MATH_unesa_

Jurnal Ilmiah Matematika _Volume 7 No.3 Tahun 2019_

ISSN 2301-9115

KONEKTIVITAS ALJABARIK TERKECIL GRAF

Miftakhul Hidayat Zulfaqor

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya

e-mail : miftakhulzulfaqor@mhs.unesa.ac.id

Abstrak

Konektivitas aljabarik sebuah graf (($a(G)$) merupakan nilai eigen terkecil kedua matriks Laplacian graf$G$. Nilai $a(G)$ merupakan parameter yang dapat digunakan untuk mengukur seberapa baik konektivitas graf. Penelitian ini menganalisis konektivitas aljabarik dua graf spesial , yaitu sebarang graf yang memiliki komplemen sebuah pohon tetapi bukan graf bintang ($K_{1,n-1}$), dan sebarang graf yang memiliki komplemen sebuah graf unisiklik tetapi bukan graf bintang yang ditambah dengan mengaitkan dua titik yang belum terhubung dengan sisi baru ($K_{1,n-1}+e$). Metode yang dilakukan pada penelitian mengacu pada persamaan nilai eigen Laplacian, sifat-sifat $a(G)$, dan sifat urutan barisan bilangan. Graf pohon spesial $T(n-3,1)$ adalah graf dengan n titik yang diperoleh dari dua bintang tak-terhubung $K_{1,n-3}$ dan $K_{1,1}$, dengan mengaitkan pusat $K_{1,n-3}$ dan pusat $K_{1,1}$. Konektivitas aljabarik graf dengan n titik yang memiliki komplemen pohon T, selain bintang, lebih besar atau sama dengan konektivitas aljabarik graf yang memiliki komplemen berupa pohon spesial $T(n-3,1)$, dengan kesamaan berlaku jika dan hanya jika $T \cong T(n-3,1)$. Graf unisiklik spesial $G_3(n-4,0)$ adalah graf dengan n titik yang diperoleh graf sikel C_4 dengan mengidentifikasi satu titik sebagai titik pusat $K_{1,p}$. Konektivitas aljabarik graf dengan n titik yang memiliki komplemen graf unisiklik G selain $K_{1,n-1}+e$ lebih besar atau sama dengan konektivitas aljabarik graf yang memiliki komplemen berupa graf unisiklik spesial $G_3(n-4,0)$, dengan kesamaan berlaku jika dan hanya jika $G \cong G_3(n-4,0)$.

Kata Kunci : Konektivitas aljabarik graf, graf pohon, graf unisiklik.

Abstract

The algebraic connectivity of a graph ($a(G)$) is defined as the second smallest eigenvalue of the Laplacian matrix of the graph G. The value of ($a(G)$) is parameter to measure how well a graph connected. This sudy analyzes algebraic connectivity of two unique graph, that is all graphs whose complement are trees, but not stars ($K_{1,n-1}$), and all graphs whose complement are unicyclic graphs, but not stars added one edge ($K_{1,n-1}+e$). The method in this study refers to Laplacian eigenvalue-equation, properties of $a(G)$ and the sequence of numbers. The special tree $T(n-3,1)$ is a graph with n vertices, which is obtained from two disjoint stars $K_{1,n-3}$ and $K_{1,1}$ by joining the center of $K_{1,n-3}$ and $K_{1,1}$. Algebraic connectivity of a graph with n vertices whose complement are trees T, but not stars, is greater than or equal to algebraic connectivity of a graph whose complement is special tree $T(n-3,1)$, with equality holds if anf only if $T \cong T(n-3,1)$. Special unicyclic graph $G_3(n-4,0)$ is a graph with n vertice, which is obtained from cycle C_4 by identifying one vertices with the center of $K_{1,n-4}$. Algebraic connectivity a graph with n vertices whose complement are unicyclic graph G, but not $K_{1,n-1}+e$, is greater than or equal to algebraic connectivity graph whose complement is special unicylic graph $G_3(n-4,0)$, with equality holds if only if $G \cong G_3(n-4,0)$.

Keywords : Algebraic connectivity of a graph, tree, unicylic graph.

1. PENDAHULUAN

Graf G dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks. Terdapat dua representasi matriks untuk sebuah graf; yaitu, _matriks keterhubungan langsung (adjacency matrix)_ dan _matriks keterkaitan (incidency matrix)_. Matriks keterhubungan langsung graf G adalah matriks persegi $\mathrm{A(G)} = (a_{ij})$ berordo $\mathrm{n \times n}$ yang baris dan kolomnya dilabeli dengan titik-titik graf G sedemikian hingga elemen a_{ij} menyatakan banyak sisi G yang menghubungkan titik v_i dan v_j . Sedangkan matriks keterkaitan graf G adalah matriks $\mathrm{M(G)} = (a_{ij})$ berordo $n \times t$ yang barisnya dilabeli dengan titik G dan kolomnya dengan sisi G.

Derajat titik v adalah banyaknya sisi G yang terkait dengan titik v . _Matriks derajat_ G adalah $\mathrm{D(G)} = \mathrm{diag}(d_G(v_1), d_G(v_2), \dots, d_G(v_n))$, dengan $d_G(v_i)$ adalah derajat titik v_i pada graf G. _Matriks Laplacian_ graf G, adalah $L(G) = D(G) - A(G)$. Karena $A(G)$ dan $L(G)$

matriks real dan simetris, maka nilai eigennya real (Anton & Rorres, 2005).

Nilai eigen $A(G)$ disebut *nilai eigen graf* G, nilai eigen terbesar graf G disebut jari-jari spektrum G (Biggs, 1993). Nilai eigen $L(G)$ disebut *nilai eigen laplacian* G. Nilai eigen terkecil kedua *laplacian* G disebut *konektivitas aljabarik* G yang dinyatakan dengan $a(G)$. Vektor eigen yang bersesuaian dengan $a(G)$ disebut vektor fiedler G (Godsil & Royle, 2001).

Bilangan $a(G)$ merupakan parameter yang baik untuk menentukan seberapa baik keterhubungan suatu graf dan berperan penting pada teori kontrol dan komunikasi dan lainnya. Konektivitas aljabarik telah diaplikasikan pada pembentukan jaringan kerja yang terorganisisasi agar menghasilkan kinerja yang maksimal (Saber, Fax, & Murray, 2007). Ketika struktur sebuah graf kompleks tetapi struktur komplemenya sederhana, maka lebih mudah mempelajari graf melalui graf komplemennya.

Misalkan $\mathcal{T}_n$ himpunan pohon dengan n titik dan δ_n himpunan graf unisiklik dengan n titik. $K_{1,n-1}$ merupakan *graf bintang* (*star*) dengan n titik dan $K_{1,n-1}+e$ merupakan graf $K_{1,n-1}$ dengan menambahkan sisi e pada dua titik yang tidak terhubung langsung. Sebuah graf G terhubung jika dan hanya jika $a(G) > 0$ (Fiedler, 1973). Telah diketahui bahwa komplemen $K_{1,n-1}$ merupakan graf yang tak-terhubung, begitu juga dengan $K_{1,n-1}+e$. Penelitian ini akan mengkaji "bagaimana parameter sebuah graf G dengan $G^c \in \mathcal{T} \setminus K_{1,n-1}$ atau $G^c \in \delta_n \setminus K_{1,n-1} + e$ yang memiliki konektivitas aljabarik terkecil" .

