MATH_unesa_
Jurnal Ilmiah Matematika _Volume 7 No.2 Tahun 2019_
ISSN 2301-9115

BILANGAN KROMATIK TOTAL BEBERAPA KELAS

Dita Anggraini Sulistya
Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
email: ditasulistya@mhs.unesa.ac.id

I Ketut Budayasa
Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
email: ketutbudayasa@yahoo.com

Abstrak

Pewarnaan total pada graf *G* adalah pemberian warna untuk setiap titik dan setiap sisi di *G*, sedemikian hingga setiap 2 titik yang berhubungan langsung dan semua sisi yang terkait pada titik yang sama mendapatkan warna yang berbeda. Bilangan kromatik total pada *G*, dinotasikan $\chi_T(G)$, yaitu minimum banyaknya warna yang dibutuhkan untuk pewarnaan total *G*. Pada artikel ini, akan diperoleh bilangan kromatik total pada graf sederhana, sikel (C_n), graf komplet (K_n), lintasan (P_n), graf bintang $(S_{1,n})$, graf bipartit, graf multipartisi komplet $(K_{n_1,\dots,n_r})$, graf sentral dari sikel $(C(C_n))$, graf sentral dari lintasan $(C(P_n))$, dan graf sentral dari bintang $(C(S_{1,n}))$.

Kata Kunci: Pewarnaan total, bilangan kromatik total, beberapa kelas graf, graf sentral dari beberapa kelas graf.

Abstract

The total colouring of graph G is giving colour to each vertex and all edge G, so that every 2 vertex that are directly related and all related edge at the same vertex get a different colour. The total chromatic number of G, denoted $\chi_T(G)$, which is the minimum number of colours needed for total colouring G. In this research, the total chromatic number will be obtained for simple graph, cycle (C_n), complete graph (K_n), path (P_n), star graph $(S_{1,n})$, bipartit graph, multipartit complete graph $(K_{n_1,\dots,n_r})$, central graph of cycle $(C(C_n))$, central graph of path $(C(P_n))$, and central graph of star $(C(S_{1,n}))$.

Keywords: Total colouring, total chromatic numbers, multiple classes graph, central graph of multiple class graph.

1. PENDAHULUAN

Banyak permasalahan dikehidupan sehari-hari memotivasi manusia agar menemukan solusi, secara tidak langsung proses penyelesaian permasalahan tersebut juga memotivasi perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi. Matematika adalah suatu ilmu yang telah memberikan alternatif dalam penyelesaian permasalahan di segala bidang. Salah satu cabang ilmu matematika yang bisa menyelesaikan permasalahan tersebut adalah teori graf (Budayasa, 2007).

Teori graf telah mengalami perkembangan yang pesat karena dalam kehidupan sehari-hari dapat menerapkan teori graf. Misal untuk mencari lintasan terpendek, permasalahan tukang pos dalam mengirim surat, komunikasi, transportasi, desain komputer, perlokasian dan yanglainnya. Salah satu materi pada teori graf yang sangat penting adalah pewarnaan pada graf. Pewarnaan sejati dari graf yaitu memberikan warna ke titik atau sisi atau keduanya (total) sedemikian hingga elemen (titik atau sisi atau keduanya) terdekat diwarnai dengan warna yang berbeda. Sebuah pewarnaan-total pada graf *G* adalah pemberian warna titik *V*(*G*) dan sisi *E*(*G*) pada *G* sedemikian hingga setiap 2 titik yang berhubungan langsung dan setiap sisi yang terkait pada titik yang sama mendapatkan warna yang berbeda. Bilangan kromatik-total sebuah graf *G*, dinotasikan $\chi_T(G)$, yaitu minimum warna yang dibutuhkan untuk pewarnaan-total pada *G* (Budayasa, 2007).

Karena kontruksi graf yang sederhana, maka inilah yang dapat mengakibatkan ada masalah nyata yang bisa dimodelkan pada struktur graf. Misal titik dinyatakan sebagai stasiun maka sisi dapat dinyatakan sebagai rel yang menghubungkan antara stasiun tersebut. Jika titik dinyatakan sebagai orang maka sisi dapat dinyatakan sebagai relasi yang terdapat pada orang tersebut, dan banyak pemodelan graf yang lain. Dalam artikel ini tidak ditujukan untuk membahas aplikasi pada teori graf, namun artikel ini membahas materi dalam teori graf yaitu bilangan kromatik total beberapa kelas graf.

2. KAJIAN TEORI

A. Bilangan Kromatik Graf

Misal G graf. Pewarnaan titik-***k*** pada *G* merupakan meberi warna untuk setiap titik di *G* dengan menggunakan *k*-warna sedemikian hingga setiap dua titik di *G* yang berhubungan langsung mendapatkan warna yang berbeda. Jika *G* memiliki pewarnaan titik-*k* maka *G* dapat diwarnai dengan *k*-warna. Pewarnaan titik-*k* di *G* dapat ditunjukkan dengan memberi label setiap titik di *G* dengan warna 1,2,...,k. Misal *G* graf. Bilangan Kromatik (*Chromatic Number*) dari graf G, dilambangkan χ(G), definisikan sebagai berikut :

$$\chi(G) = \min \{k| \text{ pewarnaan} - \text{titik} - k \text{ pada } G\}$$

Bilangan kromatik dari Graf G adalah minimum banyak warna yang dibutuhkan untuk memberi warna semua titik di *G*, sedemikian hingga setiap dua titik yang berhubungan langsung diwarnai dengan warna yang berbeda (Budayasa, 2007).

B. Graf Sentral dari Suatu Graf

Misal *G* graf sederhana, graf sentral dari graf *G* dilambangkan dengan *C*(*G*), adalah graf yang didapat dari *G* dengan menyisipkan tepat satu titik pada setiap sisi *G* dan menghubungkan semua titik yang tidak berhubungan langsung di *G* dengan sebuah sisi (Sudha dan Manikundan, 2017).

