MATH*unesa*
Jurnal Ilmiah Matematika *Volume 7 No. 3 Tahun 2019*
ISSN 2301-9115

SIFAT-SIFAT MATRIKS GABUNGAN

Dani Aprilya Erfianti
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : danierfianti@mhs.unesa.ac.id

Dwi Nur Yunianti
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : niyan_zalpha@yahoo.com

Abstrak

Matriks gabungan dari A, ditulis $C(A)$ adalah matriks gabungan dari matriks nonsinguler A yang didefinisikan sebagai $A \circ (A^{-1})^T$, dengan "$\circ$" merupakan operasi perkalian produk Hadamard. Artikel ini membahas sifat-sifat matriks gabungan, di antaranya tentang nonnegativitas matriks gabungan ditinjau dari matriks *G*, matriks *M*, dan matriks *H*.

Kata kunci: matriks gabungan, nonnegativitas, matriks *G*, matriks *M*, matriks *H*.

Abstract

The combined matrix of A, written $C(A)$ is combined matrix from nonsingular matrix A which is defined as $A \circ (A^{-1})^T$, with "$\circ$" being Hadamard product multiplication operation. This article discusses the properties of combined matrices, among them nonnegativity of combined matrices in terms of G-matrix, M-matrix, and H-matrix.

Keywords : combined matrices, nonnegativity, G-matrix, M-matrix, H-matrix.

1. PENDAHULUAN

Matriks gabungan dari A, ditulis $C(A)$ pertama kali diperkenalkan oleh Miroslav Fiedler dan Thomas L. Markham. $C(A)$ adalah matriks gabungan dari matriks nonsinguler A yang didefinisikan sebagai $A \circ (A^{-1})^T$, dengan "$\circ$" merupakan operasi perkalian produk Hadamard. Matriks gabungan dapat diaplikasikan pada bidang ilmu pengetahuan (Bru, et al., 2014).

Matriks G merupakan jenis matriks yang diperkenalkan oleh Miroslav Fiedler dan Frank J. Hall. Matriks A disebut matriks G, jika matriks A nonsinguler dan ada dua matriks diagonal D_1 dan D_2 nonsinguler, sehingga memenuhi kondisi $(A^{-1})^T = D_1 A D_2$ (Bru, et al., 2014). Matriks M merupakan jenis matriks yang diperkenalkan oleh Hans Schneider. Matriks nonsinguler $A = [a_{ij}]$ berordo $n \times n$ disebut matriks M, jika $a_{ij} \leq 0$ untuk $i \neq j$ dan $A^{-1} \geq 0$ (Poole, 1975). Matriks H merupakan jenis matriks yang diperkenalkan oleh Bishan Li, Lei Li, Masunori Harada, Hiroshi Niki, dan Michael J. Tsatsomeros. Matriks A disebut matriks H, jika matriks perbandingannya adalah matriks M. Matriks perbandingan dari matriks A, ditulis $\mathcal{M}(A)$ (Li, et al., 1998).

Matriks $A = [a_{ij}]$ berordo $n \times n$ disebut matriks nonnegatif jika $a_{ij} \geq 0$ dan ditulis $A \geq 0$ (Leon, 2001). Matriks stokastik ganda adalah matriks nonnegatif yang jumlah semua baris dan kolomnya bernilai sama dengan 1 (Brualdi, 1988). Jika $C(A)$ nonnegatif maka $C(A)$ merupakan matriks stokastik ganda dan memiliki sifat maupun aplikasi yang menarik Contoh pengaplikasian matriks stokastik ganda yaitu pada topik dalam teori komunikasi yang disebut *satelite-switched* dan pada gagasan terbaru tentang automorfisme dari sebuah grafik (Bru, et al., 2014). Berdasarkan hal-hal tersebut, pada artikel ini akan dikaji lebih lanjut tentang sifat-sifat matriks gabungan, di antaranya tentang nonnegativitas matriks gabungan yang ditinjau dari matriks *G*, matriks *M*, dan matriks *H*.