2. KAJIAN TEORI

Konektivitas Aljabarik Graf

Konektivitas aljabarik graf G dinotasikan dengan $a(G)$, adalah nilai eigen terkecil kedua matriks *laplacian* graf G. Vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen terkecil kedua disebut vektor fiedler. Sebuah graf G terhubung jika dan hanya jika $a(G) > 0$ (Fiedler, 1973).

Bilangan $a(G)$ merupakan parameter yang baik untuk menentukan seberapa baik keterhubungan suatu graf. Berbeda dengan konektivitas sisi dan titik, konektivitas aljabarik tergantung pada jumlah sisi, serta cara sisi-sisi terhubung (Holroyd, 2006).

Definisi 2.1. Misalkan G graf dengan n titik, vektor $X \in R^n$ dikatakan *terdefinisi* pada G jika ada fungsi injektif φ dari $V(G)$ ke entri-ntri X, atau dapat ditulis $X_u = \varphi(u)$ untuk setiap $u \in V(G)$. Jika X adalah vektor eigen $L(G)$, maka X terdefinisi pada G; dengan X_u adalah entri X yang bersesuaian dengan titik u pada G (Jiang, Yu dan Cao, 2015).

Proposisi 2.2. Misalkan X vektor yang terdefinisi pada graf G, X_u adalah entri X yang bersesuaian dengan titik u pada G. Maka untuk setiap vektor $X \in R^n$, berlaku

$$X^T L(G) X = \sum_{uv \in E(G)} (X_u - X_v)^2 \qquad (1)$$

Proposisi 2.3. Jika μ nilai eigen matriks *laplacian* G, X adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan μ, berlaku

$$d_G(v) - \mu = \sum_{u \epsilon N_G(v)} X_u \qquad (2)$$

untuk setiap titik $v \epsilon V(G)$, dengan $N_G(v)$ adalah persekitaran titik v pada graf G.

Persamaan pada Proposisi 2.3 disebut persamaan nilai eigen matriks laplacian graf G.

Proposisi 2.4. Untuk setiap vektor satuan $X \epsilon R^n$ dengan $X \perp \mathbf{1}$, berlaku

$$a(G) \leq X^T L(G) X \qquad (3)$$

dengan kesamaan berlaku jika dan hanya jika X adalah vektor fiedler G (Fiedler, 1973).

Proposisi 2.5. Jika G^c komplemen graf G dengan n titik, berlaku

$$X^T L(G^c) X = X^T (nI - J) X - X^T L(G) X \qquad (4)$$

dengan J adalah matriks $n \times n$ dengan semua entrinya adalah 1 dan I adalah matriks identitas $n \times n$.

Lemma 2.6. Misalkan G graf sederhana dengan n titik, berlaku

$$a(G) \leq \delta(G) \qquad (5)$$

dengan $\delta(G) = \min\{d_G(v), v \epsilon V(G)\}$

Bukti. Misalkan G graf sederhana dengan n titik, dan $\delta(G) = \min\{d_G(v), v \epsilon V(G)\}$, berlaku

$$a(G) \leq \kappa(G)$$

dengan $\kappa(G)$ adalah konektivitas titik G. (Fiedler, 1973)
Karena $\kappa(G) \leq \delta(G)$,

$$a(G) \leq \delta(G) \qquad \blacksquare$$

Lemma 2.7 Jika $\{X_i,\ i = 1,2,\dots,n\}$ barisan tak-naik, maka untuk setiap $1 \leq i, j \leq n$, berlaku

$$\begin{aligned}(X_i - X_j)^2 &\leq \max\{(X_i - X_1)^2, (X_i - X_n)^2\} \\ &\leq (X_i - X_n)^2\end{aligned} \qquad (6)$$

Bukti. Untuk setiap $1 \leq i, j \leq n$, jika $(X_i - X_j) \geq 0$, dengan $\{X_i,\ i = 1,2,3,\dots,n\}$ barisan tak-naik, maka

$$0 \leq X_i - X_j \leq X_i - X_n \leq X_1 - X_n$$

dengan menggunakan sifat urutan,

$$(X_i - X_j)^2 \leq (X_i - X_n)^2 \leq (X_1 - X_n)^2 \qquad (7)$$

Jika $X_i - X_j \leq 0$

$$0 \geq X_i - X_j \geq X_i - X_1 \geq X_n - X_1$$

dengan menggunakan sifat urutan,

$$(X_i - X_j)^2 \leq (X_i - X_1)^2 \leq (X_1 - X_n)^2 \qquad (8)$$

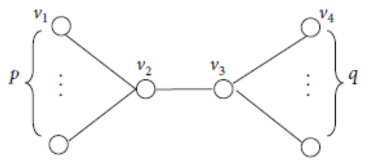
Berdasarkan (7) dan (8), maka

$$(X_i - X_j)^2 \leq (X_i - X_1)^2 \leq (X_1 - X_n)^2 \qquad \blacksquare$$

3. PEMBAHASAN

Konektivitas Aljabarik Terkecil Komplemen Pohon

Misalkan $\mathcal{T}_n$ himpunan pohon dengan n titik dan $K_{1,n-1}$ merupakan *graf bintang* (*star*) dengan n titik. Misalkan $K_{p,q}$ graf bipartit komplet dengan partisi p titik dan q titik dan $T(p,q)$ pohon spesial yang diperoleh dengan mengaitkan pusat bintang $K_{1,p}$ dan $K_{1,q}$ dengan sebuah sisi baru. Pohon T(p,q) ditunjukkan pada Gambar 3.1



Gambar 3.1 ; Pohon spesial T(p,q)

Lemma 3.1 Diberikan bilangan bulat n dengan $n \geq 6$, untuk sebarang bilangan bulat p, q dengan $p + q = n - 2$, $p \geq q \geq 2$, berlaku

$$a(T(p,q)^c) > a(T(p+1, q-1)^c) \quad (9)$$

Bukti. Misalkan $T(p,q)$ graf yang digambarkan pada Gambar 3.1. Misalkan X vektor Fiedler unit dari $T(p,q)^c$. Berdasarkan Lemma 2.6, $a(T(p,q)^c) \neq d_{T(p,q)^c}(v) + 1$ untuk setiap titik $v \in V(T(p,q)^c)$.

Berdasarkan persamaan nilai eigen matriks Laplacian pada proposisi 2.3,

$$(d_G(v_{1p}) - a + 1)\, X_{v_{11}} = (d_G(v_{1p}) - a + 1) X_{v_{1p}} \quad (10)$$

$$(d_G(v_{1p}) - a + 1)\, X_{v_{12}} = (d_G(v_{1p}) - a + 1)\, X_{v_{1p}} \quad (11)$$

Karena $a(T(p,q)^c) \neq d_{T(p,q)^c}(v) + 1$, didapatkan $X_{v_{11}} = X_{v_{12}} = X_{v_{1p}}$. Dengan cara sama maka akan diperoleh $X_{v_{11}} = X_{v_{12}} = \cdots = X_{v_{1p}}$ dan $X_{v_{41}} = X_{v_{42}} = \cdots = X_{v_{4q}}$.

