MATH*unesa*
Jurnal Ilmiah Matematika *Volume 7 No. 3 Tahun 2019*
ISSN 2301-9115

TEOREMA TITIK TETAP PADA RUANG SEMIMETRIK SUBORDINAT

Muhammad Imam Sukro Aribowo

Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
email: muhammadaribowo@mhs.unesa.ac.id

Manuharawati

Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
email: manuharawati@unesa.ac.id

Abstrak

Ruang semimetrik $(E, \mathcal{D}_s)$ disebut ruang semimetrik subordinat jika terdapat fungsi $\zeta: [0, \infty] \to [0, \infty]$ dimana ζ merupakan fungsi tak-turun dengan $\lim_{x\to 0} \zeta(x) = 0$ dan terdapat (x_n) barisan $\mathcal{D}_s$ −Cauchy tak hingga pada E dan $\mathcal{D}_s$ −konvergen ke $x \in E$ sedemikian hingga untuk setiap $y \in$ E berlaku $\mathcal{D}_s(x, y) \leq \zeta\left(\limsup \mathcal{D}_s(x_n, y)\right)$. Titik $x \in E$ disebut titik tetap pada fungsi $f: E \to E$ jika dan hanya jika $f(x) = x$. Hasil penelitian menjelaskan mengenai konsep dari ruang semimetrik subordinat, sifat-sifatnya, serta teorema titik tetap pada ruang semimetrik subordinat lengkap.

Kata Kunci: teorema titik tetap, $\mathcal{D}_s$ −Cauchy, $\mathcal{D}_s$ −konvergen, ruang semimetrik, ruang semimetrik subordinat.

Abstract

A semimetric space $(E, \mathcal{D}_s)$ is said to be a subordinate semimetric space if exist function ζ : $[0, \infty] \to [0, \infty]$ such that ζ is a nondecreasing function with $\lim_{x\to 0} \zeta(\mathrm{x}) = 0$ and exist (x_n) is an $\mathcal{D}_s$ −Cauchy sequence is infinite at E and $\mathcal{D}_s$ −convergence sequence to $x \in E$, for each $y \in E$ such that $\mathcal{D}_s(x, y) \leq \zeta\left(\limsup \mathcal{D}_s(x_n, y)\right)$. The point $x \in E$ is said to be a fixed point of function $f: E \to E$ if and only if $f(x) = x$. This study explain the concept of subordinate semimetric spaces, properties, and a fixed point theorem in complete subordinate semimetric space.

Keywords: fixed point theorem, $\mathcal{D}_s$ −Cauchy, $\mathcal{D}_s$ −convergence, semimetric space, subordinate semimetric space.

1. PENDAHULUAN

Matematika merupakan ilmu yang mendasari berbagai bidang ilmu. Matematika dikenal sebagai *Mother Of Science* dan terdiri dari berbagai topik seperti Aljabar, Statistika, Matematika Terapan, Komputasi, dan Analisis (Pramitasari, 2013). Pada tahun 1906, Mourice Frechet memperkenalkan ruang metrik (Kreyszig,1978). Perluasan analisis fungsional pada konsep ruang metrik sudah banyak dikembangkan, di antaranya pada tahun 1931, W.A Wilson memperkenalkan ruang kuasi metrik melalui artikelnya yang berjudul *On quasi-metric spaces* (W. A. Wilson, 1931). Pada tahun 1959, H. Nakano memperkenalkan metrik modular melalui artikelnya yang berjudul *Modular Semi-Ordered Spaces* (H. Nakano, 1959). Pada tahun 1993, S. Czerwik memperkenalkan konsep ruang *b*-metrik melalui artikelnya yang berjudul *Contraction mapping in b-metric spaces* (S. Czerwik, 1993).

Salah satu topik yang juga dibahas dalam analisis adalah teorema titik tetap. Teorema titik tetap pertama kali diperkenalkan oleh ahli matematika Polandia Stefan Banach yang dikenal sebagai *Banach Contraction Principle (BCP)* pada tahun 1920 (Kreyzig,1978). Seiring perkembangan waktu, muncul ide-ide baru mengenai konsep ruang serta teorema titik tetap di dalamnya dari berbagai peneliti, diantaranya Mohamed Jleli dan Bessem Samet yang memperkenalkan konsep ruang metrik umum pada tahun 2015 (Jleli dan Samet, 2015) dan Jose Villa-Morales yang memperkenalkan konsep ruang semimetrik subordinat pada tahun 2018 (José Villa-Morales 2018).

