**MATH**unesa
**Jurnal Ilmiah Matematika** *Volume 7 No.3 Tahun 2019*
*ISSN 2301-9115*

# SIMULASI MODEL MATEMATIKA GERAK PENDULUM SEDERHANA

**Arwin Tsalas**
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
*e*-mail : arwintsalas@mhs.unesa.ac.id

**Abstrak**

Gerak pendulum yang bersifat periodik menunjukkan bahwa pendulum sederhana bergerak secara harmonik untuk sudut osilasi. Berikut ini dalam memenuhi bentuk eksak periode dari pendulum sederhana dibuat gambar yang menunjukkan perpindahan angular yang diplot sebagai fungsi dalam waktu yang berbeda dengan ampltudo awal. Untuk mengerjakan itu semua membutuhkan sebuah program komputer untuk mewujudkannya. Program komputer yang digunakan oleh penulis yakni Maple 18. Berikutnya digunakan Model persamaan diferensial bebas redaman dari pendulum sederhana. Dimana terdapat perpindahan angular dan waktu. Selanjutnya terdapat frekuensi angular yang digunakan untuk menyusun persamaan gerak pendulum sederhana. Berikutnya dengan menggunakan fungsi eliptik Jacobi yang di dalamnya memuat fungsi integral eliptik komplit dan tak komplit. Terdapat empat kali periode osilasi periode yang diukur dari banyaknya pendulum yang berayun dengan demikian gerak pendulum sederhana yang didapat dari menggunakan fungsi elliptik jacobi dengan nilai amplitude osilasi yang bernilai antara 75 hingga 90.
**Kata kunci :** Pendulum sederhana, Fungsi Elliptik Jacobi, Integral Elliptik.

**Abstract**

Periodic motion of pendulum indicates that a simple pendulum moves harmonically to the oscillation angle. Following this in fulfilling the exact period form of a simple pendulum an image is made showing angular displacement plotted as a function in time different from the initial amplitude. To do it all requires a computer program to make it real. The computer program used by the author is Maple 18. then is used the damping-free differential equation model of a simple pendulum. Where there is angular displacement and time. Next there is the angular frequency used to compose a simple pendulum motion equation. Next, it uses Jacobi elliptic function which contains complete and incomplete elliptic integral functions. There are four times the oscillation period which is measured by the number of pendulums swinging so that the simple pendulum motion is obtained from using the jacobi elliptic function with an oscillation amplitude value between 75 and 90.
**Keywords :** Simple Pendulum, Jacobi of Elliptical Function, Elliptical Integral.

## 1. PENDAHULUAN

Linierisasi dapat terjadi dengan mengasumsikan simpangan pendulum bernilai kecil sedemikian hingga nilai sin dapat didekati. Dengan begitu dapat diperoleh simpulan berupa penyelesaian persamaan diferensial nonlinier, selanjutnya dibandingkannya dengan hasil eksperimen. Dalam kajian teori terdapat periode osilasi ( $T$ ) yang merupakan pendulum nonlinier dan berrgantung pada besar simpangan maksimum atau nama lainnya anplitudo ($\theta_0$).

Hal yang ditemukan ketika menggunakan persamaan diferensial nonlinier yakni upaya mendapat besaran nilai periode osilasi sehingga keterkaitan terhadap ($\theta_0$) dapat dibuktikan. Persamaan yang ada kaitannya dengan gerak pendulum yaitu persamaan diferensial nonlinier yang diselesaikan dengan bantuan integral elliptic. Hal ini mengindikasikan periode osilasi pendulum bergantung besar simpangan.

Manfaat Penelitian yang didapat dari peneletian gerak pendulum yaitu gerak pendulum biasa didekati dengan masalah linier. Pada tingkat perguruan tinggi harusnya menjelaskan gerak pendulum tersebut sebagai masalah nonlinier. Termasuk dengan mngubah masalah nonlinier menjadi linier.

Untuk mempermudah dalam memahami materi yang disampaikan, penulis akan mencoba membuat plot grafik yang menyajikan berbagai variabel serta konstanta agar pembaca lebih memahami relasi yang dibentuk.