Setiap titik pendan v_2 memiliki nilai yang sama pada X, misalkan X_1; Setiap titik pendan v_3 memiliki nilai yang sama pada X, misalkan X_4; sedangkan untuk $X_2 := X_{v_2}$, $X_3 := X_{v_3}$ dan $a := a(T(p,q)^c)$.

Berdasarkan persamaan nilai eigen matriks Laplacian pada proposisi 2.3,

vektor X pada $(T(p,q)^c)$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} (p+q-a)X_1 &= (p-1)X_1 + X_3 + qX_4 \\ (q-a)\, X_2 &= qX_4 \\ (p-a)X_3 &= pX_1 \\ (p+q-a)X_4 &= pX_1 + X_2 + (q-1)X_4 \end{aligned} \quad (12)$$

Persamaan (12) ditransformasikan dengan menggunakan persamaan matriks $(B - aI)X' = 0$, dengan $X' = (X_1, X_2, X_3, X_4)^T$, I matriks identitas dan

$$B = \begin{bmatrix} q+1 & 0 & -1 & -q \\ q & q & 0 & -q \\ -p & 0 & p & 0 \\ -p & -1 & 0 & p+1 \end{bmatrix}$$

Misalkan $f(\mu; p, q) := \det(\mu I - B)$,

$$f(\mu; p, q) = \mu^4 - 2(p+q+1)\mu^3 + (p^2 + 3pq + 2p + q^2 + 2q + 1)\mu^2 - pq(p+q+2)\,\mu \quad (13)$$

Karena $p \geq q \geq 2$,

Akibat persamaan (12) maka a akar polinomial $f(\mu; p, q)$. Berdasarkan persamaan (13) maka 0 adalah akar polinomial $f(\mu; p, q)$, dan a akar polinomial terkecil kedua $f(\mu; p, q)$.

$$f(\mu; p+1, q-1) - f(\mu; p, q) = \mu\,(q-p-1)(\mu - p - q - 2) \quad (14)$$

karena $p + q + 2 = n$,

$$f(\mu; p+1, q-1) - f(\mu; p, q) = \mu\,(q-p-1)(\mu - n) \quad (15)$$

Berdasarkan Lemma 2.6, $a = a(T(p,q))^c < n$. Dengan $p \geq q$, $a > 0$, dan $f(a; p, q) = 0$,

$$f(a; p+1, q-1) = a(q-p-1)(a-n) > 0$$

Berakibat:

$$a(T(p+1, q-1)^c < a\,(T(p,q)^c \qquad \blacksquare$$

Akibat 3.2 Jika diberikan bilangan bulat $n \geq 6$, untuk sebarang bilangan positif p, q dengan $p + q = n - 2$, $p \geq q \geq 2$.

$$a(T(p,q)^c) > a(T(p+1, q-1)^c) > \cdots > a(T(n-3,1)^c) \quad (16)$$

Bukti. Terapkan Lemma 3.1 sebanyak $q - 1$ kali, maka diperoleh

$$a(T(p,q)^c) > a(T(p+1, q-1)^c) > \cdots > a(T(n-3,1)^c) \qquad \blacksquare$$

Lemma 3.3 Diberikan bilangan bulat n dengan $n \geq 4$, untuk setiap pohon $T \in \mathcal{T}_n \backslash \{K_{1,n-1}\}$, terdapat bilangan bulat p, q dengan $1 \leq p, q \leq n-3, p+q = n-2$,

$$a(T^c) \geq a\,(T(p,q)^c)$$

Bukti. Misalkan X adalah vektor Fiedler dari T^c; dengan $X \neq \mathbf{0}$ dan $X \perp \mathbf{1}$. Dapat diperoleh secara terurut $\{X_{v_i}; i = 1, 2, \ldots n\}$ sebagai berikut:

$$X_{v_1} \geq X_{v_2} \geq \cdots \geq X_{v_n}$$

Jika $d_T(v_1, v_n) > 1$, dapat dibuat sebuah lintasan $v_1 T v_n = v_1 u_1 \ldots u_2 v_n$, $u_1 = u_2$ jika $d_T(v_1, v_n) = 2$. Tambahkan sisi $v_1 v_n$ dan hapus sisi $v_1 u_1$ atau $u_2 v_n$ hingga diperoleh pohon T^* bukan star.

Berdasarkan persamaan nilai eigen matriks Laplacian pada proposisi 2.2, untuk sebarang pohon T

$$X^T L(T) X = \sum_{v_i v_j \in E(T)} \left(X_{v_i} - X_{v_j}\right)^2$$

Berdasarkan Lemma 2.7, Jika ditambahkan sisi $v_1 v_n$ dan sisi $v_1 u_1$ dihapus hingga diperoleh pohon baru T^*,

$$\begin{aligned} X^T L(T) X &= \sum_{v_i v_j \in E(T)} \left(X_{v_i} - X_{v_j}\right)^2 \\ &\leq \sum_{v_i v_j \in E(T^*)} \left(X_{v_i} - X_{v_j}\right)^2 \qquad (17) \\ &= X^T L(T^*) X \end{aligned}$$

Jika $T^* \ncong T(p,q)$ dan ada titik pendan pada titik v, dimana v tetangga u dan bukan tetangga v_1 atau v_n. Jika $(X_v - X_{v_1})^2 \geq \left(X_v - X_{v_n}\right)^2$, maka hapus uv dan tambahkan vv_1; selain itu hapus uv dan tambahkan vv_n. Ulangi hingga didapatkan pohon $T' \cong T(p,q)$.

Berdasarkan persamaan nilai eigen matriks Laplacian pada Proposisi 2.2, untuk sebarang pohon T^*

$$X^T L(T^*) X = \sum_{v_i v_j \in E(T^*)} \left(X_{v_i} - X_{v_j}\right)^2 \qquad (18)$$

Berdasarkan Lemma 2.7, jika ditambahkan vv_1 dan uv dihapus atau ditambahkan vv_n dan uv dihapus hingga didapatkan pohon T',

$$\begin{aligned} X^T L(T^*) X &= \sum_{v_i v_j \in E(T^*)} \left(X_{v_i} - X_{v_j}\right)^2 \\ &\leq \sum_{v_i v_j \in E(T')} \left(X_{v_i} - X_{v_j}\right)^2 \qquad (19) \\ &= X^T L(T(p,q)) X \end{aligned}$$

Berdasarkan (3), (4), (20), dan (22),

$$\begin{aligned} a(T^c) &= X^T L(T^c) X \\ &= X^T (nI - J) X - X^T L(T) X \\ &\geq X^T (nI - J) X - X^T L(T(p,q)) X \qquad (20) \\ &= X^T L(T(p,q)^c) X \geq a(T(p,q)^c) \end{aligned}$$

Teorema 3.4 Untuk $n \geq 4, T \in \mathcal{T}_n K_{1,n-1}$, berlaku

$$a(T^c) \geq a(T(n-3,1)^c)$$

kesamaan berlaku jika dan hanya jika $T \cong T(n-3,1)$.