2. KAJIAN TEORI

Pada bagian ini dibahas dasar-dasar teori yang berkaitan dengan pembahasan, yaitu:

Matriks dan Operasinya

Definisi 2.1

Field adalah himpunan F tidak kosong, dimana dua operasi penjumlahan dan perkalian didefinisikan, sehingga untuk setiap pasangan elemen $a, b \in F$ ada elemen tunggal $a + b$ dan ab dari F sedemikian hingga pernyataan berikut berlaku, yaitu:

1. $\forall a, b \in F$ berlaku $a + b = b + a$ dan $ab = ba$ (komutatif penjumlahan dan perkalian).
2. $\forall a, b, c \in F$ berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$ dan $(ab)c = a(bc)$ (asosiatif penjumlahan dan perkalian).
3. $\forall a, b, c \in F$ berlaku $a(b + c) = ab + ac$ (distribusi perkalian atas penjumlahan).
4. Ada elemen 0 di F sehingga $a + 0 = 0 + a = a$, untuk semua $a \in F$.
5. $\forall a \in F$, ada elemen $-a$ di F sehingga $a + (-a) = 0$.
6. Ada elemen $1 \in F$ sehingga $1 \neq 0$ dan sedemikian sehingga $a.1 = a$ untuk semua $a \in F$.
7. Untuk setiap $a \in F$ bukan nol, ada elemen $a^{-1} \in F$ sehingga $a.a^{-1} = 1$.

(Curtis, 1986)

Definisi 2.2
Matriks adalah susunan $m \times n$ skalar dari *field* F.

(Horn & Johnson, 1985)

Dalam pembahasan ini, *field* yang dibahas adalah *field* $\mathbb{R}$.

Definisi 2.3
Diketahui A adalah matriks dengan m baris dan n kolom. Ukuran dari matriks A adalah banyaknya baris dan banyaknya kolom dari matriks A dan ditulis $m \times n$. Lebih lanjut, ukuran dari matriks A disebut ordo matriks A.

(Anton & Rorres, 2014)

Definisi 2.4
Diketahui $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ masing-masing adalah matriks berordo $m \times n$. Jumlah matriks A dan B, ditulis $A + B$ dan didefinisikan sebagai $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$, untuk $i = 1, \dots, m$ dan $j = 1, \dots, n$.

(Leon, 2001)

Definisi 2.5
Diketahui $A = [a_{ij}]$ adalah matriks berordo $m \times n$ dan $B = [b_{ij}]$ adalah matriks berordo $n \times r$. Hasil kali matriks A dan B, ditulis $D = [d_{ij}]$ adalah matriks berordo $m \times r$ yang entri-entrinya didefinisikan sebagai

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

untuk $i = 1, \dots, m$ dan $j = 1, \dots, r$.

(Leon, 2001)

Definisi 2.6
Diketahui $A = [a_{ij}]$ adalah matriks berordo $m \times n$. αA adalah matriks berordo $m \times n$ yang entri-entrinya merupakan hasil dari αa_{ij}, dengan $\alpha \in \mathbb{R}$.

(Leon, 2001)

Jenis Matriks

Definisi 2.7
Matriks A disebut matriks persegi jika matriks A berordo $n \times n$.

(Anton & Rorres, 2014)

Definisi 2.8
Diketahui $A = [a_{ij}]$ adalah matriks berordo $m \times n$. Transpos matriks A, ditulis $A^T = [a_{ij}]^T = [a_{ji}]$ dan didefinisikan sebagai matriks berordo $n \times m$ yang kolom pertamanya adalah baris pertama dari A, kolom keduanya adalah baris kedua dari A, dan seterusnya.

(Anton & Rorres, 2014)

Teorema 2.1
Jika A^T adalah transpos matriks A maka $(A^T)^T = A$.

(Leon, 2001)

Definisi 2.9
Diketahui $A = [a_{ij}]$ adalah matriks berordo $n \times n$. A disebut matriks identitas, jika

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, jika\ i = j \\ 0, jika\ i \neq j \end{cases}$$

untuk $i, j = 1, \dots, n$. Matriks identitas dinyatakan dengan I.