Untuk mempermudah dalam memahami materi yang disampaikan, penulis akan mencoba membuat plot grafik yang menyajikan berbagai variabel serta konstanta agar pembaca lebih memahami relasi yang dibentuk.

## 2. KAJIAN TEORI

### Persamaan Diferensial (PD)

Persamaan diferensial adalah persamaan yang didalamnya terdapat variable tak bebas dan derivatifnya terhadap variabel bebas. Contoh persamaan diferensial :

$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 6x\frac{dy}{dx} = 0$, var. bebas = $x$; var. tak bebas = $y$

Selanjutnya di dalam PD digunakan istilah Orde dan Derajat. Order persamaan diferensial adalah turunan yang paling tinggi dalam persamaan diferensial , contohnya :

$\frac{d^2y}{dx^2} - 6x\frac{dy}{dx} = 0$ adalah PD orde dua.

Banyak yang tahu bahwa order $n$ persamaan diferensial biasa dapat ke dalam bentuk :

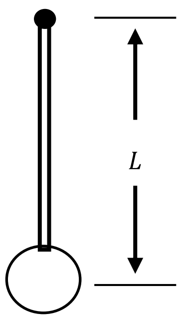
$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ dimana $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ semua ditentukan nilainya oleh $x$.

Syarat persamaan diferensial disebut linier jika di dalamnya memuat 3 hal yaitu semua variabel terikat dan turunannya mempunyai derajat satu, Tidak memuat perkalian variabel terikat dan variabel terikat lainnya. Variabel terikatnya tidak sebagai fungsi tersenden. berikut contoh $y^{(3)} + y = 0$ yakni persamaan diferensial linier berorder 3.

Selanjutnya persamaan diferensial yang selain persamaan linier disebut dengan persamaan diferensial nonlinier. Sedemikian hingga persamaan diferensial tersebut memenuhi syarat dibawah ini (Munir, 2006:6) yaitu semua variabel terikat mempunyai turunan yang lebih dari satu. Sebagai contoh $y" + 2e^x y' + yy' + y^2 = 0$ merupakan persamaan nonlinier karena suku $yy'$ dan $y^2$.

**Pendulum Sederhana**

Dengan memperhatikan struktur penampang pendulum sederhana, dapat digambarkan bahwa pendulum sederhana mempunyai bagian-bagian seperti titik tumpuan (poros), tali pengait massa pendulum, dan beban pendulum. Susunan ketiga bagian pendulum itu diawali dengan tali pengait massa yang mempunyai panjang $L$ dikaitkan ke poros pendulum yang terletak di ujung tali. Selanjutnya tali pengait pendulum diberi beban pendulum yang mempunyai massa $m$ yang terpasang di ujung lain. Selanjutnya dapat digambarkan pada gambar 2.1.




Figur 1. Pendulum sederhana

Asumsi yang digunakan dalam menentukan solusi gerak pendulum yaitu beban pendulum dianggap mempunyai massa $m$ cukup besar sehingga pendulum dapat diberayun ketika digerakkan. Gerak ayunan (osilasi) pendulum dapat ditentukan nilai pendekatan dengan menggunakan persamaan diferensial nonlinier. Sebelum mencari solusi yang berupa nilai pendekatan, ditentukan terlebih dahulu konsep pendulum secara umum. Konsep umum pendulum menggunakan hukum newton II yaitu

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Pendulum sederhana menggunakan satu derajat kebebasan yang mana derajat kebebasan tersebut hanya melibatkan gerak berayun kesamping kanan-kiri (osilasi horizontal). Berbeda dengan pendulum elastis yang mempunyai 2 derajat kebebasan yakni gerak pegas (osilasi vertikal) dan gerak berayun kesamping kanan-kiri (osilasi horizontal). Gerak ayunan pendulum berupa keliling lingkaran dengan jari-jari lingkarannya $L$ berupa panjang tali pendulum (Stanovnik & Zlobec, 2012:20).