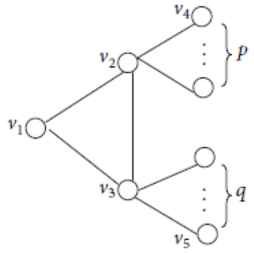
Bukti. Berdasarkan Akibat 3.2 dan Lemma 3.3, untuk $n \geq 4, T \in \mathcal{T}_n \backslash K_{1,n-1}$,

$$a(T^c) \geq a(T(p,q)^c) \geq a(T(n-3,1)^c)$$

dengan kesamaan berlaku jika dan hanya jika $T \cong T(n-3,1)$ ■

Konektivitas Aljabarik Terkecil Komplemen Graf Unisiklik

Misalkan δ_n himpunan graf unisiklik dengan n titik dan $K_{1,n-1} + e$ graf yang dibentuk dari $K_{1,n-1}$ dengan menambahkan satu sisi e. Misalkan $G_1(p,q)$ graf unisiklik spesial didapatkan dari graf sikel C_3 dengan dua titiknya merupakan pusat $K_{1,p}$ dan $K_{1,q}$. Graf $G_1(p,q)$ ditunjukkan pada Gambar 3.2.



Gambar 3.2. Graf Unisiklik Spesial $G_1(p,q)$

Lemma 3.5 Diberikan bilangan bulat n dengan $n \geq 7$, untuk sebarang bilangan bulat positif p,q dengan $p + q = n - 3$, $p \geq q \geq 2$, berlaku

$$a(G_1(p,q)^c) > a(G_1(p+1,q-1)^c)$$

Bukti. Misalkan $G_1(p,q)$ graf yang digambarkan pada Gambar 3.2. Misalkan X vektor Fiedler unit dari $G_1(p,q)^c$. Berdasarkan Lemma 2.6, $a(G_1(p,q)^c) \neq d_{G_1(p,q)^c}(v) + 1$ untuk setiap titik $v \in V(G_1(p,q)^c)$.

Misalkan $(v_{41}, v_{42} \dots, v_{4p})$ titik pendan v_2 , $(v_{51}, v_{52} \dots, v_{5q})$ titik pendan v_3. Berdasarkan persamaan nilai eigen matriks Laplacian pada proposisi 2.3, $X_{v_{41}} = X_{v_{42}} = \cdots = X_{v_{4p}}$ dan $X_{v_{51}} = X_{v_{52}} = \cdots = X_{v_{5q}}$.

Setiap titik pendan v_2 memiliki nilai yang sama pada X, misalkan X_4; Setiap titik pendan v_3 memiliki nilai yang sama pada X, misalkan X_5; sedangkan untuk $X_1 := X_{v_1}$, $X_2 := X_{v_2}$, $X_3 := X_{v_3}$ dan $a := a(G_1(p,q)^c)$.

Berdasarkan persamaan nilai eigen matriks Laplacian pada Proposisi 2.3, vektor X pada $(G_1(p,q)^c)$ dapat dinyatakan sebagai berikut: :

$$\begin{aligned} (p+q-a)X_1 &= pX_4 + qX_5 \\ (q-a)X_2 &= qX_5 \\ (p-a)X_3 &= pX_4 \\ (p+q+1-a)X_4 &= X_1 + X_3 + (p-1)X_4 + qX_5 \qquad (21) \\ (p+q+1-a)X_5 &= X_1 + X_3 + pX_4 + (q-1)X_5 \end{aligned}$$

Persamaan (21) ditransformasikan dengan menggunakan persamaan matriks $(B - aI)X' = 0$, dengan $X' = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)^T$, I matriks identitas dan

$$B = \begin{bmatrix} p+q & 0 & 0 & -p & -q \\ 0 & q & 0 & 0 & -q \\ 0 & 0 & p & -p & 0 \\ -1 & 0 & -1 & q+2 & -q \\ -1 & -1 & 0 & -p & p+2 \end{bmatrix}$$

Misalkan $f(\mu; p, q) := \det(\mu I - B,$

$$f(\mu;p,q) = \mu^5 - (3p+3q+4)\mu^4 + (3p^2 + 7pq + 8p + 3q^2 + 8q + 4)\mu^3 - (p+q+2)\,(p^2 + 4pq + 2p + q^2 + 2q)\mu^2 + pq(p+q+1)(p+q+3)\,\mu \quad (22)$$

Berdasarkan persamaan (21) maka a akar polinomial $f(\mu;p,q)$. Akibat persamaan (22) maka 0 adalah akar polinomial $f(\mu;p,q)$, dan a akar polinomial terkecil kedua $f(\mu;p,q)$.

$$f(\mu;p+1,q-1) - f(\mu;p,q)$$
$$= -\mu\,(p-q+1)(\mu-p-q-1)((\mu-p-q-3)) \quad (23)$$

Berdasarkan Lemma 2.6, $a = a(G_1(p,q)^c) < p+q+1$. Dengan $p \geq q \geq 2$, $a > 0$, dan $f(a;p,q) = 0$,

$$f(a;p+1,q-1) = -\mu\,(p-q+1)(\mu-p-q-1)(\mu-p-q-3) < 0 \quad (24)$$

Berakibat:

$$a(G_1(p+1,q-1)^c) < a\,(G_1(p,q)^c) \quad (25)$$

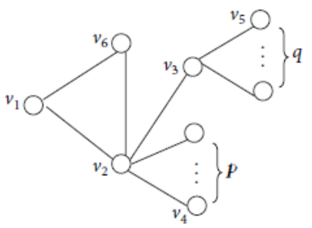
Akibat 3.6 jika diberikan bilangan bulat n dengan $n \geq 7$, untuk setiap bilangan bulat positif p,q dengan $p+q = n-3$, $p \geq q \geq 2$, berlaku

$$a(G_1(p,q)^c) > a(G_1(p+1,q-1)^c) > \cdots > a(G_1(n-4,1)^c)$$

Bukti. Terapkan Lemma 3.5 sebanyak $q-1$ kali, maka diperoleh

$$a(G_1(p,q)^c) > a(G_1(p+1,q-1)^c) > \cdots > a(G_1(n-4,1)^c) \qquad \blacksquare$$

Misalkan $G_2(p,q)$ graf unisiklik spesial yang diperoleh dari graf sikel C_3 dengan satu titiknya adalah titik pusat $K_{1,p}$ dan titik pendan $K_{1,q+1}$. Graf $G_2(p,q)$ ditunjukkan pada Gambar 3.7.



Gambar 3.3. Graf Unisiklik Spesial $G_2(p,q)$

Lemma 3.7. Diberikan bilangan bulat n dengan $n \geq 8$, untuk setiap bilangan positif p,q dengan $p+q = n-4$, berlaku

$$a(G_2(p,q)^c) > a(G_2(p+1,q-1)^c);\ \text{jika } p+3 > q \geq 2$$
$$a(G_2(p,q)^c) = a(G_2(p+1,q-1)^c);\ \text{jika } p+3 = q \quad (26)$$
$$a(G_2(p,q)^c) < a(G_2(p+1,q-1)^c);\ \text{jika } p+3 < q$$

Bukti. Misalkan $G_2(p,q)$ graf yang digambarkan pada Gambar 3.3. Misalkan X vektor Fiedler unit dari $G_2(p,q)^c$. Berdasarkan Lemma 2.6, $a(G_2(p,q)^c) \neq d_{G_2(p,q)^c}(v) + 1$ untuk setiap titik $v \in V(G_2(p,q)^c)$.