(Leon, 2001)

Definisi 2.10
Diketahui $A = [a_{ij}]$ adalah matriks berordo $n \times n$. A disebut matriks diagonal, jika

$$A = [a_{ij}] = \begin{cases} a_{ij} \neq 0, jika\ i = j \\ a_{ij} = 0, jika\ i \neq j \end{cases}$$

untuk $i, j = 1, \dots, n$.

(Anton and Rorres 2014)

Definisi 2.11
Diketahui $A = [a_{ij}]$ adalah matriks berordo $n \times n$. Matriks A disebut matriks segitiga atas, jika $a_{ij} = 0$ untuk $i > j$.

(Leon, 2001)

Definisi 2.12
Diketahui $A = [a_{ij}]$ adalah matriks berordo $n \times n$. Matriks A disebut matriks segitiga bawah, jika $a_{ij} = 0$ untuk $i < j$.

(Leon, 2001)

Definisi 2.13
Diketahui matriks $A = [a_{ij}]$ berordo $n \times n$. Matriks A disebut matriks nonnegatif jika $a_{ij} \geq 0$ dan ditulis $A \geq 0$. Matriks A disebut matriks nonpositif jika $a_{ij} \leq 0$ dan ditulis $A \leq 0$. Matriks A disebut matriks positif jika $a_{ij} > 0$ dan ditulis $A > 0$. Matriks A disebut matriks negatif jika $a_{ij} < 0$ dan ditulis$A < 0$ untuk $i, j = 1, \dots, n$.

(Leon, 2001)

Definisi 2.14
Diketahui $A \geq 0$ berordo $n \times n$. A disebut matriks stokastik ganda, jika jumlah entri setiap baris dan setiap kolomnya sama dengan 1.

(Horn & Johnson, 1985)

Teorema 2.2
Jika A adalah matriks segitiga atas(bawah) maka A^T adalah matriks segitiga atas(bawah).

(Anton & Rorres, 2014)

Determinan

Definisi 2.15
Diketahui $A = [a_{ij}]$ adalah matriks berordo $n \times n$. Minor dari a_{ij} dinyatakan oleh M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan matriks berordo $(n-1) \times (n-1)$ yang diperoleh dari matriks A dengan menghapus baris ke- i dan kolom ke- j. Kofaktor entri a_{ij}, ditulis K_{ij} didefinisikan sebagai

$$K_{ij} = (-1)^{i+j}\, M_{ij}$$

untuk $i, j = 1, \ldots, n$.

(Anton and Rorres 2014)

Secara rekursif, determinan matriks persegi dapat didefinisikan dengan memulainya dari determinan matriks 2×2, sebagai berikut

Definisi 2.16
Diketahui $A = [a_{ij}]$ adalah matriks berordo $n \times n$. Determinan matriks A, ditulis $\det(A)$ adalah jumlah hasil kali antara entri-entri dalam baris atau kolom dengan kofaktor-kofaktornya dan didefinisikan sebagai berikut

(i) $\det(A)$ dinyatakan sebagai ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-i, yaitu

$$\det(A) = a_{i1}K_{i1} + a_{i2}K_{i2} + \cdots + a_{in}K_{in} \tag{2.1}$$

Persamaan (2.1) juga dapat ditulis sebagai

$$\det(A) = a_{i1}M_{i1} - a_{i2}M_{i2} + \cdots \pm a_{in}M_{in}$$

untuk $i = 1, \ldots, n$.

dan

(ii) $\det(A)$ dinyatakan sebagai ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-j, yaitu

$$\det(A) = a_{1j}K_{1j} + a_{2j}K_{2j} + \cdots + a_{nj}K_{nj} \tag{2.2}$$

Persamaan (2.2) juga dapat ditulis sebagai

$$\det(A) = a_{1j}M_{1j} - a_{2j}M_{2j} + \cdots \pm a_{nj}M_{nj}$$

untuk $j = 1, \ldots, n$.

(Anton & Rorres, 2014)

Teorema 2.3
Jika A adalah matriks berordo $n \times n$ maka $\det(A^T) = \det(A)$.

(Anton & Rorres, 2014)

Teorema 2.4
Jika $A = [a_{ij}]$ adalah matriks segitiga atas (bawah) maka $\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} \ldots a_{nn}$.