Hasil dari penelitian José Villa-Morales tahun 2018 akan dibahas lebih rinci dalam paper yang berjudul "Teorema Titik Tetap pada Ruang Semimetrik Subordinat". Dalam paper ini dibahas ketunggalan titik tetap Matkowski pada ruang semimetrik subordinat lengkap dan ketunggalan titik tetap Kannan-Ciric untuk fungsi q-kontraktif pada ruang semimetrik subordinat lengkap. Untuk itu, sebelum menganalisis ketunggalan titik tetapnya diperlukan pemahaman mengenai kekonvergenan suatu barisan, barisan Cauchy, dan kelengkapan pada ruang semimetrik subordinat.

2. KAJIAN TEORI

Definisi 2.1 Diberikan $A \subset \mathbb{R}$, fungsi $f: A \to \mathbb{R}$ dikatakan tak-turun jika untuk setiap $x, y \in A$, $x < y$ berlaku $f(x) \leq f(y)$.

(Parzynsky, 1982)

Definisi 2.2 Diberikan M himpunan tak kosong. Fungsi $d: M \times M \to \mathbb{R}$ disebut metrik jika untuk setiap $x, y, z \in M$ berlaku:

(M_1) $d(x,y) \geq 0$ dan $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
(M_2) $d(x,y) = d(y,x)$
(M_3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$
Pasangan (X, d) disebut ruang metrik.

(Ghozali, 2010)

Definisi 2.3 Barisan pada ruang metrik (M, d) adalah fungsi yang didefinisikan pada $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ dan M sebagai kodomainnya. Barisan dinotasikan dengan (x_n).

(Bartle & Sherbert, 2000)

Jika $X: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ suatu barisan maka nilai titik n oleh X dinyatakan dengan $X(n)$ atau x_n yang disebut unsur ke-n dari barisan X. Selanjutnya barisan tersebut biasa ditulis sebagai

$$X = (x_n) \text{ atau } (x_n) \text{ atau } (x_n : n \in \mathbb{N}).$$

Adapun range dari X adalah $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Definisi 2.4 Diberikan barisan bilangan real $X = (x_n)$ pada ruang metrik (M, d) dan bilangan asli $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, \dots$ dengan $r_1 < r_2 < r_3 < \cdots < r_n < \cdots$. Barisan bilangan real $X' = (x_{r_1}, x_{r_2}, x_{r_3}, \dots, x_{r_n}, \dots)$ disebut subbarisan dari X jika x_{r_i} merupakan unsur barisan X.

(Manuharawati, 2003)

Definisi 2.5 Diketahui barisan bilangan real $X = (x_n)$ dan $m \in \mathbb{N}$. Ekor ke-m dari barisan X dinotasikan dengan X_m didefinisikan sebagai

$$X_m = (x_{m+n}) = (x_{m+1}, x_{m+2}, x_{m+3}, \dots).$$

(Manuharawati, 2003)

Definisi 2.6 Diketahui $M \subset \mathbb{R}$ dengan M tak kosong. Barisan (x_n) pada M dikatakan hingga jika terdapat ekor barisan ke-k sedemikian hingga untuk setiap $n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq k + 1$ berlaku $x_n = x_m$. Barisan (x_n) pada M dikatakan tak hingga jika terdapat ekor barisan ke-l sedemikian hingga untuk setiap $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq l + 1$, $m \geq l + 1$, $n \neq m$ berlaku $x_n \neq x_m$.

(Hierroa dan Shahzad, 2016)

Definisi 2.7 Diketahui $A \subset \mathbb{R}$. $u \in \mathbb{R}$ disebut batas atas A jika untuk setiap $a \in A$ berlaku $a \leq u$.

(Manuharawati, 2003)

Definisi 2.8 Diketahui $A \subset \mathbb{R}$. $t \in \mathbb{R}$ disebut batas bawah A jika untuk setiap $a \in A$ berlaku $t \leq a$.

(Manuharawati, 2003)

Definisi 2.9 Diketahui $A \subset \mathbb{R}$. $\alpha \epsilon \mathbb{R}$ disebut batas atas terkecil (supremum) A dan dinotasikan dengan $\alpha = \sup A$ jika memenuhi:
(A_1) untuk setiap $a \in A$ berlaku $a \leq \alpha$
(A_2) jika u sebarang batas atas A maka $\alpha \leq u$.

(Manuharawati, 2003)

Definisi 2.10 Diketahui $A \subset \mathbb{R}$. $\beta \epsilon \mathbb{R}$ disebut batas bawah terbesar (infimum) A dan dinotasikan dengan $\beta = \inf A$ jika memenuhi:
(B_1) untuk setiap $a \in A$ berlaku $a \leq \beta$
(B_2) jika t sebarang batas bawah A maka $t \leq \beta$.