Misalkan $(v_{41}, v_{42} \dots, v_{4p})$ titik pendan v_2 , $(v_{51}, v_{52} \dots, v_{5q})$ titik pendan v_3. Berdasarkan Proposisi 2.3, $X_{v_{41}} = X_{v_{42}} = \cdots = X_{v_{4p}}$ dan $X_{v_{51}} = X_{v_{52}} = \cdots = X_{v_{5q}}$ dan $X_{v_1} = X_{v_6}$.

Setiap titik pendan v_2 memiliki nilai yang sama pada X, misalkan X_4; Setiap titik pendan v_3 memiliki nilai yang sama pada X, misalkan X_5; $X_1 = X_6$; sedangkan untuk $X_1 := X_{v_1}$, $X_2 := X_{v_2}$, $X_3 := X_{v_3}$, $X_6 := X_{v_6}$ dan $a := a(G_2(p,q)^c)$.

Berdasarkan Proposisi 2.3, vektor X pada $(G_2(p,q)^c)$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
(p+q+1-a)X_1 &= X_3 + pX_4 + qX_5\\
(q-a)\,X_2 &= qX_5\\
(p+2-a)X_3 &= 2X_1 + pX_4\\
(p+q+2-a)X_4 &= 2X_1 + X_3 + (p-1)X_4 + qX_5\\
(p+q+2-a)X_5 &= 2X_1 + X_3 + pX_4 + (q-1)X_5
\end{aligned} \quad (27)$$

Persamaan (27) ditransformasikan menggunakan persamaan matriks $(B-aI)X' = 0$, dengan $X' = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)^T$, I matriks identitas dan

$$B = \begin{bmatrix} p+q+1 & 0 & -1 & -p & -q \\ 0 & q & 0 & 0 & -q \\ 0 & 0 & p+2 & -p & 0 \\ -2 & 0 & -1 & q+3 & -q \\ -2 & -1 & 0 & -p & p+3 \end{bmatrix}$$

Misalkan $f_2(\mu;p,q) := \det(\mu I - B)$,

$$f_2(\mu;p,q) = \mu^5 - (3p+3q+9)\mu^4 + (3p^2 + 7pq + 18p + 3q^2 + 20q + 27)\mu^3 - (p^3 + 5p^2q + 9p^2 + 5pq^2 + 29pq + 27p + q^3 + 13q^2 + 41q + 27)\mu^2 + (pq+2q)(p+q+3)(p+q+4)\,\mu \quad (28)$$

Berdasarkan persamaan (27) maka a akar polinomial $f(\mu;p,q)$ .Akibat persamaan (28) maka 0 adalah akar polinomial $f(\mu;p,q)$, Berdasarkan Lemma 2.6, $a \leq q$. Karena $a \neq q, q < p+q+1 < p+q+3.5 < p+q+4$, a akar polinomial terkecil kedua $f_2(\mu;p,q)$

$$f_2(\mu;p+1,q-1) - f_2(\mu;p,q) = -\mu\,(p-q+3)(p+q-\mu+4)((p+q-\mu+3)) \quad (29)$$

karena $f_2(a; p, q) = 0$

$$f_2(a; p+1, q-1) = -\mu\,(p-q+3)(p+q-\mu+4)((p+q-\mu+3)) \quad (30)$$

Berdasarkan Lemma 2.6, $0 < a(G) < q$, $a(G_2(p,q)^c) \leq q < p+q+2$. Jika $p+3 > q \geq 2$,

$$f_2(a; p+1, q-1) < 0 \quad (31)$$

maka diperoleh

$$a(G_2(p+1, q-1)^c) < a\,(G_2(p,q)^c) \quad (32)$$

Jika $p+3 = q$,

$$f_2(a; p+1, q-1)) = 0 \quad (33)$$

maka diperoleh

$$a(G_2(p+1, q-1)^c) = a\,(G_2(p,q)^c) \quad (34)$$

Jika $p+3 < q$,

$$f_2(a; p+1, q-1) > 0 \quad (35)$$

berdasarkan Lemma 2.6, $0 < a \leq p+2$.

Misalkan

$$f_2(\mu; p, q) = \mu(p+q-\mu+3)g(\mu) \quad (36)$$

dengan

$$g(\mu) = -\mu^3 + (2p+2q+6)\mu^2 - (p^2+3pq+6p+q^2+8q+9)\mu + p^2q + pq^2 + 6pq + 2q^2 + 8q \quad (37)$$

Karena akar $\mu(p+q-\mu+3)$ adalah 0 dan $p+q+3$, maka a adalah akar polynomial terkecil $g(\mu)$ dengan $0 < a < p+2$.

$$g'(\mu) = -3\mu^2 + (4p+4q+12)\mu - (p^2-3pq-6p-q^2-8q-9)\mu \quad (38)$$

$$g''(\mu) = -6\mu + 4p + 4q + 12 \quad (39)$$

Jika $0 < \mu \leq p+2$ dan $p+3 < q$, $g''(\mu) \geq g''(p+2) = 4q - 2p > 0$. Sehingga diperoleh $g'(\mu)$ monoton naik untuk μ ketika $0 < \mu \leq p+2, p+3 < q$.

Jika $0 < \mu \leq p+2$ dan $p+3 < q$, maka $g'(\mu) \leq g'(p+2) = -q^2 + pq + 2p + 3 < -q- < 0$. Sehingga diperoleh $g(\mu)$ monoton turun untuk μ ketika $0 < \mu \leq p+2, p+3 < q$.

Jika $p+3 < q$, berdasarkan $f_2(a; p+1, q-1) > 0$,

$$a(G_2(p+1, q-1)^c) > a\,(G_2(p,q)^c)$$

■

Lemma 3.8. Diberikan bilangan bulat n dengan $n \geq 8$, untuk setiap bilangan positif p, q dengan $p+q = n-4$, $q \geq 1$, berlaku

$$a(G_2(p,q)^c) \geq a\,(G_2(n-5,1)^c$$

Kesamaan berlaku jika dan hanya jika $G_2(p,q) \cong G_2(n-5,1)$

Bukti. Berdasarkan Lemma 3.7, Misalkan $a_1' \coloneqq a(G_2(n-5,1)^c), a_2' \coloneqq a(G_2(0,n-4)^c)$. a_1' adalah akar terkecil kedua polynomial $f_2(\mu, n-5,1)$ dan a_2' adalah akar terkecil kedua polynomial $f_2(\mu, 0, n-4)$.

$$f_2(n-5,1) = \mu(\mu-n+1)(\mu^3 + (2-2n)\mu^2) + (n^2-n-2)\mu + 3n - n^2) \quad (40)$$

$$f_2(0, n-4) = \mu(\mu-n+1)(\mu^3 + (2-2n)\mu^2) + (n^2-7)\mu + 8n - 2n^2) \quad (41)$$

Berdasarkan Lemma 2.6 dan $n \geq 8$, maka $0 < a_1'$., $a_2' \leq 2 \leq n-1$. Karena a_1' adalah akar polynomial terkecil $k(\mu)$, dengan

$$k(\mu) = \mu^3 + (2-2n)\mu^2 + (n^2-n-2)\mu + 3n - n^2 \quad (42)$$

dan a_2' adalah akar polynomial terkecil $m(\mu)$, dengan

$$m(\mu) = \mu^3 + (2-2n)\mu^2 + (n^2-7)\mu + 8n - 2n^2 \quad (43)$$

$$k(\mu) - m(\mu) = (n-\mu)(n-5) > 0 \quad (44)$$

untuk $0 < \mu \leq 3$ dan $n \geq 8$.