C. Teorema 2.3

Jika *G* graf bipartit, maka setiap sikel di *G* panjangnya genap.

Bukti :

Andaikan ada sikel di *G* dengan panjang ganjil. Misalkan $C_{2n+1} = (v_1, v_2, v_3, \ldots v_{2n+1}, v_1)$ sebuah sikel di *G* dengan panjang ganjil (2*n*+1). Misalkan *X* dan *Y* adalah partisi dari *V*(*G*). Tanpa meninggalkan keumuman misalkan $v_1 \in X$. Karena *G* graf bipartit dengan partisi (*X*,*Y*) maka elemen-elemen dari $\{v_1, v_3, v_5, \ldots, v_{2n+1}\}$ terletak di *X* dan elemen-elemen dari $\{v_2, v_4, v_6, \ldots, v_{2n}\}$ terletak di *Y*. Karena $v_{2n+1}v_j \in E(C_{2n+1})$ maka titik v_{2n+1} dan titik v_1 harus terletak pada partisi yang berbeda. Kontradiksi bahwa titik v_{2n+1} dan v_1 terletak pada partisi yang sama, yaitu *X*. Dengan demikian teorema terbukti. ■

D. Lemma 2.4 :

Jika *G* graf bipartit dan tak kosong, maka $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Bukti : (Induksi matematik pada |*E*(*G*)|)

Untuk |*E*(*G*)| = 1, maka $G = K_2$ sehingga $\chi'(G) = 1 = \Delta(G)$. Asumsikan pernyataan benar untuk |*E*(*G*)| = *m*. Artinya jika *G* graf bipartit dan tak kosong dan |*E*(*G*)| = m, maka $\chi'(G) = \Delta(G)$. Akan ditunjukkan pernyataan benar untuk |*E*(*G*)| = *m* + 1. Misalkan *G* graf bipartit tak kosong dan |*E*(*G*)| = *m* + 1. Misalkan *e* = *uv* ∈ *E*(*G*), maka graf *G* – *e* merupakan graf bipartit tak kosong dan |*E*(*G-e*)| = *m*, maka berdasarkan asumsi $\chi'(G\text{-}e) = \Delta(G\text{-}e) \leq \Delta(G)$. Ini artinya ada pewarnaan-sisi-Δ(*G*) pada graf *G-e*.

Kasus 1 :

Ada sebuah warna dari Δ (*G*) warna dalam pewarnaan sisi *G-e* tidak muncul di titik *u* maupun di titik *v*. Misalkan warna tersebut warna *j* maka warna *j* tersebut dapat digunakan untuk mewarnai sisi-*e* di graf *G*. Sehingga diperoleh sebuah pewarnaan-sisi-Δ(*G*) di *G*. Dengan demikian $\chi'(G) \leq \Delta(G)$.

Kasus 2 :

Semua warna dari Δ(*G*) warna dalam pewarnaan sisi *G-e* muncul di titik *u* maupun di titik *v*. Misalkan warna *i* muncul di titik *u* dan warna *j* muncul di titik *v*. Perhatikan graf bagian yang dibangun oleh sisi-sisi yang berwarna *i* dan *j* namakan graf bagian ini *H*(*i*,*j*). Klaim : sisi di *H*(*i*,*j*) berwarna *i* yang terkait di titik *u* dan sisi di *H*(*i*,*j*) berwarna *j* yang terkait di titik *v* tidak terletak pada rantai *Kempe* yang sama. Sebab jika kedua sisi tersebut terletak pada rantai *Kempe* yang sama katakanlah rantai-*Kempe*-*K*, maka rantai *K* ini digabung dengan sisi-*e* akan membentuk sebuah sikel panjang ganjil di graf *G*. Kontradiksi bahwa *G*, graf bipartit (Teorema 2.3).

Perhatikan sebuah rantai-*Kempe*, sebuah rantai-*Kempe* *H*(*i*,*j*) yang memuat titik *v*, beri nama rantai tersebut $\widehat{K}$, pertukarkan warna *i* dengan warna *j* pada rantai $\widehat{K}$, maka berdasarkan argumen rantai-*Kempe* akan diperoleh pewarnaan sisi-Δ(*G*) yang baru di graf *G-e* sedemikian hingga warna *j* tidak muncul di titik *v* dan titik *u*. Selanjutnya sisi-*e* di graf *G* dapat diwarnai dengan warna *j*. Diperoleh sebuah pewarnaan-sisi-Δ(*G*) di graf *G*. Akibatnya $\chi'(G) \leq \Delta(G)$. Dengan demikian Lemma terbukti. ■

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

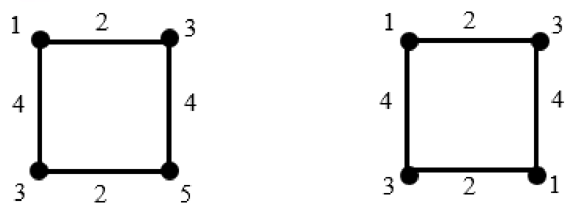
A. Bilangan Kromatik Total

Definisi 3.1 :

Misalkan *G* graf sederhana. Pewarnaan total *G* adalah pewarnaan semua titik *G* dan semua sisi *G* sedemikian hingga semua titik yang berhubungan langsung dan semua sisi yang terkait pada titik yang sama mendapatkan warna berbeda. Pewarnaan-total-*k* pada *G* adalah sebuah pewarnaan total *G* dengan *k* warna. Bilangan kromatik total *G*, dilambangkan dengan χ_T (*G*), didefinisikan sebagai berikut :

$\chi_T(G) = \min\{k|$ada pewarnaan total-*k* pada *G*$\}$

Contoh:



(a) (b)

Gambar 1. (a) Pewarnaan-total-5 pada sikel C_4
(b) Pewarnaan-total-4 pada sikel C_4

Karena tidak ada pewarnaan-total-3 dari graf sikel dengan 4 titik, maka bilangan kromatik total dari C_4 adalah 4, atau;

$$\chi_T(C_4) = 4$$

Teorema berikut akan menunjukkan bahwa bilangan kromatik total suatu graf, tidak pernah kurang dari atau sama dengan derajat maksimum graf ditambah 1.