**Integral Eliptik**

Integral eliptik lengkap jenis pertama dan kedua dirumuskan dalam bentuk Legendre sebagai berikut.

$$F\left(q, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 \phi}}$$

$$E\left(q, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - q^2 \sin^2 \phi}\, d\phi$$

Karena $k$ terbatas pada interval (0,1), maka nilai $\theta = arc\,\sin k$ hanya terbatas pada interval (0, $\frac{\pi}{2}$). Akan tetapi nilai $\phi$ tidak terbatas seperti $\theta$ dan dapat bernilai positif atau negatif.

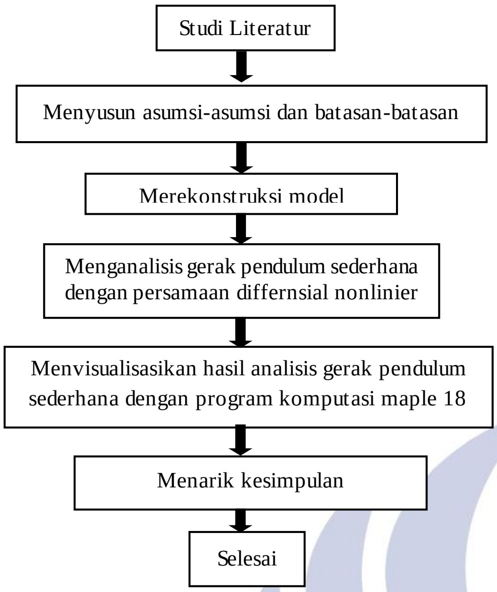
Dalam bentuk Jacobi, integral eliptik lengkap jenis pertama dan kedua dirumuskan sebaai berikut :

$$F\left(q, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - qx^2)}}$$

$$E\left(q, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^1 \frac{\sqrt{(1 - q^2x^2)}}{\sqrt{(1 - x^2)}}\, dx$$

Bentuk ini merupakan translasi dari bentuk Legendre dengan mengambil $x = \sin\theta$.

## 3. METODE PENELITIAN




Figur 2. Diagram tahap penelitian

## 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Salah satu sistem osilasi yang sederhana adalah pendulum sederhana. Sistem ini terdiri atas massa partikel $m$ yang digantung pada ujung tali yang bergerak bebas secara horizontal dengan periode gerak tertentu. Model persamaan diferensial bebas redaman dari pendulum sederhana sebagai berikut

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin\theta = 0, \qquad (4.1)$$

Dimana $\theta$ adalah perpindahan angular dan $t$ adalah waktu. $\omega_0$ merupakan frekuensi perndulum sederhana yang ditentukan dari

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad (4.2)$$

Dimana $l$ dan $g$ masing-masing merupakan panjang tali pendulum dan percepatan gravitasi. Karena adanya fungsi trigonometri yaitu $\sin\theta$ pada persamaan (4.1), sehingga persamaan (4.1) termasuk persamaan diferensial nonlinier.

Dengan menganggap osilasi pendulum diberikan syarat awal

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{t=0} = 0 \qquad (4.3)$$

Yang mana $\theta_0$ adalah amplitudo dari osilasi pendulum. Sistem osilasi ada diantara limit simetris $[-\theta_0, +\theta_0]$. Solusi periodik $\theta(t)$ dari persamaan (4.1) dan frekuensi angular $\omega$ beserta $T = \frac{2\pi}{\omega}$ dimana $T$ merupakan periode pendulum sederhana tergantung pada amplitudo .

Persamaan (4.1) nampak mudah dalam mencari penyelesaian, ternyata dibutuhkan usaha yang lebih untuk mencari solusinya yaitu dengan mencari persamaan diferensial nonlinier dari rumus $\sin\theta$ . Secara berurutan untuk mebcari solusi eksak dari persammaan (4.1) yaitu dengan mengalikannya dengan $\frac{d\theta}{dt}$ yang hasilnya dapat diperoleh sebagai berikut

$$\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin\theta \frac{d\theta}{dt} = 0 \qquad (4.4)$$

Dengan menurunkan menurunkan persamaan(4.4) terhadap $\frac{d}{dt}$ akan menjadi

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \omega_0^2 \cos\theta\right] = 0 \qquad (4.5)$$