Karena $m(a_2') = 0$, $n \geq 8$, dan $0 < a_2' \leq 3$,

$$k(a_2') = (n-a_2')(n-5) > 0 \quad (45)$$

maka dari itu $a_1' < a_2'$,

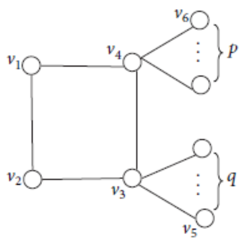
$$a(G_2(n-5,1)^c) < a(G_2(0,n-4)^c) \quad (46)$$

Berdasarkan Lemma 3.7,

$$a(G_2(p,q)^c) \geq a(G_2(n-5,1)^c)$$

dengan kesamaan berlaku jika dan hanya jika $G_2(p,q) \cong G_2(n-5,1)$. ■

Misalkan $G_3(p,q)$ graf unisiklik spesial yang dibentuk dari dua titik terhubung C_4 sebagai titik pusat $K_{1,p}$ dan $K_{1,q}$. Graf $G_3(p,q)$ ditunjukkan pada Gambar 3.4.



Gambar 3.4. Graf Unisiklik Spesial $G_3(p,q)$

Lemma 3.9 Diberikan bilangan bulat n dengan $n \geq 6$, untuk setiap bilangan bulat positif p,q dengan p+q = n-4, $p \geq q \geq 1$, berlaku

$$a(G_3(p,q)^c) > a\,(G_3(p+1,q-1)^c$$

Bukti. Misalkan $G_3(p,q)$ graf yang digambarkan pada Gambar 3.3. Misalkan X vektor Fiedler unit dari $G_3(p,q)^c$. Berdasarkan Lemma 2.6, $a(G_3(p,q)^c) \neq d_{G_3(p,q)^c}(v) + 1$untuk setiap titik $v \in V(G_3(p,q)^c)$.

Misalkan $(v_{61}, v_{62} \dots, v_{6p})$ titik pendan v_4, $(v_{51}, v_{52} \dots, v_{5q})$ titik pendan v_3. Berdasarkan Proposisi 2.3, $X_{v_{61}} = X_{v_{62}} = \cdots = X_{v_{6p}}$ dan $X_{v_{51}} = X_{v_{52}} = \cdots = X_{v_{5q}}$.

Setiap titik pendan v_3 memiliki nilai yang sama pada X, misalkan X_5; Setiap titik pendan v_4 memiliki nilai yang sama pada X, misalkan X_6 ; sedangkan untuk $X_1 := X_{v_1}$, $X_2 := X_{v_2}$, $X_3 := X_{v_3}$, $X_4 := X_{v_4}$ dan $a := a(G_3(p,q)^c)$.

Berdasarkan Proposisi 2.3, vektor X pada $(G_3(p,q)^c)$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
(p+q+1-a)X_1 &= X_3 + qX_5 + pX_6\\
(p+q+1-a)X_2 &= X_4 + qX_5 + pX_6\\
(p+1-a)X_3 &= X_1 + pX_6\\
(q+1-a)X_4 &= X_2 + qX_5\\
(p+q+2-a)X_5 &= X_1 + X_2 + X_4 + (q-1)X_5 + pX_6\\
(p+q+2-a)X_6 &= X_1 + X_2 + X_4 + qX_5 + (p-1)X_6
\end{aligned} \quad (47)$$

Persamaan (55) ditransformasikan dengan menggunakan persamaan matriks $(B - aI)X' = 0$, dengan $X' = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)^T$, I matriks identitas dan

$$B = \begin{bmatrix} p+q+1 & 0 & -1 & 0 & -q & -p\\ 0 & p+q+1 & 0 & -1 & -q & -p\\ -1 & 0 & p+1 & 0 & 0 & -p\\ 0 & -1 & 0 & q+1 & -q & 0\\ -1 & -1 & 0 & -1 & p+3 & -p\\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & q+3 \end{bmatrix}$$

Misalkan $f_3(\mu;p,q) := \det(\mu I - B)$,

$$\begin{aligned}
f_3(\mu;p,q) =\ & \mu^6 - (4p+4q+10)\mu^5\\
&+(6p^2+13pq+31p+6q^2+31q+37)\mu^4\\
&-(4p^3+15p^2q+33p^2+15pq^2+74pq+83p+4q^3+33q^2+83q+60)\mu^3\\
&+(p^4+7p^3q+13p^3+12p^2q^2+55p^2q+55p^2+7pq^3+55pq^2+129pq+86p+q^4+13q^3+55q^2+86q+36)\mu^2\\
&-(p+q+3)(p^2q+p^2+pq^2+3pq+2p+q^2+2q)(p+q+4)\,\mu
\end{aligned} \quad (48)$$

Berdasarkan persamaan (47) maka a akar polinomial $f_3(\mu;p,q)$. Akibat persamaan (48) maka 0 adalah akar polinomial $f_3(\mu;p,q)$ dan a akar polinomial terkecil kedua $f_3(\mu;p,q)$.

$$f_3(\mu;p+1,q-1) - f_3(\mu;p,q) = -\mu\,(p-q+1)(\mu-p-q-1)(\mu-p-q-3)(\mu-p-q-4) \quad (49)$$

Berdasarkan Lemma 2.6, $a = a(G_3(p,q)^c) < q+1$. Dengan $p \geq q \geq 1$, $a > 0$, dan $f_3(a;p,q) = 0$,

$$f(a;p+1,q-1) = -\mu\,(p-q+1)(\mu-p-q-1)(\mu-p-q-3)(\mu-p-q-4) > 0 \quad (50)$$

Sedemikian hingga

$$a(G_3(p+1,q-1)^c) < a\,(G_3(p,q)^c)$$ ■

Akibat 3.10. Jika diberikan bilangan bulat n dengan $n \geq 6$, untuk setiap bilangan bulat positif p, q dengan $p + q = n-4$, $p \geq q \geq 1$, berlaku

$$a(G_3(p,q)^c) > a\,(G_3(p+1,q-1)^c) > \cdots > a(G_3(n-4,0)^c)$$

Bukti. Terapkan Lemma 3.9 sebanyak q kali, berlaku

$$a(G_3(p,q)^c) > a\,(G_3(p+1,q-1)^c) > \cdots > a(G_3(n-4,0)^c)$$ ■

Lemma 3.11, Diberikan bilangan bulat n dengan $n \geq 6$, untuk setiap graf unisiklik $G \in \delta_n \backslash K_{1,n-1} + e$, ada bilangan positif p, q dengan $p, q \geq 1$, berlaku

$$a(G^c) \geq a\,(G_i(p,q)^c$$

untuk $i = 1$ atau 2 atau 3

Bukti. Misalkan graf unisiklik G diperoleh dari graf l-sikel C_l (sikel C_l memiliki panjang l) dengan mengaitkan beberapa pohon terhadap C_l. Misalkan X adalah vektor fiedler G^c, dengan $X \neq 0$ dan $X \perp 1$. Maka dapat dibentuk barisan (X_{v_n}) dengan

$$X_{v_1} \geq X_{v_2} \geq \cdots \geq X_{v_n}$$

Jika $d_G(v_1, v_n) > 1$, maka dapat dibuat lintasan $v_1 G v_n = v_1 u_1 \dots u_2 v_n$, dengan $u_1 = u_2$ jika $d_G(v_1, v_n) = 2$. Tambahkan sisi $v_1 v_n$ dan hapus sisi $v_1 u_1$ atau $u_2 v_n$ hingga diperoleh graf unisiklik G_* bukan star.