(Anton & Rorres, 2014)

Teorema 2.5
Diketahui $A = [a_{ij}]$ matriks berordo $n \times n$. Jika A memiliki dua baris yang sama atau dua kolom yang sama maka $\det(A) = 0$.

(Anton & Rorres, 2014)

Teorema 2.6
Diketahui $A = [a_{ij}]$ adalah matriks berordo $n \times n$. Jika entri-entri pada baris atau kolom matriks A dikalikan dengan kofaktor-kofaktor entri matriks A dari baris atau kolom berbeda, maka jumlah hasil kalinya selalu sama dengan 0.

(Anton & Rorres, 2014)

Invers Matriks

Definisi 2.17
Diketahui $A = [a_{ij}]$ adalah matriks berordo $n \times n$. Matriks A disebut matriks nonsinguler jika determinan tidak sama dengan 0 dan terdapat matriks B sehingga memenuhi

$$AB = BA = I$$

lebih lanjut B disebut invers matriks A dan ditulis dengan simbol A^{-1} sehingga berlaku

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

(Anton & Rorres, 2014)

Definisi 2.18
Diketahui $A = [a_{ij}]$ adalah matriks berordo $n \times n$. Matriks adjoin A, ditulis $adj(A)$ adalah transpos matriks kofaktor.

(Anton & Rorres, 2014)

Teorema 2.7
Jika A adalah matriks nonsinguler, maka $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$.

(Anton & Rorres, 2014)

Teorema 2.8
Jika A adalah matriks nonsinguler maka matriks A^{-1} merupakan matriks nonsinguler dan $(A^{-1})^{-1} = A$.

(Anton & Rorres, 2014)

Teorema 2.9
Jika I adalah matriks identitas berordo $n \times n$ maka $I^T = I$.

(Supranto, 2003)

Teorema 2.10
Jika A^T adalah matriks transpos dan A^{-1} adalah invers matriks A maka $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

(Anton & Rorres, 2014)

Teorema 2.11
Jika A adalah matriks segitiga atas(bawah) maka A^{-1} adalah matriks segitiga atas(bawah).

(Anton & Rorres, 2014)

Produk Hadamard

Definisi 2.19

Diketahui $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ masing-masing adalah matriks berordo $m \times n$. Produk Hadamard dari A dan B didefinisikan sebagai

$$A \circ B = [a_{ij} b_{ij}]$$

Untuk $i = 1, \dots, m$ dan $j = 1, \dots, n$.

Matriks $A \circ B$ berordo $m \times n$.

(Horn & Johnson, 1985)

Teorema 2.12

Jika $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ masing-masing adalah matriks berordo $m \times n$ maka $A \circ B = B \circ A$.

(Horn & Johnson, 1985)

Teorema 2.13

Jika $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ masing-masing adalah matriks berordo $n \times n$ dan D adalah matriks diagonal maka berlaku $A \circ (DBD) = D(A \circ B)D$.

(Styan, 1973)

3. PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dibahas tentang hal-hal yang dibahas dalam artikel ini.

Definisi 3.1

Diketahui A adalah matriks nonsinguler. Matriks gabungan dari A, ditulis $C(A)$ didefinisikan sebagai

$$C(A) = A \circ (A^{-1})^T$$

(Bru, et al., 2014)

Lebih lanjut, untuk $A = [a_{ij}]$ dan

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \left[\frac{1}{\det(A)}\, adj(A)\right] \\ &= [\frac{1}{\det(A)}\, K_{ij}]^T \\ &= \left[\frac{1}{\det(A)}\, (-1)^{i+j}\, M_{ij}\right]^T \\ &= \left[\frac{1}{\det(A)}\, (-1)^{j+i}\, M_{ji}\right] \end{aligned}$$

Maka, $C(A)$ dapat ditulis sebagai berikut

$$C(A) = \left[\frac{1}{\det(A)}(-1)^{i+j}\, a_{ij} M_{ij}\right]$$

Atau $C(A)$ juga dapat ditulis

$$C(A) = \left[\frac{1}{\det(A)} a_{ij} K_{ij}\right]$$

Maka

Jumlah baris ke-i $= \frac{a_{i1}K_{i1} + a_{i2}K_{i2} + \cdots + a_{in}K_{in}}{\det(A)} = \frac{\det(A)}{\det(A)} = 1$ (3.1)

untuk $i = 1, \dots, n$.