(Manuharawati, 2003)

Definisi 2.11 Diketahui barisan $X = (x_n)$ dan X^m adalah subbarisan X. Limit supremum dari barisan X dinotasikan lim sup X didefinisikan sebagai

$$\limsup\,(x_n) = \inf\{\sup X^m : m \in \{n, n+1, n+2, \dots\} : n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} X^m\right)$$

(Hazewinkel, 2001).

Definisi 2.12 Diberikan fungsi $f: M \to M$, titik $x \in M$ disebut titik tetap f jika $f(x) = x$.

(Shapiro, 2016)

3. PEMBAHASAN

Definisi 3.1 Diberikan E himpunan tak kosong. Fungsi $\mathcal{D}_s : E \times \mathrm{E} \to [0, \infty]$ disebut semimetrik jika untuk setiap $x, y \in E$ memenuhi syarat:
(S_1) jika $\mathcal{D}_s(x,y) = 0$ maka $x = y$
(S_2) $\mathcal{D}_s(x,y) = \mathcal{D}_s(y,x)$

Jika fungsi $\mathcal{D}_s$ adalah semimetrik, maka pasangan $(E, \mathcal{D}_s)$ disebut ruang semimetrik.

(José Villa-Morales 2018).

Definisi 3.2 Diketahui $(E,\mathcal{D}_s)$ ruang semimetrik. Barisan (x_n) pada E disebut $\mathcal{D}_s -$konvergen ke $x \in E$ jika $\lim \mathcal{D}_s(x_n, x) = 0$.

(J. Villa-Morales, 2018)

Definisi 3.3 Diketahui $(E,\mathcal{D}_s)$ ruang semimetrik. Barisan (x_n) pada E disebut $\mathcal{D}_s$ $-$Cauchy jika $\lim \mathcal{D}_s(x_n, x_m) = 0$.

(J. Villa-Morales, 2018)

Definisi 3.4 Ruang semimetrik. $(E,\mathcal{D}_s)$ dikatakan lengkap jika setiap barisan $\mathcal{D}_s$ $-$Cauchy pada E adalah $\mathcal{D}_s$ $-$konvergen.

(J. Villa-Morales, 2018)

Definisi 3.5 Ruang semimetrik $(E,\mathcal{D}_s)$ disebut ruang semimetrik subordinat jika terdapat fungsi $\zeta : [0,\infty] \to [0,\infty]$ yang memenuhi syarat berikut.

(T_1) ζ adalah fungsi tak-turun dengan $\lim_{x\to 0} \zeta(x) = 0$

(T_2) terdapat barisan $\mathcal{D}_s$ $-$Cauchy tak hingga (x_n) pada E dan $\mathcal{D}_s -$ konvergen ke $x \in E$ sedemikian hingga untuk setiap $y \in$ E berlaku

$$\mathcal{D}_s(x,y) \le \zeta\left(\limsup \mathcal{D}_s(x_n,y)\right).$$

(J. Villa-Morales, 2018)

Dalam hal ini dapat dikatakan bahwa ruang semimetrik $(E,\mathcal{D}_s)$ adalah subordinat relatif untuk fungsi ζ.

Definisi 3.6 Ruang semimetrik subordinat $(E,\mathcal{D}_s)$ dikatakan lengkap jika setiap barisan $\mathcal{D}_s$ $-$Cauchy pada E adalah $\mathcal{D}_s$ $-$konvergen.

(J. Villa-Morales, 2018)

Sebelum membahas teorema titik tetap pada ruang semimetrik subordinat, terlebih dahulu akan didefinisikan suatu fungsi q-kontraktif sebagai berikut.

Definisi 3.7 Diberikan $(E,\mathcal{D}_s)$ ruang semimetrik subordinat dan $q \in \mathbb{R}$, fungsi $f : E \to$ E dikatakan q-kontraktif jika untuk setiap $(x,y) \in E \times$ E berlaku

$$\mathcal{D}_s(f(x),f(y)) \le q \max\{\mathcal{D}_s(x,f(x)),\mathcal{D}_s(y,f(y))\},$$

untuk suatu $q \in (0,1)$.

(J. Villa-Morales, 2018)

Diberikan Ehimpunan tak kosong dan fungsi $f : E \to$ E. Untuk setiap $x \in E$, didefinisikan $f^{[n]}(x)$ rekursif dengan $f^{[0]}(x) = x$ dan $f^{[n+1]}(x) = f\left(f^{[n]}(x)\right)$. Dari kasus ini, diperoleh sebuah teorema titik tetap Kannan-Ciric berikut.

Teorema 3.1 Diberikan fungsi q-kontraktif $f : E \to$ E pada ruang semimetrik lengkap $(E,\mathcal{D}_s)$.

i. Jika ada $x_0 \in E$ sedemikian hingga

$$\limsup \mathcal{D}_s\left(f^{[n]}(x_0), f^{[n+1]}(x_0)\right) < \infty,$$

maka $(f^{[n]}(x_0))$ $\mathcal{D}_s$ $-$konvergen ke suatu $\hat{x} \in E$.

ii. Misalkan $(E,\mathcal{D}_s)$ ruang semimetrik subordinat dan $\zeta(t) < \frac{t}{q}$, untuk semua $0 < t < \infty$.