Berdasarkan Proposisi 2.2, untuk sebarang graf unisiklik G

$$X^T L(G)X = \sum_{v_i v_j \in E(G)} \left(X_{v_i} - X_{v_j}\right)^2 \quad (51)$$

Berdasarkan Lemma 2.7, Jika ditambahkan sisi $v_1 v_n$ dan sisi $v_1 u_1$ dihapus, atau ditambahkan sisi $v_1 v_n$ dan sisi $v_n u_2$ dihapus, diperoleh graf unisiklik baru G_{**}.

$$\begin{aligned} X^T L(G)X &= \sum_{v_i v_j \in E(G)} \left(X_{v_i} - X_{v_j}\right)^2 \\ &\leq \sum_{v_i v_j \in E(G_*)} \left(X_{v_i} - X_{v_j}\right)^2 \quad (52) \\ &= X^T L(G_*)X \end{aligned}$$

Akibatnya graf G_* diperoleh dari mengaitkan $C_{l'}$ dengan beberapa pohon dan $d_{G_*}(v_1, v_n) = 1$.

Jika $G_* \notin \{G_1(p,q), G_2(p,q), G_3(p,q)\}$, maka terdapat tiga kasus terhadap G_*.

Kasus 1. v_1 dan v_n adalah titik pada graf sikel $C_{l'}$. Jika $l' \geq 5$, maka dapat dimisalkan graf sikel $C_{l'} = v_1 v_n u_1 u_2 u_3 \dots v_1$. Pada kasus ini, jika $(X_{u_2} - X_{v_1})^2 \geq (X_{u_2} - X_{v_n})^2$, hapus sisi $u_2 u_3$ dan tambahkan sisi $v_1 u_2$; selain itu, hapus sisi $u_2 u_3$ dan tambahkan sisi $u_2 v_n$. Didapatkan graf unisiklik G_{**} dari mengaitkan graf sikel C_3 (v_n pada sikel) atau C_4 (v_1 dan v_n pada sikel) dengan beberapa pohon.

Kasus 2. Salah satu dari v_1 atau v_n adalah titik pada graf sikel $C_{l'}$.Jika dimisalkan v_1 pada sikel $C_{l'}$, maka pembahasan tersebut akan sama ketika v_n pada sikel $C_{l'}$. Jika $l' \geq 4$, dimisalkan sikel $C_{l'} = v_1 u_1 u_2 u_3 \dots v_1$. Pada kasus ini jika $(X_{u_2} - X_{v_1})^2 \geq (X_{u_2} - X_{v_n})^2$ hapus sisi $u_2 u_3$ dan tambahkan sisi $v_1 u_2$; selain itu hapus sisi $u_2 u_3$ dan tambahkan sisi $u_2 v_n$. Didapatkan graf unisiklik G_{**} dari mengaitkan graf sikel C_3(salah satu dari v_1 atau v_n pada sikel) atau C_4 (v_1 dan v_n pada sikel) dengan beberapa pohon.

Kasus 3. v_1 dan v_n bukan titik pada graf sikel $C_{l'}$. Dimisalkan sikel sikel $C_{l'} = u_1 u_2 u_3 \dots u_1$, titik v_1 dan v_n bukan titik pada pohon yang terkait pada u_2. Pada kasus ini jika $(X_{u_2} - X_{v_1})^2 \geq (X_{u_2} - X_{v_n})^2$ hapus sisi $u_2 u_3$ dan tambahkan sisi $v_1 u_2$; selain itu hapus sisi $u_2 u_3$ dan tambahkan sisi $u_2 v_n$. Didapatkan graf unisiklik G_{**}seperti pada kasus 1 atau kasus 2.

Berdasarkan Proposisi 2.2. Untuk sebarang graf unisiklik G_*

$$X^T L(G_*)X = \sum_{v_i v_j \in E(G_*)} \left(X_{v_i} - X_{v_j}\right)^2 \quad (53)$$

Berdasarkan Lemma 2.7, jika ditambahkan $u_2 v_1$ dan $u_2 u_3$ dihapus atau ditambahkan $u_2 v_n$ dan $u_2 u_3$ dihapus hingga didapatkan graf unisiklik G_{**},

$$\begin{aligned} X^T L(G_*)X &= \sum_{v_i v_j \in E(G_*)} \left(X_{v_i} - X_{v_j}\right)^2 \\ &\leq \sum_{v_i v_j \in E(G_{**})} \left(X_{v_i} - X_{v_j}\right)^2 \quad (54) \\ &= X^T L(G_{**})X \end{aligned}$$

dengan $d_{G_{**}}(v_1 v_n) = 1$ dan G_{**} graf unisiklik didapatkan dengan mengaitkan C_3 dengan beberapa pohon, dengan setidaknya salah satu dari v_1 atau v_n adalah titik pada sikel, atau G_{**} didapatkan dengan mengaitkan C_4 dengan beberapa pohon, dengan v_1 dan v_n adalah titik pada sikel.

Jika $G_{**} \notin \{G_1(p,q), G_2(p,q), G_3(p,q)\}$, maka ada titik pendan v, merupakan tetangga u dan bukan tetangga v_1 atau v_n. Jika $(X_v - X_{v_1})^2 \geq \left(X_v - X_{v_n}\right)^2$, maka hapus uv dan tambahkan vv_1 ; selain itu hapus uv dan tambahkan vv_n. Ulangi hingga didapatkan graf unisiklik $G_{***} \in \{G_1(p,q), G_2(p,q), G_3(p,q)\}$.