Jumlah kolom ke-j $= \frac{a_{1j}K_{1j} + a_{2j}K_{2j} + \cdots + a_{nj}K_{nj}}{\det(A)} = \frac{\det(A)}{\det(A)} = 1$ (3.2)

untuk $j = 1, \dots, n$.

Teorema 3.1

Untuk sebarang A adalah matriks, berlaku

$$C(A^T) = C(A^{-1})$$

(Bru, et al., 2014)

Bukti :

Dari Teorema 2.10 diperoleh $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Dari Teorema 2.1 diperoleh $(A^T)^T = A$.

Dari Teorema 2.12 diperoleh $A \circ B = B \circ A$.

Dari Teorema 2.8 diperoleh $(A^{-1})^{-1} = A$.

Kemudian dari Definisi 3.1, $C(A^T)$ dapat ditulis

$$\begin{aligned} C(A^T) &= A^T \circ ((A^T)^{-1})^T \\ &= A^T \circ ((A^{-1})^T)^T \\ &= A^T \circ A^{-1} \\ &= A^{-1} \circ A^T \\ &= A^{-1} \circ ((A^{-1})^{-1})^T \\ &= C(A^{-1}). \end{aligned}$$

Jadi, $C(A^T) = C(A^{-1})$. ■

Teorema 3.2

Jika $C(A) \geq 0$ maka $C(A)$ adalah matriks stokastik ganda.

(Bru, et al., 2014)

Bukti :

Diketahui $C(A) = \left[\frac{1}{\det(A)} a_{ij} K_{ij}\right] \geq 0$.

Dari persamaan (3.1), persamaan (3.2), dan berdasarkan Definisi 2.16, berlaku untuk sebarang $C(A) \geq 0$ maka $C(A)$ adalah matriks stokastik ganda. ■

Teorema 3.3

Jika A adalah matriks segitiga atas (bawah) maka $C(A) = I$.

(Bru, et al., 2014)

Bukti :

(i) Akan dibuktikan jika A adalah matriks segitiga atas maka $C(A) = I$.

Diketahui A adalah matriks segitiga atas, dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Kemudian berdasarkan Teorema 2.4 diperoleh $\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} \dots a_{nn}$ dan berdasarkan Teorema 2.11 diperoleh A^{-1} adalah matriks segitiga atas maka diperoleh $(A^{-1})^T$ adalah matriks segitiga bawah, sehingga diperoleh

$C(A) = A \circ (A^{-1})^T$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}\cdot\frac{1}{a_{11}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}\cdot\frac{1}{a_{22}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}\cdot\frac{1}{a_{33}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\cdot\frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Jadi, terbukti jika A adalah matriks segitiga atas maka $C(A) = I$.

(ii) Akan dibuktikan jika A adalah matriks segitiga bawah maka $C(A) = I$.

Diketahui A adalah matriks segitiga bawah, dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Kemudian berdasarkan Teorema 2.4 diperoleh $\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} \ldots a_{nn}$ dan berdasarkan Teorema 2.11 diperoleh A^{-1} adalah matriks segitiga bawah maka diperoleh $(A^{-1})^T$ adalah matriks segitiga atas, sehingga diperoleh $C(A) = A \circ (A^{-1})^T =$

$$\begin{bmatrix} a_{11}\cdot\frac{1}{a_{11}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}\cdot\frac{1}{a_{22}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}\cdot\frac{1}{a_{33}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\cdot\frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Jadi, terbukti jika A adalah matriks segitiga bawah maka $C(A) = I$.

berdasarkan (i) dan (ii) terbukti bahwa jika A adalah matriks segitiga atas (bawah) maka $C(A) = I$. ■

Teorema 3.4

Diketahui $A \geq 0$. $C(A) \geq 0$ jika dan hanya jika $A^{-1} \geq 0$.

(Bru, et al., 2014)

Bukti :

Diketahui $A \geq 0$.