Teorema 3.1 : Jika G graf sederhana, maka $\chi_T(G) \geq \Delta(G) + 1$.

(Golumbic, 2018)

B. Bilangan Kromatik Total Beberapa Kelas Graf

Sebelumnya akan diawali dengan konjektur behzad, yang nantinya akan dibuktikan; Apakah beberapa kelas graf memenuhi konjektur Behzad berikut?,

Pada tahun 1965 *Behzad* membuat konjektur sebagai berikut,

Konjektur *Behzad* :

Jika G graf sederhana, dengan derajat maksimum Δ(G) maka,

$$\chi_T(G) \leq \Delta(G) + 2$$

(Golumbic, 2018)

Berikut akan ditunjukkan bahwa graf sikel memenuhi konjektur *Behzad*.

Teorema 3.2 :

$$\chi_T(C_n) = \begin{cases} 3, n \equiv 0 \ (mod\ 3) \\ 4, n \not\equiv 0 \ (mod\ 3) \end{cases}$$

Bukti :

Kasus 1 : $n \equiv 0$ (mod 3)

Karena $\Delta(C_n) = 2$, maka berdasarkan Teorema 3.1, diperoleh

$$\chi_T(C_n) \geq \Delta(C_n) + 1 = 2 + 1 = 3 \quad \text{... (1)}$$

Sedemikian hingga untuk setiap $1 \leq i \leq \frac{n}{3}$,

$W(v_{3i-2}) = 1$; $W(v_{3i}) = 2$; $W(v_{3i-1}) = 3$, dan

$W(e_{3i-1}) = 1$; $W(e_{3i-2}) = 2$; $W(e_{3i}) = 3$

Sehingga berdasarkan Definisi 3.1,

$$\chi_T(C_n) \leq 3 \quad \text{... (2)}$$

Kasus 2 : $n \not\equiv 0$ (mod 3)

Dalam hal ini tidak mungkin mewarnai semua titik dan semua sisi C_n, dengan 3 warna. Sehingga $X_T(C_n) > 3$. Karena $X_T(C_n)$ bilangan bulat maka ;

$$X_T(C_n) \geq 4 \quad \text{... (3)}$$

Subkasus 2.1 **:** $n \equiv 1$ (mod 3)

Misalkan $n = 3k + 1$, $1 \leq k \leq \frac{n-1}{3}$. Definisikan fungsi W sebagai berikut,

$W(v_1) = 1$, $W(v_{3i}) = 1$, $1 \leq i \leq \frac{n-1}{3}$; $W(v_{3i+2}) = 2$, $1 \leq i \leq \frac{n-4}{3}$; $W(v_2) = 3$, $W(v_{3i+1}) = 3$, $1 \leq i \leq \frac{n-1}{3}$, dan $W(e_{3i+1}) = 1$, $1 \leq i \leq \frac{n-4}{3}$; $W(e_{3i}) = 2$, $1 \leq i \leq \frac{n-1}{3}$; $W(e_{3i+2}) = 3$, $1 \leq i \leq \frac{n-4}{3}$; $W(e_1) = 2$; $W(e_2) = W(e_n) = 4$.

Sehingga berdasarkan Definisi 3.1,

$$\chi_T(C_n) \leq 4 \quad \text{... (4)}$$

Dari (3) dan (4) dapat diperoleh

$$\chi_T(C_n) = 4$$

Subkasus 2.2 : $n \equiv 2$ (mod 3)

Misalkan $n = 3k + 2$, $1 \leq k \leq \frac{n-2}{3}$. Definisikan fungsi W sebagai berikut,

$W(v_{3i-2}) = 1$, $1 \leq i \leq \frac{n+1}{3}$; $W(v_{3i}) = 2$, $1 \leq i \leq \frac{n-2}{3}$;

$W(v_{3i-1}) = 3$, $1 \leq i \leq \frac{n+1}{3}$, dan

$W(e_{3i-1}) = 1$, $1 \leq i \leq \frac{n-2}{3}$; $W(e_{3i-2}) = 2$, $1 \leq i \leq \frac{n+1}{3}$;

$W(e_{3i}) = 3$, $1 \leq i \leq \frac{n-2}{3}$, $W(e_n) = 4$.

Sehingga berdasarkan Definisi 3.1,

$$\chi_T(C_n) \leq 4 \quad \text{... (5)}$$

Dari (3) dan (5) dapat diperoleh

$$\chi_T(C_n) = 4$$

Dengan demikian teorema terbukti. ■

Teorema 3.3 :

$$\chi_T(K_n) = \begin{cases} n, & n \not\equiv 0 \ (mod\ 2) \\ n+1, & n \equiv 0 \ (mod\ 2) \end{cases}$$

(Golumbic, 2018)

Bukti :

Karena setiap titik v di K_n, $d(v) = n - 1$ maka $\Delta(K_n) = n - 1$. Karena K_n adalah graf sederhana, berdasarkan Teorema 3.1,

$$\chi_T(K_n) \geq \Delta(K_n) + 1 = n - 1 + 1 = n \quad \text{... (1)}$$

Kasus 1 : $n \not\equiv 0$(mod 2)

Perhatikan bahwa titik v_i dan semua sisi $v_{i+1}v_{i-1}$, $v_{i+2}v_{i-2}, \dots, v_{i+\frac{n-1}{2}}v_{i-\frac{n-1}{2}}$ saling independen pada K_n sehingga semua anggota $M(v_i)$ dapat diwarnai dengan warna yang sama, dalam hal ini anggota-anggota $M(v_i)$ diwarnai dengan warna i. Dengan kata lain $W(M(v_i)) = i$, $\forall i$, $1 \leq i \leq n$. Sehingga berdasarkan Definisi 3.1,

$$\chi_T(K_n) \leq n \quad \text{...(2)}$$

Dari pertidaksamaan (1) dan (2) dapat disimpulkan,

$$\chi_T(K_n) = n$$

Kasus 2 : n $\equiv 0$(mod 2)