Persamaan (4.5) sering juga digunakan dalam ilmu energi mekanik. Selanjutnya persamaan (4.5) diintegralkan dengan menggunakan syarat awal pada persamaan (4.3) akan didapat

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \omega_0^2 \cos\theta = 1$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \omega_0^2 \cos\theta$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\omega_0^2 \cos\theta$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_0) \qquad (4.6)$$

Dengan menggunakan persamaan trigonometri seperti berikut

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Maka persamaan (4.6) menjadi

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\omega_0^2\left[\left(1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \left(1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right)\right)\right]$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\omega_0^2\left[\left(1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 + 2\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right)\right]$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\omega_0^2\left[-2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right]$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\omega_0^2 2\left[\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 4\omega_0^2\left[\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \qquad (4.7)$$

Berikutnya diberikan

$$y = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \qquad (4.8)$$

$$k = \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \qquad (4.9)$$

Dari persamaan (4.3), (4.8) dan (4.9)

$$\theta(0) = \theta_0, y = y(0)$$
$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) = k$$
$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) = \sqrt{k}$$

$y(0) = \sqrt{k}$ (4.10)

Dengan menggunakan turunan $\frac{d\theta}{dt}$ sebagai fungsi dari $\frac{dy}{dt}$ dan menggunakan persamaan (4.8)

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\theta}{dt}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\theta}{dt}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ (4.11)

Selanjutnya dengan mengkuadratkan kedua ruas persamaan (4.11), hasilnya menjadi

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\theta}{dt}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$
$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{1}{4}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

Dengan menggunakan persamaan trigonometri

$$\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1 - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$
$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{1}{4}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$
$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{1}{4}\left[1 - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

Karena dari persamaan (4.8), $y = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ diperoleh

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{1}{4}[1 - y^2]\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

(4.12)

Dengan mengubah bentuk $\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$ kedalam bentuk $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ persamaan (4.12) menjadi

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{1}{4}[1 - y^2]\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$
$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{4}{1-y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

(4.13)

Kemudian dengan mensubstitusi persamaan (4.8), (4.9) dan (4.13) kedalam persamaan (4.7)

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 4\omega_0^2\left[\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$
$$4\omega_0^2\left[\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] = \frac{4}{1 - y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

Karena $y = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ maka $y^2 = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ , $k = \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$ jadi

$$4\omega_0^2[k - y^2] = \frac{4}{1-y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

(4.14)

Dimana persamaan (4.14) dapat diubah ke bentuk

$$4\omega_0^2[k - y^2] = \frac{4}{1 - y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$
$$\frac{4}{1 - y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 4\omega_0^2 k\left[1 - \frac{y^2}{k}\right]$$
$$4\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 4\omega_0^2 k(1 - y^2)\left[1 - \frac{y^2}{k}\right]$$
$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{4\omega_0^2 k(1 - y^2)\left[1 - \frac{y^2}{k}\right]}{4}$$
$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \omega_0^2 k(1 - y^2)\left[1 - \frac{y^2}{k}\right]$$

(4.15)

Diberikan variabel baru $\tau$ dan $z$ sebagai berikut

$$\tau = \omega_0 t \text{ dan } z = \frac{y}{\sqrt{k}}$$

(4.16)

Karena $\omega_0^2 k$ merupakan konstanta dan nilai $k$ berada $0 < k < 1$ . Kemudian persamaan (4.16) disubstitusi ke persamaan (4.15) menjadi

$$\tau = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-k\xi^2)(1-\xi^2)}} - \int_0^z \frac{d\xi}{\sqrt{(1-k\xi^2)(1-\xi^2)}}$$

(4.21)

Jika $k = 0$, maka

$$\tau = -\int_1^z \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)}}$$

Persmaan tersebut dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$\tau = -\int_1^z (1 - \xi^2)^{-1/2}\, d\xi$$

(4.22)

