\bar{x} + \beta\bar{y} + \alpha} \quad (16)$$

Fungsi, $g(\bar{x})\bar{x}$ pada sistem persamaan (13) menggambarkan bentuk tingkat konversi yang menunjukkan jumlah pemangsa yang baru terlahir untuk setiap mangsa yang ditangkap ketika adanya predasi menggunakan fungsi respon Beddington-DeAngelis, sebagai berikut :

$$g(\bar{x})\bar{x} = \frac{\delta\bar{x}}{\bar{x}+\beta\bar{y}+\alpha} \qquad (17)$$

dengan :

$\delta$ = Tingkat konversi yang menunjukkan jumlah pemangsa yang baru terlahir untuk setiap mangsa yang ditangkap
$\beta$ = Koefisien kepadatan populasi pemangsa
$\alpha$ = Batasan proteksi lingkungan

Populasi pemangsa ketika tidak berinteraksi dengan mangsa, maka populasi ini akan mengalami penurunan. Hal ini dapat mengakibatkan kematian alami pada populasi pemangsa. Model penurunan populasi pemangsa dalam hal ini dinyatakan sebagai $-\mu\bar{y}, \mu >$, dengan $\mu$ adalah tingkat kematian alami pemangsa ketika tidak ada mangsa.

Populasi pemangsa selain berkurang karena adanya kematian secara alami juga diasumsikan berkurang karena adanya pemanenan pada populasi pemangsa. Meningkatnya jumlah populasi pemangsa mengakibatkan jumlah populasi pemangsa yang memangsa mangsanya juga meningkat, sehingga kepadatan populasi pemangsa semakin meningkat. Tujuan adanya pemanenan pada populasi pemangsa agar keberadaan populasi pemangsa tetap terjaga dengan seimbang. Pemanenan pada populasi pemangsa menggunakan pemanenan dengan upaya konstan atau pemanenan proposional yang ditunjukkan sebagai berikut:

$$E\bar{y} \qquad (18)$$

dengan :

$\bar{y}$ = Jumlah populasi pemangsa yang dipanen per unit waktu
$E$ = Upaya yang dikeluarkan dalam pemanenan

Sehingga secara matematis perubahan kepadatan populasi pemangsa sebagai berikut :

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = -\mu\bar{y} + \frac{\delta\bar{x}\bar{y}}{\bar{x}+\beta\bar{y}+\alpha} - E\bar{y} \qquad (19)$$

Berdasarkan uraian di atas, maka model mangsa pemangsa Lotka-Volterra menggunakan fungsi respon Beddington-DeAngelis pada persamaan (16) dengan mempertimbangkan pemanenan terhadap populasi pemangsa pada persamaan (19) sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{x}}{dt} &= r\bar{x}\left(1-\frac{\bar{x}}{K}\right) - \frac{\gamma\bar{x}\bar{y}}{\bar{x}+\beta\bar{y}+\alpha} \\ \frac{d\bar{y}}{dt} &= \frac{\delta\bar{x}\bar{y}}{\bar{x}+\beta\bar{y}+\alpha} - \mu\bar{y} - E\bar{y}\end{aligned} \qquad (20)$$

dengan :

$\bar{x}$ = Kepadatan populasi mangsa
$\bar{y}$ = kepadatan populasi pemangsa
$r$ = Tingkat pertumbuhan intrinsik mangsa
$K$ = Daya dukung lingkungan bagi mangsa
$\gamma$ = Tingkat predasi maksimum pemangsa
$\beta$ = Koefisien kepadatan populasi pemangsa
$\alpha$ = Batasan proteksi lingkungan
$\delta$ = Tingkat konversi yang menunjukkan jumlah pemangsa yang baru terlahir untuk setiap mangsa yang ditangkap
$\mu$ = Tingkat kematian alami pemangsa ketika tidak ada mangsa
$E\bar{y}$ =Upaya pemanenan konstan pada populasi pemangsa

## 4. Kesimpulan

Kontruksi pada model sistem interaksi mangsa pemangsa dengan fungsi respon Beddington-DeAngelis yang mempertimbangkan pemanenan terhadap pemangsa sebagai berikut :

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = r\bar{x}\left(1-\frac{\bar{x}}{K}\right) - \frac{\gamma\bar{x}\bar{y}}{\bar{x}+\beta\bar{y}+\alpha} \qquad \bar{x}(t) > 0$$

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \frac{\delta\bar{x}\bar{y}}{\bar{x}+\beta\bar{y}+\alpha} - \mu\bar{y} - E\bar{y} \qquad \bar{y}(t) > 0$$

## DAFTAR PUSTAKA

Arditi, R., & Ginzburg, L. R. (1989). Coupling in Predator-Prey Dynamics: Ratio-Dependence. *Journal of Theoretical Biology*, *139*, 311–326. Retrieved from http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022519389802115

Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2008). *Elementary Differential Equation and Boundary Value Problems*.

Brauer, F., & Castillo-Chavez, C. (2011). *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology* (Vol. 40). https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1686-9

Chakraborty, S., Pal, S., & Bairagi, N. (2012). Predator-Prey Interaction With Harvesting: Mathematical Study With Biological Ramifications. *Applied Mathematical Modelling*, *36*(9), 4044–4059. https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.11.029

Haque, M. (2011). A Detailed Study of The Beddington-DeAngelis Predator-Prey Model. *Mathematical Biosciences*, *234*(1), 1–16. https://doi.org/10.1016/j.mbs.2011.07.003

Liu, C., & Tang, W. (2011). The Dynamics and Control of a Harvested Differential-Algebraic Prey-Predator Model. *International Journal of Information and Systems Sciences*, *7*(1), 103–113. https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)59417-3

Roy, B., Roy, S. K., & Gurung, D. B. (2017). Holling–Tanner Model With Beddington–DeAngelis Functional Response and Time Delay Introducing Harvesting. *Mathematics and Computers in Simulation*, *142*, 1–14. https://doi.org/10.1016/j.matcom.2017.03.010

Xiao, D., Li, W., & Han, M. (2006). Dynamics in a Ratio-Dependent Predator-Prey Model With Predator Harvesting. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *324*(1), 14–29. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.11.048