Karena n genap, himpunan sisi K_n dapat dipartisi menjadi $n - 1$ penjodohan sempurna (*perfect matching*), namakan $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$. Karena setiap dua titik yang berbeda berhubungan langsung di K_n, maka pada pewarnaan sisi K_n harus memiliki warna yang berbeda. Sehingga untuk mewarnai semua titik dan sisi K_n diperlukan paling sedikit $n + 1$ warna. Berdasarkan Definisi 3.1 diperoleh,

$$\chi_T(K_n) \geq n + 1 \quad \text{... (3)}$$

Buatlah pewarnaan-total-($n + 1$) pada K_{n+1}, seperti Kasus 1. Akibatnya,

$$\chi_T(K_{n+1}) \leq n + 1$$

Karena K_n graf bagian dari K_{n+1} maka bilangan kromatiknya $\chi_T(K_n) \leq \chi_T(K_{n+1})$. Sehingga,

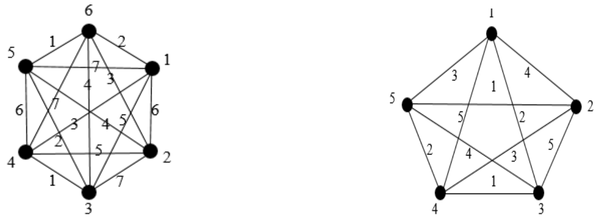
$$\chi_T(K_n) \leq n + 1 \quad \text{... (4)}$$

Dari pernyataan (3) dan (4) dapat disimpulkan

$$\chi_T(K_n) = n + 1$$

Dengan demikian teorema terbukti. ■

Contoh :



(a) **(b)**

Gambar 2 : (a) Pewarnaan-total-5 pada graf komplet K_5

(b) Pewarnaan-total-7 pada graf komplet K_6

Teorema 3.4 :

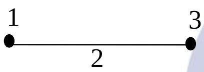
$$\chi_T(P_n) = \begin{cases} \Delta(P_n) + 2, n = 2 \\ \Delta(P_n) + 1, n \geq 3 \end{cases}$$

Bukti :

Kasus 1 : $n = 2$

Dalam hal ini, $\Delta(P_2)$=1. Sebuah pewarnaan-total-3 adalah sebagai berikut :

Contoh :



Gambar 3. Pewarnaan-total-3 pada P_2

$$\chi_T(P_n) = 3 = \Delta(G) + 2$$

Kasus 2 : $n \geq 3$

Berdasarkan Teorema 3.1,

$$\chi_T(P_n) \geq \Delta(P_n)+1=2+1=3 \quad ...(1)$$

Kontruksi sebuah pewarnaan-total-3 pada (P_n) sebagai berikut,

$$W(v_{3i-2}) = 1,\ 1 \leq i \leq \tfrac{n+2}{3};\ W(v_{3i}) = 2,\ 1 \leq i \leq \tfrac{n}{3};$$

$$W(v_{3i-1}) = 3,\ 1 \leq i \leq \tfrac{n+1}{3}, \text{ dan}$$

$$W(e_{3i-1}) = 1,\ 1 \leq i \leq \tfrac{n}{3};\ W(e_{3i-2}) = 2,\ 1 \leq i \leq \tfrac{n+1}{3};$$

$$W(e_{3i}) = 3,\ 1 \leq i \leq \tfrac{n}{3}.$$

Berdasarkan Definisi 3.1,

$$\chi_T(P_n) \leq 3 \quad ... (2)$$

Dari (1) dan (2) dapat disimpulkan bahwa,

$$\chi_T(P_n) = \Delta(P_n)+1$$

Dengan demikian teorema terbukti ■

Teorema 3.5 :

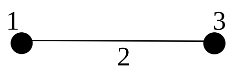
$$\chi_T(S_{1,n}) = \begin{cases} 3, \quad n = 1 \\ n+1, n \geq 2 \end{cases}$$

Bukti :

Kasus 1 : $n = 1$

Dalam hal ini, $\Delta(S_{1,1}) = 1$. Sebuah pewarnaan-total-3 adalah sebagai berikut :

Contoh :



Gambar 4 : Pewarnaan-total-3 pada $S_{1,1}$

$$\chi_T(S_{1,n}) = 3 = \Delta(S_{1,n}) + 2$$

Kasus 2 : $n \geq 2$

Karena $\Delta(S_{1,n}) = n$, berdasarkan Teorema 3.1 diperoleh,

$$\chi_T(S_{1,n}) \geq n + 1 \quad ... (1)$$

Definisikan sebuah pewarnaan-total-W pada $(S_{1,n})$ sebagai berikut :

$$W(v_i) = \begin{cases} 1, & i = 0 \\ 2, & i = n \\ i+2, 1 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

$W(e_i) = i$+1, $1 \leq i \leq n$

Perhatikan bahwa W adalah sebuah pewarnaan-total-(n+1) pada $(S_{1,n})$. Sehingga berdasarkan Definisi 3.1,

$$\chi_T(S_{1,n}) \leq n + 1 = \Delta(S_{1,n}) + 1 \ ... (2)$$

Dari (1) dan (2) dapat disimpulkan,

$$\chi_T(S_{1,n}) = n + 1$$

Dengan demikian teorema terbukti. ■

Lemma 3.6 :

Jika G graf bipartit maka $\chi_T(G) \leq \Delta(G) + 2$.