Jika $\mathcal{D}_s(\hat{x}, f(x)) < \infty$, maka $\hat{x}$ adalah titik tetap tunggal f.

Bukti.

i). Bentuk barisan (x_n) melalui rumus rekursif. Ambil $x_0 \in E, x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$, dengan f^n adalah fungsi komposit sebanyak n kali. Karena fungsi f adalah q-kontraktif, maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
&\limsup \mathcal{D}_s(x_n, x_{n+1}) \\
&= \limsup \mathcal{D}_s(f(x_{n-1}), f(x_n)) \\
&\le \limsup q \max\{\mathcal{D}_s(x_{n-1}, f(x_{n-1})), \mathcal{D}_s(x_n, f(x_n))\} \\
&= q \limsup \max\{\mathcal{D}_s(x_{n-1}, f(x_{n-1})), \mathcal{D}_s(x_n, x_{n+1})\} \\
&\le q \limsup \mathcal{D}_s(x_n, x_{n+1}).
\end{aligned}$$

Karena $0 \le \limsup \mathcal{D}_s(x_n, x_{n+1}) \le q \limsup \mathcal{D}_s(x_n, x_{n+1})$ dengan $q \in (0,1)$ dan diketahui bahwa

$$\limsup \mathcal{D}_s(x_n, x_{n+1}) < \infty,$$

maka akan dibuktikan bahwa

$$\limsup \mathcal{D}_s(x_n, x_{n+1}) = 0.$$

Andaikan

$$\limsup \mathcal{D}_s(x_n, x_{n+1}) \ne 0,$$

berarti

$$\limsup \mathcal{D}_s(x_n, x_{n+1}) > 0.$$

Karena $q \in (0,1)$, maka jelas bahwa

$$q \limsup \mathcal{D}_s(x_n, x_{n+1}) < \limsup \mathcal{D}_s(x_n, x_{n+1}).$$

Kontradiksi dengan yang diketahui (pengandaian salah). Harusnya

$$\limsup \mathcal{D}_s(x_n, x_{n+1}) = 0.$$

Karena $\limsup \mathcal{D}_s(x_n, x_{n+1}) = 0$, maka berdasarkan definisi limit supremum diperoleh $\mathcal{D}_s(x_n, x_{n+1}) \le 0$. Karena

$$0 \le \mathcal{D}_s(x_n, x_{n+1}) \le 0,$$

maka diperoleh

$$\mathcal{D}_s(x_n, x_{n+1}) = 0.$$

Jika diberikan $\varepsilon > 0$, maka terdapat $k \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga

$$\mathcal{D}_s(x_n, x_{n+1}) < \frac{\varepsilon}{q},$$

untuk semua $n \in \mathbb{N},\ n \ge k$.

Misal diberikan $m, n \ge k+1$, maka berlaku

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_s(x_n, x_m) &= \mathcal{D}_s(f(x_{n-1}), f(x_{m-1})) \\
&\le q \max\{\mathcal{D}_s(x_{n-1}, f(x_{n-1})), \mathcal{D}_s(x_{m-1}, f(x_{m-1}))\} \\
&= q \max\{\mathcal{D}_s(x_{n-1}, x_n), \mathcal{D}_s(x_{m-1}, x_m)\} \\
&< q\left(\frac{\varepsilon}{q}\right) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Diperoleh $\mathcal{D}_s(x_n, x_m) < \varepsilon$. Berdasarkan Definisi 3.3, maka (x_n) adalah barisan $\mathcal{D}_s -$ Cauchy. Karena (x_n) barisan $\mathcal{D}_s -$ Cauchy pada ruang semimetrik lengkap, maka berdasarkan Definisi 3.5, (x_n) merupakan barisan $\mathcal{D}_s$ $-$konvergen ke suatu $\hat{x} \in E$.

ii). Akan dibuktikan bahwa $\hat{x}$ adalah titik tetap untuk f.