Selanjutnya dengan menggunagan penyelesaian integral persamaan trigonometri yakni

$$\tau = -\int_1^z (1 - \xi^2)^{-1/2}\, d\xi$$

Misal $\xi = \sin\theta$ sehingga $d\xi = \cos\theta d\theta$ . Dengan mensubstitusi $\xi$ dan $d\xi$ kedalam persamaan (4.22)

$$\tau = -\int_1^z {}^{1}\!/\!\sqrt{1 - \sin^2\theta}\,\cos\theta d\theta$$

Mengingat dalam trigonometri terdapat $1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$ sehingga

$$\tau = -\int_1^z (\cos^2\theta)^{-1/2}\cos\theta d\theta$$
$$\tau = -\int_1^z d\theta$$
$$\tau = -[\theta]_1^z$$
$$\xi = \sin\theta$$
$$\theta = arc\sin\xi$$
$$\tau = -[arc\sin\xi]_1^z$$
$$\tau = -arc\sin z + 90$$

Karena dari syarat awal $z(0) = 1$ maka

$$\tau = 90 - arc\sin 1$$
$$\tau = 90 - 90$$
$$\tau = 0$$

Kemudian ditunjukkan sebagai berikut

$\tau = Q(q) - F(\arcsin z\,; q)$

Karena $\tau = 0$ dan $Q(0) = -1$ jadi

$$F(\arcsin z\,; q) = -1$$

Selanjutnya $Q(q) = Q(m)$ dan $F(\varphi; m)$ merupakan integral eliptik tak lengkap dan $Q(m)$ merupakan integral eliptik lengkap tingkat satu.

Melihat persamaan (4.22) bisa didapatkan

$$Q(m) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-mz^2)(1-z^2)}} \quad (4.24)$$

$$F(\varphi, m) = \int_0^{\varphi} \frac{dz}{\sqrt{(1-mz^2)(1-z^2)}} \quad (4.25)$$

Dan $z = \sin\varphi \rightarrow \arcsin z = \varphi$.

Ketika $m = k$ maka

$$Q(q) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-qz^2)(1-z^2)}}$$

Untuk $q = 0$ sehingga

$$Q(0) = -\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}}$$

Misal $z = \sin\theta$ sehingga $dz = \cos\theta\, d\theta$

$$Q(0) = -\int_0^1 \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{(1-\sin^2\theta)}}$$

Dengan menggunakan aturan trigonometri $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ sedemikian hingga

$$Q(0) = -\int_0^1 \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{(1-\sin^2\theta)}}$$

$$Q(0) = -\int_0^1 \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{(\cos^2\theta)}}$$

$$Q(0) = -\theta]_0^1$$

$$Q(0) = -1$$

Terdapat 4 kali periode osilasi $T$ yang diukur dari banyaknya pendulum berayun dari $\theta = 0$ $(z = 0)$ ke $\theta = \theta_0$ $(z = 1)$. Jadi

$$T = \frac{4\tau(0)}{\omega_0} = 4\frac{\omega_0 t(0)}{\omega_0} = 4t(0), \tau_0 = -1$$

$$T = \frac{4\tau(0)}{\omega_0} = \frac{4\tau(0)}{\frac{2\pi}{T}} = 4\tau(0)\frac{T}{2\pi} = \frac{2T\tau(0)}{\pi}$$

$$= \frac{2K(k)T(0)}{\pi}$$

$$T = 4t(0) = \frac{4\tau(0)}{\omega_0} = \frac{4}{\omega_0}Q(q) = -\frac{2}{\pi}T_0$$

Dimana

$$T_0 = \frac{\frac{4}{\omega_0}Q(q)}{\frac{2Q(q)}{\pi}} = \frac{4}{\omega_0}Q(q)\frac{\pi}{2Q(q)} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}{\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\frac{l}{g}}} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}{\sqrt{\frac{gl}{gl}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Selanjutnya $F(\varphi, m) = \int_0^{\varphi} \frac{dz}{\sqrt{(1-mz^2)(1-z^2)}} = F(arc \sin z\,; m)$, karena dibuat $m = 0$ dan $arc \sin z = 9{,}20°$ yang didapat dari

$$z = \sin\varphi$$

$$\varphi = arc \sin z$$

$$\varphi = arc \sin {}^1/_6$$

$$\varphi = 9{,}20°$$

$$F(\varphi = 9{,}20°; m = 0) = \int_0^{9,20} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\varphi^2)}}$$