Maka

$C(A) = A \circ (A^{-1})^T$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}\cdot\frac{K_{11}}{\det(A)} & a_{12}\cdot\frac{K_{12}}{\det(A)} & \cdots & a_{1n}\cdot\frac{K_{1n}}{\det(A)} \\ a_{21}\cdot\frac{K_{21}}{\det(A)} & a_{22}\cdot\frac{K_{22}}{\det(A)} & \cdots & a_{2n}\cdot\frac{K_{2n}}{\det(A)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\cdot\frac{K_{n1}}{\det(A)} & a_{n2}\cdot\frac{K_{n2}}{\det(A)} & \cdots & a_{nn}\cdot\frac{K_{nn}}{\det(A)} \end{bmatrix}$$

($\Longrightarrow$)

Diketahui $C(A) \geq 0$, berarti $\left[\frac{1}{\det(A)} a_{ij}K_{ij}\right] \geq 0$.

Karena matriks $A \geq 0$, berarti $\left[a_{ij}\right] \geq 0$.

Maka

$$A^{-1} = \left[\frac{1}{\det(A)} K_{ij}\right]^T \geq 0$$

Jadi, terbukti bahwa jika $C(A) \geq 0$ maka $A^{-1} \geq 0$.

($\Longleftarrow$)

Diketahui $A^{-1} \geq 0$, berarti $\left[\frac{1}{\det(A)} K_{ij}\right]^T \geq 0$

Kemudian, karena matriks $A \geq 0$ berarti $\left[a_{ij}\right] \geq 0$.

Maka

$C(A) = \left[\frac{1}{\det(A)} a_{ij}K_{ij}\right] \geq 0$.

Jadi, terbukti bahwa jika $A^{-1} \geq 0$ maka $C(A) \geq 0$.

Berdasarkan (i) dan (ii) terbukti bahwa $C(A) \geq 0$ jika dan hanya jika $A^{-1} \geq 0$. ■

Teorema 3.5

Diketahui $A \leq 0$. $C(A) \geq 0$ jika dan hanya jika $A^{-1} \leq 0$.

(Bru, et al., 2014)

Bukti :

Diketahui $A \leq 0$.

Maka

$C(A) = A \circ (A^{-1})^T$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}\cdot\frac{K_{11}}{\det(A)} & a_{12}\cdot\frac{K_{12}}{\det(A)} & \cdots & a_{1n}\cdot\frac{K_{1n}}{\det(A)} \\ a_{21}\cdot\frac{K_{21}}{\det(A)} & a_{22}\cdot\frac{K_{22}}{\det(A)} & \cdots & a_{2n}\cdot\frac{K_{2n}}{\det(A)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\cdot\frac{K_{n1}}{\det(A)} & a_{n2}\cdot\frac{K_{n2}}{\det(A)} & \cdots & a_{nn}\cdot\frac{K_{nn}}{\det(A)} \end{bmatrix}$$

($\Longrightarrow$)

Diketahui $C(A) \geq 0$, berarti $\left[\frac{1}{\det(A)} a_{ij}K_{ij}\right] \geq 0$.

Karena matriks $A \leq 0$, berarti $\left[a_{ij}\right] \leq 0$.

Maka

$$A^{-1} = \left[\frac{1}{\det(A)} K_{ij}\right]^T \leq 0$$

Jadi, terbukti bahwa jika $C(A) \geq 0$ maka $A^{-1} \leq 0$.

($\Longleftarrow$)

Diketahui $A^{-1} \leq 0$, berarti $\left[\frac{1}{\det(A)} K_{ij}\right]^T \leq 0$

Kemudian, karena matriks $A \leq 0$ berarti $\left[a_{ij}\right] \leq 0$.

Maka

$C(A) = \left[\frac{1}{\det(A)} a_{ij}K_{ij}\right] \geq 0$.

Jadi, terbukti bahwa jika $A^{-1} \leq 0$ maka $C(A) \geq 0$.

Berdasarkan (i) dan (ii) terbukti bahwa $C(A) \geq 0$ jika dan hanya jika $A^{-1} \leq 0$. ■

Definisi 3.2

Diketahui matriks A nonsingular. Matriks A disebut matriks G, jika terdapat dua matriks diagonal nonsingular D_1 dan D_2, sehingga $(A^{-1})^T = D_1AD_2$.