Jika barisan (x_n) hingga atau konstan, maka ada $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $x_n = x_{n_0} = \hat{x}$, untuk semua $n \ge n_0$ dan berlaku

$$f(\hat{x}) = f(x_{n_0}) = x_{n_0+1} = \hat{x}.$$

Di sisi lain, jika barisan (x_n) tak hingga maka berdasarkan Definisi 2.6, terdapat subbarisan $\mathcal{D}_s$ −Cauchy tak hingga $\left(x_{n_j}\right)$ pada (x_n) sedemikian hingga $\left(x_{n_j}\right)$ merupakan barisan $\mathcal{D}_s$ −konvergen ke $\hat{x} \in E$, atau dinotasikan

$$\lim \mathcal{D}_s\left(x_{n_j}, \hat{x}\right) = 0.$$

Andaikan $\mathcal{D}_s(\hat{x}, f(\hat{x})) > 0$. Karena $0 < \mathcal{D}_s(\hat{x}, f(\hat{x})) < \infty$, maka berdasarkan teorema pada sistem bilangan real, diperoleh $\frac{1}{2}\mathcal{D}_s(\hat{x}, f(\hat{x})) > 0$. Berdasarkan teorema pada sistem bilangan real, maka untuk $\frac{1}{2}\mathcal{D}_s(\hat{x}, f(\hat{x})) > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga

$$\mathcal{D}_s(x_n, x_m) \leq \frac{1}{2}\mathcal{D}_s(\hat{x}, f(\hat{x})),$$

untuk semua $n, m \geq n_0$.

Selanjutnya, berdasarkan Definisi 3.4 (T_2), berlaku

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_s(\hat{x}, f(\hat{x})) \leq \zeta\left(\limsup \mathcal{D}_s\left(x_{n_j}, f(\hat{x})\right)\right)\\
&= \zeta\left(\limsup \mathcal{D}_s\left(f(x_{n_j-1}), f(\hat{x})\right)\right)\\
&\leq \zeta\left(q \limsup \max\left\{\mathcal{D}_s\left(x_{n_j-1}, f(x_{n_j-1})\right), \mathcal{D}_s\left(\hat{x}, f(\hat{x})\right)\right\}\right)\\
&= \zeta\left(q \limsup \max\left\{\mathcal{D}_s\left(x_{n_j-1}, x_{n_j}\right), \mathcal{D}_s\left(\hat{x}, f(\hat{x})\right)\right\}\right)\\
&\leq \zeta\left(q \max\left\{\frac{1}{2}\mathcal{D}_s(\hat{x}, f(\hat{x})), \mathcal{D}_s(\hat{x}, f(\hat{x}))\right\}\right)\\
&\leq \zeta\left(q\, \mathcal{D}_s(\hat{x}, f(\hat{x}))\right).
\end{aligned}$$

Dari perhitungan diatas, diperoleh

$$\mathcal{D}_s(\hat{x}, f(\hat{x})) \leq \zeta\left(q\, \mathcal{D}_s(\hat{x}, f(\hat{x}))\right).$$

Jika kedua ruas dikalikan dengan q, maka diperoleh

$$q\, \mathcal{D}_s(\hat{x}, f(\hat{x})) \leq q\, \left(\zeta\left(q\, \mathcal{D}_s(\hat{x}, f(\hat{x}))\right)\right). \quad (3)$$

Jika $t := q\, \mathcal{D}_s(\hat{x}, f(\hat{x}))$, maka (3) menjadi $t \leq q\, \zeta(t)$. Karena $t \leq q\, \zeta(t)$, maka t yang memenuhi adalah $t = 0$ atau $t = \infty$ yang berakibat

$$\mathcal{D}_s(\hat{x}, f(\hat{x})) = 0 \text{ atau } \mathcal{D}_s(\hat{x}, f(\hat{x})) = \infty.$$

Hal ini tidaklah mungkin, karena $0 < \mathcal{D}_s(\hat{x}, f(\hat{x})) < \infty$. Jadi, pengandaian salah. Harusnya $\mathcal{D}_s(\hat{x}, f(\hat{x})) = 0$ atau $f(\hat{x}) = \hat{x}$. Artinya $\hat{x}$ merupakan titik tetap dari fungsi f.
Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $\hat{x}$ adalah tunggal.
Jika $\hat{y}$ adalah titik tetap lainnya, maka

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_s(\hat{x}, \hat{y}) &= \mathcal{D}_s(f(\hat{x}), f(\hat{y}))\\
&\leq q \max\left\{\mathcal{D}_s(\hat{x}, f(\hat{x})), \mathcal{D}_s\left(\hat{y}, f(\hat{y})\right)\right\} = 0.
\end{aligned}$$

Karena $\mathcal{D}_s(\hat{x}, \hat{y}) = 0$, berdasarkan Definisi 3.1 (S_1) maka $\hat{x} = \hat{y}$. ∎

Selanjutnya, dipaparkan teorema titik tetap Matkowski dalam ruang semimetrik subordinat lengkap sebagai berikut.