Bukti :

Untuk mewarnai semua sisi dari G sedemikian hingga 2 sisi yang terkait pada titik yang sama mendapatkan warna yang berbeda diperlukan $\Delta(G)$ warna. $\chi(G)$ = 2 berarti ada pewarnaan-titik-2 pada G. Jika 2 warna yang digunakan untuk mewarnai titik-titik di G berbeda dengan $\Delta(G)$ warna yang digunakan untuk mewarnai sisi di G, maka akan memperoleh pewarnaan total dari G dengan menggunakan $\Delta(G)$ + 2 warna. Maka ada pewarnaan-total-$\Delta(G)$+2 pada graf G. Sehingga $\chi_T(G) \leq \Delta(G) + 2$. Dengan demikian Teorema terbukti. ■

Lemma 3.7 :

Jika G graf k-partit komplet, dengan n_1=n_2=n_3=...=n_k=n maka $\chi_T(G) \leq \Delta(G) + 2$.

(Rosenfeld, 1971)

Bukti :

Jika k ganjil, berdasarkan Teorema 3.3 maka,

$$\chi_T(K_k)=k$$

Jika graf H yang didapat dari G dengan menghapus sisi-sisi yang berwarna 1,2,...,k pada sub graf G[$\{a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{kj}\}$] maka $\Delta(H)$=(n-1)(k-1). Berdasarkan Teorema Vizing,

$$\chi'(H) \leq \Delta(H)+1=(n-1)(k-1)+1$$

Warna 1,2,...,k dapat digunakan untuk mewarnai titik-titik dari $W(a_{ij})$=i, $1 \leq i \leq k$.

Sehingga diperoleh,

$$\chi_T(G) \leq \chi'(H)+k$$

$$\chi_T(G) \leq \Delta(G)+2$$

Andaikan pernyataan benar untuk $k < k_0$, selanjutnya akan dibuktikan pernyataan benar untuk k_0. Jika k_0 ganjil seperti argumen sebelumnya disimbolkan $\chi_T(G) \leq \Delta(G)$+2. Jika k_0 genap misal k_0=2t.

Misal A_1 adalah subgraf G t-partit yang dibangun oleh

$$H_1 = G[\cup_{i=1}^{t} A_i] \text{ dan}$$

$$H_2 = G[\cup_{i=k+1}^{k_0} A_i]$$

H_1 isomorfik dengan H_2 Berdasarkan induksi matematik berlaku H_1 , H_2 memenuhi premis asumsi, sehingga berdasarkan asumsi,

$$\chi_T(H_1) \leq \Delta(H_1)+2 \text{ dan}$$
$$\chi_T(H_2) \leq \Delta(H_2)+2$$

Dalam pewarnaan-total-H_i, $1 \leq i \leq 2$, ada t-warna yang digunakan untuk mewarnai semua titik-titik H_i. Jika n=1 maka $G = K_{1,1,\dots,1} = K_{k_0} = K_{2t}$ dan $\Delta(G)$=2t-1. Sehingga berdasarkan Teorema 3.3,

$$\chi_T(G) = \chi_T(K_{2t}) = 2t+1 = \Delta(G)+2$$

Jika $n \geq 2$ maka,

$$n(t-1)+2 \geq 2t$$

$H_1 \cup H_2$ memiliki pewarnaan-total-($n(t$-1)+2) sedemikian hingga titik-titik yang terletak pada partisi yang berbeda mendapat warna-warna yang berbeda dan 2t-warna digunakan untuk mewarnai semua titik. Graf yang diperoleh dari G dengan menghapus sisi-sisi yang berwarna dalam pewarnaan sebuah bipartit komplet dengan banyak titik t tiap partisi n_t. Karena sisi-sisi graf ini dapat diwarnai dengan nt warna maka,

$$\chi_T(G) \leq (nt)-1+2+nt = \Delta(G)+2$$

Dengan demikian Lemma terbukti. ∎

Teorema 3.8 : Jika G graf multipartit komplet, maka $\chi_T(G) \leq \Delta(G) + 2$.

(Yap, 1989)

Bukti : Misalkan $G=K_{n_1,n_2,\dots,n_r}$ dengan $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \dots \leq n_r$. Akan ditinjau 3 kasus sebagai berikut :

Kasus 1 : $n_1 = n_2 = \dots = n_r$

Berdasarkan Lemma 3.6, $\chi_T(G) \leq \Delta(G) + 2$.

Kasus 2 : $n_1 = n_2 = \dots = n_{2m+1} < n_{2m+2} \leq \dots \leq n_r$

Bentuk graf G' dari G dengan cara menambahkan sebuah titik baru namakan x pada partisi ke (2m+1) dan menghubungkan titik x dengan sebuah sisi ke setiap titik G yang bukan terletak dipartisi ke 2m+1. Perhatikan bahwa $K_{n_1,n_2,\dots,n_{2m}}$merupakan subgraf dari G maupun G' dan subgraf ini memuat sebuah 1-faktor namakan 1-faktor ini adalah F. Misalkan $G^*=G'-F$ maka $\Delta(G^*)=\Delta(G)$. Misalkan $\Delta(G)+1=t$. Berdasarkan Teorema Vizing $\chi'(G^*) \leq \Delta(G^*)+1=\Delta(G)+1=$ t. Ini berarti ada sebuah pewarnaan-sisi-t pada (G^*), namakan pewarnaan-sisi tersebut adalah W. Selanjutnya pewarnaan-sisi-W pada G^* dapat diubah ke pewarnaan total W_T pada graf G dengan menggunakan warna-warna 1,2,3,...,t,t+1 sebagai berikut,

$W_T(v) = t+1, \quad v \in A_{2m+1}$

$$W_T(e) = \begin{cases} W(xv), v \in V(G)\backslash A_{2m+1} \\ W(e), e \in G\backslash F \\ t+1, \quad e \in F \end{cases}$$

Akibatnya,

$$\chi_T(G) \leq t+1 = \Delta(G)+1+1 = \Delta(G)+2 \qquad \dots(2)$$

Kasus 3 : $n_1 = n_2 = \dots = n_{2m} < n_{2m+1} \leq \dots \leq n_r$

Bentuk graf G' dari G dengan cara menambahkan sebuah titik baru namakan x pada partisi ke r dan menghubungkan titik x dengan sebuah sisi ke setiap titik G yang bukan terletak dipartisi ke r. Perhatikan bahwa $K_{n_1,n_2,\dots,n_{2r-1}}$merupakan subgraf dari G maupun G' dan subgraf ini memuat sebuah 1-faktor namakan 1-faktor ini adalah F.