(Bru, et al., 2014)

Definisi 3.3

Diketahui $A = [a_{ij}]$ adalah matriks nonsinguler berordo $n \times n$. Matriks A disebut matriks M, jika $a_{ij} \leq 0$ untuk $i \neq j$ dan $A^{-1} \geq 0$.

(Poole, 1975)

Teorema 3.6

Diketahui A adalah matriks M. jika $C(A) \geq 0$, maka A merupakan matriks diagonal.

Bukti :

Diketahui A adalah matriks M.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

dengan $a_{ij} \leq 0$ untuk $i \neq j$ dan $A^{-1} \geq 0$.

Kemudian diperoleh

$$C(A) = A \circ (A^{-1})^T$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \cdot \frac{K_{11}}{\det(A)} & a_{12} \cdot \frac{K_{12}}{\det(A)} & \cdots & a_{1n} \cdot \frac{K_{1n}}{\det(A)} \\ a_{21} \cdot \frac{K_{21}}{\det(A)} & a_{22} \cdot \frac{K_{22}}{\det(A)} & \cdots & a_{2n} \cdot \frac{K_{2n}}{\det(A)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} \cdot \frac{K_{n1}}{\det(A)} & a_{n2} \cdot \frac{K_{n2}}{\det(A)} & \cdots & a_{nn} \cdot \frac{K_{nn}}{\det(A)} \end{bmatrix}$$

Karena $C(A) \geq 0$, maka diperoleh $\left[\frac{1}{\det(A)} a_{ij} K_{ij}\right] \geq 0$.

Karena $A^{-1} \geq 0$, maka diperoleh $\frac{1}{\det(A)} [K_{ij}]^T \geq 0$, sehingga diperoleh $a_{ij} \geq 0$.

Karena A adalah matriks M dan $a_{ij} \geq 0$, maka diperoleh $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$.

Sehingga (3.3) dapat ditulis

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

Jadi, A adalah matriks M dengan $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$.

Teorema 3.7

Jika A adalah matriks M nonnegatif, maka $C(A) = I$.

(Bru, et al., 2014)

Karena A adalah matriks M nonnegatif maka diperoleh $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$, sehingga berdasarkan Teorema 3.10, A dapat ditulis

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Lebih lanjut, $\det(A) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$, dan

$M_{11} = a_{22} \dots a_{nn}$

$K_{11} = (-1)^{1+1}\,(a_{22} \dots a_{nn}) = a_{22} \dots a_{nn}$

$M_{22} = a_{11} \dots a_{nn}$

$K_{22} = (-1)^{2+2}\,(a_{11} \dots a_{nn}) = a_{11} \dots a_{nn}$

$\vdots$

$M_{nn} = a_{11}a_{22} - 0 = a_{11}a_{22}$

$K_{nn} = (-1)^{n+n}\,(a_{11}a_{22}) = a_{11}a_{22}$

Maka diperoleh

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix} \geq 0$$

Maka

$$C(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Jadi, terbukti jika A adalah matriks M nonnegatif maka $C(A) = I$. ■

Definisi 3.4

Diketahui $A = [a_{ij}]$ adalah matriks berordo $n \times n$. Matriks A disebut matriks H, jika matriks perbandingannya adalah matriks M. Matriks perbandingan dari matriks A , ditulis $\mathcal{M}(A) = [h_{ij}]$ didefinisikan sebagai berikut

$$\mathcal{M}(A) = [h_{ij}] = \begin{cases} |a_{ij}|\ jika\ i = j \\ -|a_{ij}|\ jika\ i \neq j \end{cases}$$

(Li, et al., 1998)

Teorema 3.8

Jika A adalah matriks H maka $C(\mathcal{M}(A)) \leq 0$.

Bukti :

Diketahui A adalah matriks H maka $\mathcal{M}(A) = [h_{ij}]$ adalah matriks M.

$$\mathcal{M}(A) = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{bmatrix}$$

dengan $h_{ij} \leq 0$ untuk $i \neq j$ dan $(\mathcal{M}(A))^{-1} \geq 0$.