Teorema 3.2 Diberikan $(E, \mathcal{D}_s)$ ruang semimetrik subordinat lengkap dan fungsi $f : E \to E$. Misalkan terdapat fungsi tak-turun $\varphi: [0, \infty] \to [0, \infty]$ sedemikian hingga $\lim \varphi^{[n]}(t) = 0$ untuk semua $t \in [0, \infty)$ dan $\mathcal{D}_s(f(x), f(y)) \leq \varphi(\mathcal{D}_s(x, y))$ untuk semua $x, y \in E$. Jika ada $x_0 \in E$,

$$\delta(\mathcal{D}_s, f, x_0) := \sup\left\{\mathcal{D}_s\left(x_0, f^{[n]}(x_0)\right) : n \in \mathbb{N}\right\} < \infty$$

sedemikian hingga $\left(f^n(x_0)\right)$ $\mathcal{D}_s$ −konvergen ke suatu $\hat{x} \in E$, maka $\hat{x}$ adalah titik tetap tunggal f.

Bukti.
Ambil $x_0 \in E$, $x_n = f^n(x_0) = f(x_{n-1})$.
Misal $\mathrm{m} < n$.
Karena diketahui bahwa $\mathcal{D}_s(f(x), f(y)) < \varphi(\mathcal{D}_s(x, y))$ dan $x_n = f(x_{n-1})$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_s(x_n, x_m) &\leq \varphi(\mathcal{D}_s(x_{n-1}, x_{m-1}))\\
\mathcal{D}_s(x_n, x_m) &\leq \varphi^{[2]}(\mathcal{D}_s(x_{n-2}, x_{m-2}))\\
\mathcal{D}_s(x_n, x_m) &\leq \varphi^{[3]}(\mathcal{D}_s(x_{n-3}, x_{m-3}))
\end{aligned}$$

dan seterusnya sampai iterasi ke m sedemikian hingga diperoleh

$$\mathcal{D}_s(x_n, x_m) < \varphi^{[m]}(\mathcal{D}_s(x_{n-m}, x_0)).$$

Karena

$$\delta(\mathcal{D}_s, f, x_0) := \sup\left\{\mathcal{D}_s\left(x_0, f^{[n]}(x_0)\right) : n \in \mathbb{N}\right\} < \infty,$$

maka berlaku

$$0 \leq \mathcal{D}_s(x_n, x_m) < \varphi^{[m]}(\delta(\mathcal{D}_s, f, x_0)) < \infty.$$

Jika disetiap ruas diatas nilai $m, n \to \infty$, maka diperoleh

$$0 \leq \lim \mathcal{D}_s(x_n, x_m) < \lim \varphi^{[m]}(\delta(\mathcal{D}_s, f, x_0)) < \infty. \quad (4)$$

Karena diketahui bahwa

$$\lim \varphi^{[n]}(t) = 0,$$

untuk setiap $t \in [0, \infty)$, maka

$$\lim \varphi^{[m]}(\delta(\mathcal{D}_s, f, x_0)) = 0$$

sedemikian hingga (4) menjadi

$$0 \leq \lim \mathcal{D}_s(x_n, x_m) \leq 0.$$

Dengan demikian, $\lim \mathcal{D}_s(x_n, x_m) = 0$, artinya (x_n) adalah barisan $\mathcal{D}_s$ −Cauchy.
Karena (x_n) barisan $\mathcal{D}_s$ −Cauchy pada ruang semimetrik lengkap, maka berdasarkan Definisi 3.3, ada $\hat{x} \in E$ sedemikian hingga (x_n) $\mathcal{D}_s$ −konvergen ke $\hat{x} \in E$.
Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $\hat{x}$ adalah titik tetap untuk f.
Andaikan ada $m_0, n_0 \in \mathbb{N}, m_0 < n_0$, sedemikian hingga

$$x_{m_0} = x_{n_0} \text{ dan } x_{m_0} = f^{[n_0-m_0]}(x_{m_0}).$$

Dari pengandaian diatas, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_s\left(x_{m_0}, f(x_{m_0})\right)\\
&\quad = \mathcal{D}_s\left(f^{[n_0-m_0]}(x_{m_0}), f^{[n_0-m_0]}\left(f(x_{m_0})\right)\right) \quad (5)
\end{aligned}$$

Karena diketahui bahwa

$$\mathcal{D}_s(f(x), f(y)) \leq \varphi(\mathcal{D}_s(x, y)),$$

maka persamaan (5) menjadi

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_s\left(x_{m_0}, f(x_{m_0})\right) &\leq \varphi^{[n_0-m_0]}\left(\mathcal{D}_s\left(x_{m_0}, f(x_{m_0})\right)\right)\\
&< \varphi^{[n_0-m_0-1]}\left(\mathcal{D}_s\left(x_{m_0}, f(x_{m_0})\right)\right)\\
&\leq \mathcal{D}_s\left(x_{m_0}, f(x_{m_0})\right).
\end{aligned}$$