$$= \int_0^{9,20} (1-\varphi^2)^{-1/2}\, d\varphi$$

$$F(\varphi = 9{,}20°; m = 0)$$

$$= \int_0^{9,20} d\varphi + \int_0^{9,20} {}^1/_2\,\varphi^2\, d\varphi + \int_0^{9,20} \varphi^{-1}\, d\varphi$$

$$F(\varphi = 9{,}20°; m = 0) = 9{,}20 + \frac{778{,}69}{6} - 2{,}22$$

$$F(\varphi = 9{,}20°; m = 0) = 9{,}20 + 129{,}78 - 2{,}22$$

$$F(\varphi = 9{,}20°; m = 0) = 136{,}76$$

Untuk mencari nilai $Q$ dapat menggunakan

$$\tau = Q - F$$

$$Q = F + \tau$$

$$Q = 136{,}76 + (-3{,}99) = 136{,}76 - 3{,}99 = 132{,}77$$

Yangmana persamaan (4.27) dapat ditulis dengan rumus fungsi eliptik jacobi $sn(u; m)$

$$z = sn(Q(q) - \tau; k). \quad (4.28)$$

Berikutnya dengan menggabungkan persamaan (4.8), (4.9), (4.16) dan (4.25) kedalam persamaan (4.28) akan menjadi

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin\frac{\theta_0}{2}\, sn\left[Q\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2}\right) - \omega_0 t; \sin^2\frac{\theta_0}{2}\right] \quad (4.29)$$

Mengingat persamaan (4.8)

$$y = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

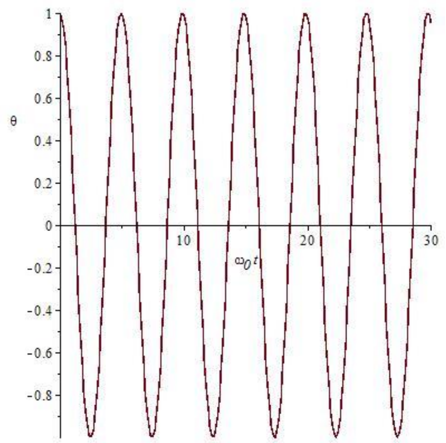
$$\theta/_2 = arc \sin y$$

$$\theta = arc \sin y(2)$$

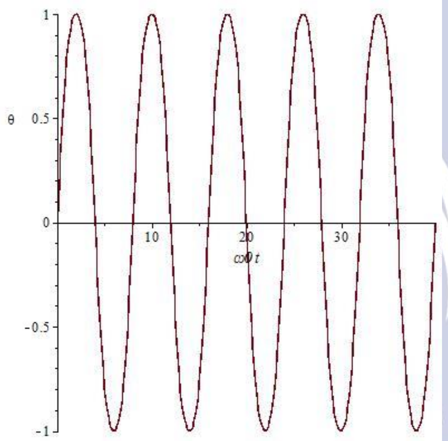
Dan dengan menggunakan persamaan (4.29) didapatkan

$$\theta(t) = 2\, arc \sin\left\{\sin\frac{\theta_0}{2}\, sn\left[Q\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2}\right) - \omega_0 t; \sin^2\frac{\theta_0}{2}\right]\right\}$$

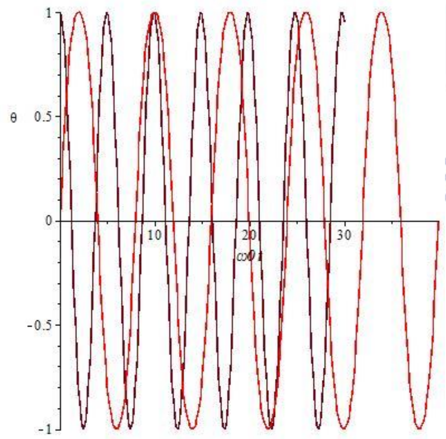
Selanjutnya untuk mempermudah memahami gerak pendulum sederhana dibuat plot seperti gambar dibawah ini




Figur 3. Plot gerak pendulum sederhana dengan menggunakan fungsi persamaan diferensial order 2




Figur 4. Plot gerak pendulum sederhana dengan menggunakan fungsi elliptik jacobi.