Karena diketahui $h_{ij} \leq 0$ untuk $i \neq j$ dan $(\mathcal{M}(A))^{-1} = \left[\frac{1}{\det(\mathcal{M}(A))} K_{ij}\right]^T \geq 0$ maka diperoleh $C(\mathcal{M}(A)) = \left[\frac{1}{\det(\mathcal{M}(A))} h_{ij} K_{ij}\right] \leq 0$.

Jadi, $C(\mathcal{M}(A)) \leq 0$. ■

PENUTUP

Simpulan

Dalam artikel ini telah dibahas mengenai sifat-sifat matriks gabungan dan nonnegativitas matriks gabungan ditinjau dari matriks G, matriks M, dan matriks

H yang telah diuraikan di dalam bagian pembahasan. Berdasarkan pembahasan dapat diperoleh simpulan sebagai berikut:

1. Sifat-sifat matriks gabungan adalah sebagai berikut:
   a. Untuk sebarang A adalah matriks, berlaku $C(A^T) = C(A^{-1})$.
   b. $C(A) \geq 0$ merupakan syarat cukup bagi $C(A)$ adalah matriks stokastik ganda.
   c. A matriks segitiga atas (bawah) merupakan syarat cukup bagi $C(A) = I$.
   d. Untuk sebarang $A \geq 0$ berlaku $C(A) \geq 0$ adalah syarat cukup dan perlu bagi $A^{-1} \geq 0$.
   e. Untuk sebarang $A \leq 0$ berlaku $C(A) \geq 0$ adalah syarat cukup dan perlu bagi $A^{-1} \leq 0$.
   f. A adalah matriks M nonnegatif merupakan syarat cukup bagi $C(A) = I$.
2. Nonnegativitas matriks gabungan ditinjau dari matriks G, matriks M, dan matriks H adalah sebagai berikut:
   a. Untuk sebarang A adalah matriks G, dengan $(A^{-1})^T = D_1 A D_2$ untuk $D_1 \geq 0$ dan $D_2 \geq 0$ merupakan syarat cukup bagi $C(A) \geq 0$.
   b. Untuk sebarang matriks A, dimana A adalah matriks M dan $C(A) \geq 0$ merupakan syarat cukup bagi A adalah matriks diagonal.
   c. Untuk sebarang A adalah matriks H tidak berlaku $C(A) \geq 0$.

Saran

Pada artikel ini penulis membahas tentang sifat-sifat matriks gabungan, di antaranya tentang nonnegativitas matriks gabungan ditinjau dari matriks G, matriks M, dan matriks H. Penulis menyarankan bagi pembaca untuk mengkaji sifat-sifat matriks gabungan dan nonnegativitas matriks gabungan ditinjau dari jenis matriks yang belum dibahas pada artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H., & Rorres, C. (2014). *Elementary Linear Algebra: Applications Version* (11th ed.). Canada: United States Copyright Act.

Bru, R., Gasso, M. T., Gimenez, I., & Santana , M. (2014). Nonnegative Combined Matrices. *Journal of Applied Mathematics, 2014*.

Brualdi, R. A. (1988). Some Applications of Doubly Stochastic Matrices. *Linear Algebra and Its Applications, 107*, 77-100.

Curtis, C. W. (1986). *Linear Algebra: An Introductory Approach*. New York: Springer-Verlag New York Inc.

Horn, R. A., & Johnson, C. R. (1985). *Matrix Analysis.* New York: The Press Syndicate of the University of Cambridge .

Leon, S. J. (2001). *Aljabar Linear dan Aplikasinya, Edisi Kelima* . Jakarta: Airlangga .

Bishan, Li, Lei, Li, Harada, M., Niki, H., & Tsatsomeros, M. J. (1998). An Iterative Criterion for H-Matrices. *Linear Algebra and Its Applications, 271*, 179-190.

Poole, G. D. (1975). Generalized M-Matrices and Applications. *Mathematics of Computation, 29*, 903-910.

Styan, G. P. (1973). Hadamard Products and Multivariate Statistical Analysis. *Linear Algebra and Its Applications* , 217-240.

Supranto, J. (2003). *Pengantar Matrix Edisi Keenam* . Jakarta: PT. Rineka Cipta.