Tidak mungkin $\mathcal{D}_s\left(x_{m_0}, f(x_{m_0})\right) < \mathcal{D}_s\left(x_{m_0}, f(x_{m_0})\right)$ (pengandaian salah). Artinya setiap unsur dari barisan (x_n) berbeda ((x_n) merupakan barisan tak hingga).
Selanjutnya, berdasarkan Definisi 3.4 (T_2), maka berlaku

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_s(\hat{x}, f(\hat{x})) &\leq \zeta(\limsup \mathcal{D}_s(x_n, f(\hat{x})))\\
&= \zeta(\limsup \mathcal{D}_s(f(x_{n-1}), f(\hat{x})))\\
&\leq \zeta(\limsup \varphi(\mathcal{D}_s(x_{n-1}, \hat{x})))\\
&\leq \zeta(\limsup \mathcal{D}_s(x_{n-1}, \hat{x})).\\
&\leq \zeta(0) \quad (\text{karena } \lim \mathcal{D}_s(x_{n-1}, \hat{x}) = 0)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Karena

$$0 \leq \mathcal{D}_s(\hat{x}, f(\hat{x})) \leq 0,$$

maka

$$\mathcal{D}_s(\hat{x}, f(\hat{x})) = 0 \text{ atau } f(\hat{x}) = \hat{x}.$$

Dengan demikian, $\hat{x}$ merupakan titik tetap untuk fungsi f.
Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\hat{x}$ adalah tunggal.
Jika $\hat{y}$ adalah titik tetap lainnya, maka
$\mathcal{D}_s(\hat{x}, \hat{y}) = \mathcal{D}_s(f(\hat{x}), f(\hat{y})) \leq \varphi(\mathcal{D}_s(\hat{x}, \hat{y})) = 0.$
Karena $0 \leq \mathcal{D}_s(\hat{x}, \hat{y}) \leq 0$, berarti $\mathcal{D}_s(\hat{x}, \hat{y}) = 0$.
Berdasarkan Definisi 3.1 (S_1), jika $\mathcal{D}_s(\hat{x}, \hat{y}) = 0$, maka $\hat{x} = \hat{y}$. ■

Proposisi 3.1 Diberikan $(E, \mathcal{D}_s)$ ruang semimetrik subordinat dan (x_n) barisan $\mathcal{D}_s -$Cauchy tak hingga pada $(E, \mathcal{D}_s)$. Jika terdapat suatu subbarisan $\left(x_{n_j}\right)$ dari (x_n) yang $\mathcal{D}_s -$ konvergen ke $x \in E$, maka (x_n) $\mathcal{D}_s -$konvergen ke x.
Bukti**.**
Diketahui bahwa ζ adalah fungsi naik. Diberikan $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, maka terdapat $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap $0 < t < \delta$, berlaku $\zeta(t) < \varepsilon$.
Karena (x_n) barisan $\mathcal{D}_s -$Cauchy, berarti

$$\mathcal{D}_s(x_n, x_m) = 0,$$

untuk semua $m, n \in \mathbb{N}$.
Berdasarkan definisi barisan $\mathcal{D}_s -$Cauchy, maka terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk semua $m, n \geq n_0$, berlaku

$$\mathcal{D}_s(x_n, x_m) < \frac{\delta}{2} \tag{6}$$

Karena $\left(x_{n_j}\right)$ merupakan subbarisan dari (x_n), maka (6) menjadi

$$\limsup \mathcal{D}_s\left(x_{n_j}, x_m\right) \leq \frac{\delta}{2},$$

untuk semua $m \geq n_0$.
Karena $\left(x_{n_j}\right)$ $\mathcal{D}_s -$Konvergen ke x dan ζ adalah fungsi tak-turun, maka berdasarkan Definisi 3.4 (T_2), diperoleh

$$\mathcal{D}_s(x, x_m) \leq \zeta\left(\limsup \mathcal{D}_s\left(x_{n_j}, x_m\right)\right),$$

untuk semua $m \geq n_0$

$$\mathcal{D}_s(x, x_m) \leq \zeta\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

$$\mathcal{D}_s(x, x_m) < \varepsilon$$

Jika $n \geq m \geq n_0$, maka berlaku $\mathcal{D}_s(x, x_n) < \varepsilon$.
Jadi, terbukti bahwa (x_n) adalah barisan $\mathcal{D}_s -$Konvergen ke x. ■

4. PENUTUP

Simpulan

Berdasarkan dari pembahasan yang telah diuraikan dalam artikel ini, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Suatu ruang semimetrik merupakan perumuman dari ruang metrik.
2. Diberikan fungsi $f: E \to$ E yang q-kontraksi pada ruang semimetrik lengkap $(E, \mathcal{D}_s)$.
   a. Jika ada $x_0 \in E$ sedemikian hingga
   $$\limsup \mathcal{D}_s\left(f^{[n]}(x_0), f^{[n+1]}(x_0)\right) < \infty,$$
   maka $(f^{[n]}(x_0))$ $\mathcal{D}_s$-konvergen ke suatu $\hat{x} \in E$.
   b. Misalkan $(E, \mathcal{D}_s)$ ruang semimetrik subordinat dan $\zeta(t) < \frac{t}{q}$, untuk semua $0 < t < \infty$.