Misalkan $G^*=G'-F$ maka $\Delta(G^*)=\Delta(G)$. Misalkan $\Delta(G)+1=t$. Berdasarkan Teorema Vizing $\chi'(G^*) \leq \Delta(G^*+1) = \Delta(G)+1=t$. Ini berarti ada sebuah pewarnaan-sisi-t pada G^*, namakan pewarnaan-sisi tersebut adalah W. Selanjutnya pewarnaan-sisi-W pada G^* dapat diubah ke pewarnaan total W_T pada graf G dengan menggunakan warna-warna 1,2,3,...,t,t+1 sebagai berikut,

$W_T(v) = t+1, \; v \in A_r$

$$W_T(e) = \begin{cases} W(xv), v \in V(G)\backslash A_r \\ W(e), e \in G\backslash F \\ t+1, e \in F \end{cases}$$

Akibatnya,

$$\chi_T(G) \leq t+1 = \Delta(G)+1+1 = \Delta(G)+2 \qquad \dots(3)$$

Berdasarkan (1), (2), dan (3) teorema terbukti. ∎

C. Bilangan Kromatik Total Graf Sentral dari Beberapa Kelas Graf

Sebelumnya akan ditunjukkan bahwa bilangan kromatik total graf sentral dari beberapa kelas graf juga memenuhi konjektur Behzad;

Teorema 3.9 :

$$\chi_T(C(C_n)) = \begin{cases} n, & n \not\equiv 0 \ (mod\ 2) \\ n+1, & n \equiv 0 \ (mod\ 2) \end{cases}$$

(Sudha & Manikandan, 2017)

Bukti :

Perhatikan bahwa $\Delta(C(C_n))$= n-1. Sehingga berdasarkan Teorema 3.1 diperoleh,

$$\chi_T(C(C_n)) \geq \Delta(C(C_n))+1 = n \qquad \dots (1)$$

Selanjutnya akan ditinjau 2 kasus sebagai berikut;

Kasus 1 : $n \not\equiv 0$ (mod 2)

Definisikan fungsi pewarnaan-total-W pada graf $C(C_n)$ sebagai berikut:

$$W(v_i) \equiv \begin{cases} (2i+1)(mod\ n), & \text{jika } (2i+1) \not\equiv 0(mod\ n) \\ n, & \text{yang lainnya} \end{cases}$$

$$W(u_i) \equiv \begin{cases} 2(i+1)(mod\ n), & \text{jika } 2(i+1) \not\equiv 0(mod\ n) \\ n, & \text{yang lainnya} \end{cases}$$

$W(v_i v_j) \equiv$

$$\begin{cases} (i+j)(mod\ n), & \text{jika } (i+j) \not\equiv 0(mod\ n), j > i+1 \\ n, & \text{yang lainnya} \end{cases}$$

$W(v_i u_j) \equiv$

$$\begin{cases} (i+j)(mod\ n), & \text{jika } (i+j) \not\equiv 0(mod\ n) \\ n, & \text{yang lainnya} \end{cases}$$

Sehingga berdasarkan Definisi 3.1 diperoleh,

$$\chi_T(C(C_n)) \leq n \qquad \dots (2)$$

Dari (1) dan (2) dapat disimpulkan,

$$\chi_T(C(C_n)) = n$$

Kasus 2 : $n \equiv 0\ (mod\ 2)$

Definisikan fungsi pewarnaan-total-W pada graf $C(C_n)$ sebagai berikut:

$W(v_i)\equiv$
$\begin{cases}(2i+1)(mod\ (n+1)), \text{jika } (2i+1) \not\equiv 0(mod\ (n+1)) \\ n+1, \qquad\qquad \text{yang lainnya}\end{cases}$

$W(u_i)\equiv$
$\begin{cases}2(i+1)(mod\ (n+1)), \text{jika } 2(i+1) \not\equiv 0(mod\ (n+1)) \\ n+1, \qquad\qquad \text{yang lainnya}\end{cases}$

$W(u_n)$= 1.

$W(v_iv_j)\equiv$
$\begin{cases}(i+j)(mod\ (n+1)), \text{jika } (i+j) \not\equiv 0(mod\ (n+1)), j > i+1 \\ n+1, \qquad\qquad \text{yang lainnya}\end{cases}$

$W(v_iu_j)\equiv$
$\begin{cases}(i+j)(mod\ (n+1)), \text{jika } (i+j) \not\equiv 0(mod\ (n+1)) \\ n+1, \qquad\qquad \text{yang lainnya}\end{cases}$

Sehingga berdasarkan Definisi 3.1 diperoleh,

$$\chi_T(C(C_n)) \le n+1 \qquad \text{... (3)}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa ;

$$\chi_T(C(C_n)) \ge \chi_T(K_n) = n+1$$

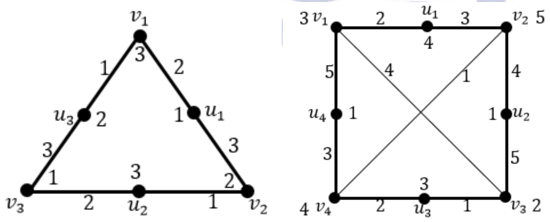
Sementara untuk n genap χ_T (K_n)=n+1. Sehingga diperoleh,

$$\chi_T(C(C_n)) \ge n+1 \qquad \text{... (4)}$$

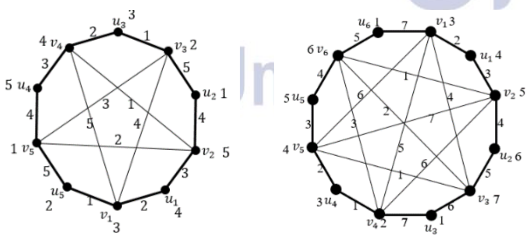
Dari (3) dan (4) dapat disimpulkan, $\chi_T(C(C_n)) = n+1$