Figur 5. Kombinasi plot gerak pendulum sederhana dengan menggunakan fungsi ellpitik jacobi dan persamaan diferensial order 2.

## 5. PENUTUP

### Simpulan

Dari pembahasan mencari perpindahan angular $(\theta_t)$ dengan $k = 0$ didapatkan persamaan $\tau = z - 1 - \frac{z^3+6}{6} + \ln z - \ln 1$. Ketika $K(m)$, untuk $k = m$ dan $k = 0$ diperoleh $K(0) = z + \frac{1}{6}$ sehingga pada saat $K(0) = 0$, jadi $z = -\frac{1}{6}$. Karena $\tau(z) = z - 1\frac{-z^3+6}{6} + \ln z$, dan $z = -\frac{1}{6}$ sedemikian hingga $\tau\left(-\frac{1}{6}\right) = -3$, Dari $F(\arcsin z\,; k) = K(k) - \tau$ terdapat $\varphi = arc\sin z$ yang membuat $\varphi = 9{,}20°$ . Selanjutnya nilai dari $F(\varphi = 9{,}20°; m = 0) = 136{,}76$. Untuk mencari nilai $K$ dapat menggunakan $K = F + \tau$ yang dite,ukan nilai $K = 136{,}76 + (-3{,}99) = 136{,}76 - 3{,}99 = 132{,}77$ . Mengingat kembali $y = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ dapat ditulis dengan $\theta = 2\, arc\sin y$ . Yang mana akan membentuk persamaan $\theta_t$ yang memuat $K(k)$ dan $\omega_0 t$. Persamaan $\theta(t) = 2\, arc\ \sin\left\{\sin\frac{\theta_0}{2} sn\left[K\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2}\right) - \omega_0 t; \sin^2\frac{\theta_0}{2}\right]\right\}$ . Selanjutnya Persamaan $\theta(t)$ yang merupakan perpindahan angular ini dibuatkan plot yang menggambarkan hubungan antara $\theta$ dan $\omega_0 t$ dengan bantuan program komputer maple 18.

### Saran

Untuk menentukan perindahan angular sebenarnya bisa dikembangkan dengan memodifikasi persamaan perpindahan angular yang memuat variabel-variabel yang tidak dituliskan penulis seperti adanya panjang gelombang.

Dari hasil plot di maple 18 dapat diatur sedemikian rupa besar nilai $\omega_0 t$ dan $\theta$ bisa menampilkan plot yang variatif.

Untuk penulis berikutnya bisa menggunakan bantuan program seperti matlab, mathematica, dan sebagainya untuk menunjang pemahaman pembaca dalam membuat plot.

## DAFTAR PUSTAKA

Balendez. A & Pascual. C. 2007. *"Exact Solution for the Nonlinier Pendulum"*. Alicante, Spanyol: Alicante of University.

J.B. Marion. 1970. *"Classical Dynamics of Particles and Systems"*. San Diego: Harcourt Brace University.

Kartashova, E. 2010. *"Nonlinier Resonance Analysis: Theory, Computation, Applications"*. Cambridge.

Milne Thomson & M. Abramowitz. 1972. *"Handbook of Mathematical Functions"*. California: Nova Iorque

Munir, R. 2006. *"Metode Numerik"*. Bandung: Informatika Bandung.

Nagle, R. K. 2012. *"Fundamentals of Differential Equations"*. Boston: Addison-Wesley.

R.E. Mickens. 1996. *"Oscillations in Planar Dynamics Systems"*. Singapore: World Scientific.

Redfern, Darren. 1993. "*The Maple Hand Book*". Brunswick: Darren Redfern Practical Approach.

Verhulst, F. 1990. *"Nonlinier Differential Equations and Dynamical System"*. Berlin: Springer Verlag.

Ziaul Arif, M. & Halikin, Ikhsanul. 2016. "*Maple 16 : The Essential Tool for Mathematics and Modelling*". Jember: FMIPA. Universitas Jember.