   Jika $\mathcal{D}_s(\hat{x}, f(x)) < \infty$, maka $\hat{x}$ adalah titik tetap tunggal f.
3. Diberikan $(E, \mathcal{D}_s)$ ruang semimetrik subordinat lengkap dan fungsi $f: E \to E$ Misalkan terdapat fungsi naik $\varphi: [0, \infty] \to [0, \infty]$ sedemikian hingga
   $$\lim \varphi^{[n]}(t) \to 0,$$
   untuk semua $t \in [0, \infty)$ dan
   $$\mathcal{D}_s(f(x), f(y)) \leq \varphi(\mathcal{D}_s(x, y)),$$
   untuk semua $x, y \in E$.
   Jika ada $x_0 \in E$,
   $$\delta(\mathcal{D}_s, f, x_0) := \sup\left\{\mathcal{D}_s\left(x_0, f^{[n]}(x_0)\right) : n \in \mathbb{N}\right\} < \infty$$
   sedemikian hingga $(f^n(x_0))$ $\mathcal{D}_s -$konvergen ke suatu $\hat{x} \in E$, maka $\hat{x}$ adalah titik tetap tunggal f.
4. Diberikan $(E, \mathcal{D}_s)$ ruang semimetrik subordinat dan (x_n) barisan $\mathcal{D}_s -$Cauchy tak hingga pada $(E, \mathcal{D}_s)$. Jika terdapat suatu subbarisan $\left(x_{n_j}\right)$ dari (x_n) yang $\mathcal{D}_s -$konvergen ke $x \in E$, maka (x_n) $\mathcal{D}_s -$konvergen ke x.

Saran

Pada skripsi ini, hanya dibahas mengenai definisi ruang semimetrik, ruang semimetrik subordinat, dan ruang semimetrik subordinat lengkap, serta pembuktian teorema titik tetap pada ruang semimetrik subordinat. Sehingga dapat dilakukan penelitian lebih lanjut mengenai sifat-sifat lain yang berlaku pada ruang semimetrik subordinat dan mungkin dapat ditemukan kondisi fungsi yang lain untuk diteliti ketunggalan titik tetapnya.

DAFTAR PUSTAKA

Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2000). *Introduction of Real Analysis Third Edition.* New York: John Wiley & Sons Inc.

Bonsall, F. F. (1962). Lectures on Some Fixed Point Theorems of Functional Analysis. *Tata Institue of Fundamental Research*.

Ghozali, S. M. (2010). Pengantar Analisis Fungsional. Bandung, Jawa Barat, Indonesia: Universitas Pendidikan Indonesia.

Hazewinkel. (1986). *Lebesgue Measure and Integration.* New Delhi, India: John Wiley & Sons.

Hierroa, Antonio Francisco Roldán López de dan Naseer Shahzad. 2018. Fixed point theorems by combining Jleli and Samets, and Branciaris inequalities. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications* 09(06):3822–49.

Jleli, Mohamed dan Bessem Samet. (2015). A generalized metric space and related fixed point theorems. *Fixed Point Theory and Applications*.

Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Application.* New York: Wiley.

Manuharawati. (2003). *Analisis Real 1*. Surabaya: Zifatama.

Pramitari. (2013). Multiplisitas Sikel Dari Graf Total Pada Graf Sikel, Graf Path, Dan Graf Kipas. *Skripsi*, Universitas Diponegoro Semarang.

P. Hitzler & A. K. Seda. (2000). Dislocated Topologies. *Journal of Electrical Engineering,* vol. 51, no. 12, pp. 3-7.

S. Czerwik. (1993). Contraction mapping in b-metric spaces. *Communications in Mathematics,* vol. 1, pp. 5-11.

Villa-Morales, José. (2018). A fixed point theorem and some properties of v-generalized metric spaces. *Journal of Fixed Point Theory and Applications* 20(1):1–9.

Villa-Morales, José. (2018). Subordinate Semimetric Spaces and Fixed Point Theorems. *Journal of Mathematics,* pp. 1–5.

W. A. Wilson. (1931). On quasi-metric spaces. *American Journal of Mathematics,* vol. 53, no. 3, pp. 675-684.