Dengan demikian teorema terbukti. ∎

Contoh :



(a) **(b)**



(c) **(d)**

Gambar 3.4:(a) Pewarnaan-total-3 pada graf sentral dari C_3
(b) Pewarnaan-total-5 pada graf sentral dari C_5
(c) Pewarnaan-total-5 pada graf sentral dari C_4
(d) Pewarnaan-total-7 pada graf sentral dari C_6

Teorema 3.10 :

$$\chi_T(C(P_n)) = \begin{cases} n, & n \not\equiv 0\ (mod\ 2) \\ n+1, & n \equiv 0\ (mod\ 2)\end{cases}$$

(Sudha & Manikandan, 2017)

Bukti :

Perhatikan bahwa $\Delta(C(P_n))$= n-1. Sehingga berdasarkan Teorema 3.1 diperoleh,

$$\chi_T(C(P_n)) \ge \Delta(C(P_n)) - 1 + 1 = n \qquad \text{... (1)}$$

Selanjutnya akan ditinjau 2 kasus sebagai berikut;

Kasus 1 : $n \not\equiv 0\ (mod\ 2)$

Definisikan fungsi pewarnaan-total-W pada graf $C(P_n)$ sebagai berikut:

$W(v_i)\equiv \begin{cases}(2i+1)(mod\ n), \text{jika } (2i+1) \not\equiv 0(mod\ n) \\ n, \qquad\qquad \text{yang lainnya}\end{cases}$

$W(v_n)$= n

$W(u_i)\equiv \begin{cases}2(i+1)(mod\ n), \text{jika } 2(i+1) \not\equiv 0(mod\ n) \\ n, \qquad\qquad \text{yang lainnya}\end{cases}$

$W(u_{n-1})$=1

$W(v_iv_j)\equiv$
$\begin{cases}(i+j)(mod\ n), \text{jika } (i+j) \not\equiv 0(mod\ n), j > i+1 \\ n, \qquad\qquad \text{yang lainnya}\end{cases}$

$W(v_iu_j)\equiv$
$\begin{cases}(i+j)(mod\ n), \text{jika } (i+j) \not\equiv 0(mod\ n) \\ n, \qquad\qquad \text{yang lainnya}\end{cases}$

Sehingga berdasarkan Defnisi 3.1 diperoleh,

$$\chi_T(C(P_n)) \le n \qquad \text{... (2)}$$

Dari (1) dan (2) dapat disimpulkan,

$$\chi_T(C(P_n)) = n$$

Kasus 2 : $n \equiv 0\ (mod\ 2)$

Definisikan fungsi pewarnaan-total-W pada graf $C(P_n)$ sebagai berikut:

$W(v_i)\equiv$
$\begin{cases}(2i+1)(mod\ (n+1)), \text{jika } (2i+1) \not\equiv 0(mod\ (n+1)) \\ n+1, \qquad\qquad \text{yang lainnya}\end{cases}$

$W(u_i)\equiv$
$\begin{cases}2(i+1)(mod\ (n+1)), \text{jika } 2(i+1) \not\equiv 0(mod\ (n+1)) \\ n+1, \qquad\qquad \text{yang lainnya}\end{cases}$

$W(v_iv_j)\equiv$
$\begin{cases}(i+j)(mod\ (n+1)), \text{jika } (i+j) \not\equiv 0(mod\ (n+1)), j > i+1 \\ n+1, \qquad\qquad \text{yang lainnya}\end{cases}$

$W(v_iu_j)\equiv$
$\begin{cases}(i+j)(mod\ (n+1)), \text{jika } (i+j) \not\equiv 0(mod\ (n+1)) \\ n+1, \qquad\qquad \text{yang lainnya}\end{cases}$

Sehingga berdasarkan Defnisi 3.1 diperoleh,

$$\chi_T(C(P_n)) \le n+1 \qquad \text{... (3)}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa ;

$$\chi_T(C(P_n)) \ge \chi_T(K_n) = n+1$$

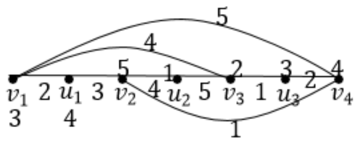
Sementara untuk n genap, $\chi_T(K_n)$=n+1 (Teorema 3.3). Sehingga diperoleh,

$$\chi_T(C(P_n)) \ge n+1 \qquad \text{... (4)}$$

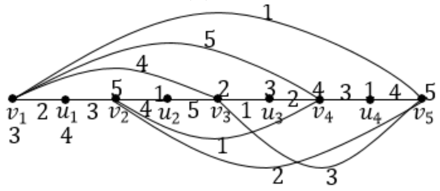
Dari (3) dan (4) dapat disimpulkan,

$$\chi_T(C(P_n)) = n+1$$

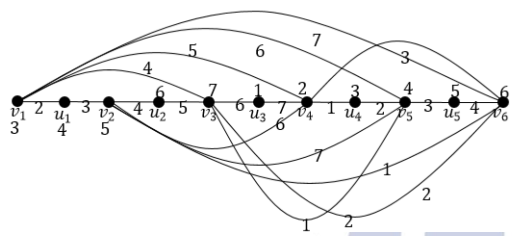
Contoh :



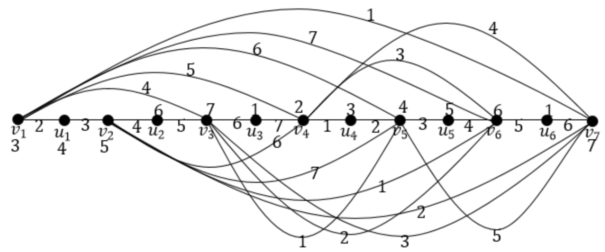
(a)



(b)



(c)



(d)

Gambar 3.5 : (a) Pewarnaan-total-5 pada graf sentral dari P_5
(b) Pewarnaan-total-7 pada graf sentral dari P_7
(c) Pewarnaan-total-5 pada graf sentral dari P_4
(d) Pewarnaan-total-7 pada graf sentral dari P_6

Teorema 3.11 :

Jika $n \geq 3$, maka $\chi_T(C(S_{1,n}))$ = $n + 1$.