Berdasarkan Proposisi 2.2, untuk sebarang graf unisiklik G_{**}

$$X^T L(G_{**})X = \sum_{v_i v_j \in E(G_{**})} \left(X_{v_i} - X_{v_j}\right)^2 \quad (55)$$

Berdasarkan Lemma 2.7, Jika ditambahkan vv_1 dan vu dihapus atau ditambahkan vv_n dan uv dihapus hingga didapatkan graf unisiklik G_{***},

$$\begin{aligned} X^T L(G_{**})X &= \sum_{v_i v_j \in E(G_{**})} \left(X_{v_i} - X_{v_j}\right)^2 \\ &\leq \sum_{v_i v_j \in E(G_{***})} \left(X_{v_i} - X_{v_j}\right)^2 \quad (56) \\ &= X^T L(G_{***})X \end{aligned}$$

Berdasarkan (3),(7),(52),(54) dan (56) maka didapatkan

$$\begin{aligned} a(G^c) &= X^T L(G^c)X \\ &= X^T(nI - J)X - X^T L(G)X \\ &\geq X^T(nI - J)X - X^T L(G_*)X \\ &\geq X^T(nI - J)X - X^T L(G_{**})X \\ &\geq X^T(nI - J)X - X^T L(G_{***})X \\ &= X^T L({G_{***}}^c)X \geq a({G_{***}}^c) \end{aligned}$$

Karena $G_{***} \in \{G_1(p,q), G_2(p,q), G_3(p,q)\}$, didapatkan :

$$a(G^c) \geq a({G_i}^c) \quad \blacksquare$$

dengan $i = 1,2 \; atau \; 3$

Teorema 3.12 Untuk setiap bilangan bulat positif $n \geq 8$, $G \in \delta_n \backslash K_{1,n-1} + e$ }, berlaku

$$a(G^c) \geq a\,(G_3(n-4,0)^c \quad (57)$$

Kesamaan berlaku jika dan hanya jika $G \cong G_3(n-4,0)$.

Bukti. Berdasarkan pembuktian Lemma 3.5, Lemma 3.7 dan Lemma 3.9, misalkan $a_1 \coloneqq a(G_1(n-4,1)^c), a_2 \coloneqq a(G_2(n-5,1)^c), a_3 \coloneqq a(G_3(n-4,0)^c)$. Didapatkan a_1 adalah akar terkecil kedua polynomial $f_1(\mu, n-4,1)$ dan a_2 adalah akar terkecil kedua polynomial $f_2(\mu, n-5,1)$ dan a_3 adalah akar terkecil kedua polinomial $f_3(\mu, n-4,0)$.

$$f_1(\mu, n-4,1) = \mu(\mu^4 - (3n-5)\mu^3 + (3n^2 - 9n + 3)\mu^2 - (n^3 - 3n^2 - 3n + 5)\mu + n^3 - 6n^2 + 8n) \quad (58)$$

$$f_2(\mu, n-5,1) = \mu(\mu - n + 1)(\mu^3 + (2-2n)\mu^2 + (n^2 - n + 2)\mu + 3n - n^2) \quad (59)$$

$$f_3(\mu, n-4,0) = \mu(\mu - n + 1)(\mu - n + 2)(\mu^3 + (3-2n)\mu^2 + (n^2 - 2n - 2)\mu + 4n - n^2) \quad (60)$$

Karena didapatkan $\delta\big(G_1(n-4,1)\big) = 1, \delta\big(G_2(n-5,1)\big) = 1, \delta\big(G_3(n-4,0)\big) = 1$, berdasarkan Lemma 2.6, $0 < a_1, a_2, a_3 < 1 < n-2$. Berakibat a_1, a_2, a_3 adalah akar terkecil kedua polinomial $g_1(\mu), g_2(\mu)$ dan $g_3(\mu)$.

$$g_1(\mu) = \mu^4 - (3n-5)\mu^3 + (3n^2 - 9n + 3)\mu^2 (n^3 - 3n^2 - 3n + 5)\mu + n^3 - 6n^2 + 8n \quad (61)$$

$$g_2(\mu) = \mu^3 + (2-2n)\mu^2 + (n^2 - n - 2)\mu + 3n - n^2 \quad (62)$$

$$g_3(\mu) = \mu^3 + (3-2n)\mu^2 + (n^2 - 2n - 2)\mu + 4n - n^2 \quad (63)$$

$$f_1(\mu, n-4,1) - \mu(\mu - n + 2)g_3(\mu) = \mu^2(n - \mu - 1) > 0 \quad (64)$$

untuk $0 < \mu \leq 1$ dan $n \geq 8$.

Karena $f_1(a_1, n-4,1) = 0, n \geq 8$ dan $0 < a_1 \leq 1$,

$$-a_1(a_1 - n + 2)g_3(a_1) > 0$$
$$g_3(a_1) > 0 \quad (65)$$

maka dari itu $a_3 < a_1$;

$$a(G_3(n-4,0)^c) < a(G_1(n-5,1)^c) \quad (66)$$

$$g_2(\mu) - g_3(\mu) = -\mu^2 + n\mu - n < 0 \quad (67)$$

untuk $0 < \mu \leq 1$ dan $n \geq 8$.

Karena $0 < a_3 \leq 1$ dan $g_3(a_3)$ =0, kita dapatkan $g_2(a_3) < 0$. Diketahui bahwa,

$$\begin{aligned} g_2{}'(\mu) &= 3\mu^2 + 2(2-2n)\mu + (n^2 - n - 2) \\ &> 2(2-2n) + (n^2 - n - 2) \\ &= n^2 - 5n + 2 > 0 \end{aligned} \quad (68)$$

Untuk $0 < \mu \leq 1$ dan $n \geq 8$

Berakibat $g_2(\mu)$ monoton naik untuk μ jika $0 < \mu \leq 1$ dan $n \geq 8$. Karena $g_2(a_3) < 0$, $g_2(a_2) = 0$ dan $0 < a_2, a_3 \leq 1$, diperoleh bahwa $a_3 < a_2$;

$$a(G^c) > a(G_3(n-4,0)^c) \qquad \blacksquare$$

4. PENUTUP

Simpulan

Berdasarkan pembahasan dari penelitian ini dapat disimpulkan bahwa Konektivitas aljabarik graf dengan n titik yang memiliki komplemen pohon selain bintang lebih besar atau sama dengan konektivitas aljabarik graf yang memiliki komplemen berupa pohon spesial $T(n-3,1)$.

$$\big(a(T^c) \geq a(T(n-3,1)^c)\big)$$

dengan kesamaan berlaku jika dan hanya jika graf pohon T isomorfik dengan $T(n-3,1)$.

Konektivitas aljabarik graf dengan n titik yang memiliki komplemen graf unisiklik selain $K_{1,n-1} + e$ lebih besar atau sama dengan konektivitas aljabarik graf yang memiliki komplemen berupa graf unisiklik spesial $G_3(n-4,0)$.

$$\big(a(G^c) \geq a(G_3(n-4,0)^c)\big)$$

dengan kesamaan berlaku jika dan hanya jika graf unisiklik G isomorfik dengan $G_3(n-4,0)$.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H., & Rorres, C. (2005). *Elementary Linear Algebra*. New York: Drexel University.

Biggs, N. L. (1993). *Algebraic Graph Theory*. New York: Cambridge University Press.

Fiedler, M. (1973). Algebraic Connectivity of Graphs. *Czeshoslovak Mathematical Journal*, 298-305.

Godsil, C., & Royle, G. (2001). *Algebraic Graph Theory*. New York: Springer.

Holroyd, M. (2006). *Synchronizability and Connectivity of Discrete Complex Systems.* Williamsburg: Department of Mathematics The College of William and Mary.

Meyer, C. D. (2000). *Matrix Analysis and Aplied In Algebra*. United States of Amerika: Society for Industrial and Applied Mathematics.

Saber, R. O., Fax, J. A., & Murray, M. (2007). Consensus and Cooperation in Networked Multi-Agent Systems. *IEEE*, 215 -233.