(Sudha & Manikandan, 2017)

Bukti :

Perhatikan bahwa $\Delta(C(S_{1,n}))$= n. Sehingga berdasarkan Teorema 3.1 diperoleh,

$$\chi_T(C(S_{1,n})) \geq \Delta(C(S_{1,n})) = n+1 \quad \text{... (1)}$$

Selanjutnya definisikan fungsi pewarnaan-total-W pada graf $C(S_{1,n})$ sebagai berikut:

$W(v_0)$= $n + 1$

$W(v_i)$= $i, 1 \leq i \leq n$

$W(u_1)$= 3 dan $W(u_n)$= 1

$W(u_i)$= $i - 1, 2 \leq i \leq n - 1$

$W(v_0 u_i)$= $i, 1 \leq i \leq n$

$W(v_i u_i)$≡

$$\begin{cases} 2i(mod\ (n+1)), & \text{jika } 2i \not\equiv 0(mod\ (n+1)) \\ n+1, & \text{yang lainnya} \end{cases}$$

Sehingga berdasarkan Definisi 3.1 diperoleh,

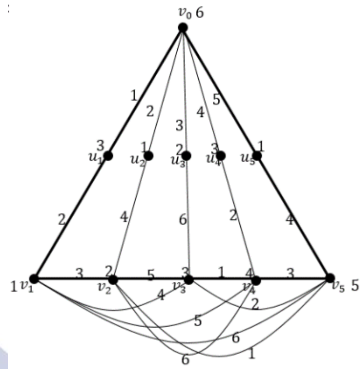
$$\chi_T(C(P_n)) \leq \Delta(C(S_{1,n})) + 1 = n+1 \quad \text{... (2)}$$

Dari (1) dan (2) dapat disimpulkan,

$$\chi_T(C(S_{1,n})) = n+1$$

Dengan demikian teorema terbukti. ■

Contoh :



Gambar 3.6 : Pewarnaan-Total-6 pada graf sentral dari bintang $C(S_{1,5})$

4. PENUTUP

Simpulan

Berdasarkan pembahasan dapat disimpulkan :

1. Jika G graf sederhana, maka $\chi_T(G) \geq \Delta(G) + 1$.
2. Jika C_n merupakan sikel dengan n titik, maka ;
$\chi_T(C_n)$ = $\begin{cases} 3, n \equiv 0(mod 3) \\ 4, n \not\equiv 0(mod 3) \end{cases}$
3. Jika K_n merupakan graf komplet dengan n titik, maka;
$\chi_T(K_n)$ = $\begin{cases} n, & n \not\equiv 0\ (mod\ 2) \\ n+1, n & \equiv 0\ (mod\ 2) \end{cases}$
4. Jika P_n merupakan lintasan dengan n titik, maka ;
$\chi_T(P_n)$ = $\begin{cases} \Delta(G) + 2, n = 2 \\ \Delta(G) + 1, n \geq 3 \end{cases}$
5. Jika $S_{1,n}$ merupakan bintang dengan n+1 titik, maka ;
$\chi_T(S_{1,n})$ = $\begin{cases} n + 2, n = 1 \\ n + 1, n \geq 2 \end{cases}$
6. Jika G merupakan graf bipartit, maka $\chi_T(G) \leq \Delta(G) +$ 2.
7. Jika $K_{n_1,\ldots,n_r}$ merupakan graf multipartit komplet, maka ;
$$\chi_T(K_{n_1,\ldots,n_r}) \leq \Delta(K_{n_1,\ldots,n_r}) + 2$$
8. Jika $C(C_n)$ merupakan graf sentral dari sikel, maka ;
$\chi_T(C(C_n))$ = $\begin{cases} n, & n \not\equiv 0\ (mod\ 2) \\ n+1, n & \equiv 0\ (mod\ 2) \end{cases}$
9. Jika $C(P_n)$ merupakan graf sentral dari lintasan, maka;
$\chi_T(C(C_n))$ = $\begin{cases} n, & n \not\equiv 0\ (mod\ 2) \\ n+1, n & \equiv 0\ (mod\ 2) \end{cases}$
10. Jika $C(S_{1,n})$ merupakan graf sentral dari bintang dengan $n \geq 3$, maka ;
$$\chi_T(C(S_{1,n})) = n + 1.$$

Saran

Secara umum bilangan kromatik dari beberapa kelas graf yang lain belum ditemukan nilai eksaknya. Oleh karena itu, penulis menyarankan kepada pembaca yang memiliki minat akademis yang sama, dapat lebih mendalami dan mengembangkan teori-teori yang berkaitan dengan bilangan kromatik total yang belum dibahas dalam skripsi ini.

DAFTAR PUSTAKA

K. Budayasa. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Universitas Negeri Surabaya Press.

C. Golumbic. 2018. *Total Colouring of Rooted Path Graphs*. Caesarea Rothscild Institute and the Departement of Computer Sciences. University of Haifa, Haifa. *https://doi.org/10.1016/j.ipl.2018.03.002*.

S. Sudha & K. Manikandan. 2017. *Total Coloring of Central Graphs of a Path, a Cycle and a Star*. *International Journal of Scientific and Innovative Mathematical Research* (IJSIMR). Vol. 5 (10): pp 15-22.

M. Rosenfeld. 1971. *On The Total Colouring of Certain Graphs*. Israel J. Math 9 (3) 396-402.

H.P. Yap. 1986. *Some Topics in Graph Theory*. London Math. Soc. Lecture Note Series 108 Cambridge University Press.

H.P. Yap. 1989. *Total Colourings of Graphs*. Bull. London Math. Soc 21. 159-163.