MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika *Volume 7 No. 3 Tahun 2019*
ISSN 2301-9115

PLANARITAS-1 GRAF KOMPLIT DAN GRAF MULTIPARTISI KOMPLIT

Febby Sintanova Nahari
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : febbysinta22@gmail.com

Abstrak

Misalkan G sebuah graf. Graf G disebut graf planar jika G dapat digambar dibidang datar sedemikian hinga tidak ada sisi-sisinya saling berpotongan (bersilangan) kecuali mungkin pada titik-titik akhir sisi-sisi tersebut.
Graf G disebut graf planar-1 jika G dapat digambarkan pada sebuah bidang datar sedemikian hingga setiap sisi G berpotongan (bersilangan) dengan paling banyak satu sisi yang lain. Setiap graf planar pasti planar-1. Tetapi sebaliknya graf planar-1 belum tentu graf planar. Skripsi ini membahas planaritas-1 dari graf komplit maupun graf multipartisi komplit. Skripsi ini diawali dengan pembuktikan bahwa jika G graf planar-1 dengan n titik dan m sisi maka m ≤ 4n-8. Selanjutnya dibuktikan bahwa graf komplit K_n bukan graf planar-1 jika dan hanya jika ≥ 7 . Akhirnya ditunjukakan graf t-partisi komplit $K_{n_1,n_2,n_3,n_4,n_5,n_6,\cdots,n_t}$ dengan $t \geq 7$ bukan planar-1.
Kata kunci : **graf planar, graf planar-1 , graf komplit, dan graf multipartisi komplit**

Abstract

Let G be a graph. The graph G is called planar graph if it can be drawn on a plane such that no two adges of G intersect except possinly at the end point of these edges. A graph G is call 1-planar if it can be drawn in the plane such that each its edge is crossed (intercepted) by at most one other edge. Clearly if G is planar graph than it is 1-planar graph,but the converse is not true. We prove that if G is a 1-planar graph on n vertices and m edges, then $m \leq 4n - 8$. We also prove that the complete graph Kn is non 1-planar if $n \geq 7$. Finally, we completely determine whether the complete t-partite graph $K_{n_1,n_2,n_3,n_4,n_5,n_6,\cdots,n_t}$ to be 1-planar or non 1-planar,

Keyword : planar graph, planar-1 graph, complete graph, and complete multipartite graph.
.

1.PENDAHULUAN

Sebagai cabang Matematika dari dua ratus tahun silam. Tahun 1736 teori graf muncul sebagai jurnal pertama yang dulu teori graf kurang signifikan namun akhirnya ada perkembangan pesat. Dikarenakan aplikasinya yg sangat luas untuk kehidupan sehari-hari dan berbagai bidang seperti : ilmu sosial, sains, bisnis, teknik dan komputer.

Sebuah graf G berisikan dua himpunan berhingga tak kosong V(G) yang disebut titik dan hompunan berhingga mungkin kosong E(G) yaitu sisi (Budayasa, 2007:1.

Jika G dapat digambarkan pada sebuah bidang datar sedemikian hingga setiap sisi G disilang paling banyak 1sisi lainya maka dari itu graf G merupakan graf planar-1. Berdasarkan definisi: setiap graf planar pasti planar-1. Tetapi sebaliknya belum tentu, artinya planar-1 belum tentu planar (Czap dan Hudak, 2012: 505-512).

2.KAJIAN TEORI

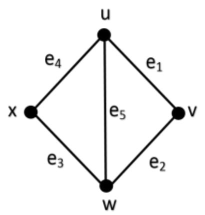
A. GRAF

Definisi 2.1

Dua himpunan pada graf G yg terdiri dari himpunan berhingga tak kosong $V(G)$ dari objek-objek yang disebut titik dan himpunan berhingga (bisa kosong) $E(G)$ yang elemen-elemennya disebut sisi sehingga setiap elemen e dalam $E(G)$ merupakan pasangan tak berurutan titik-titik pada V(G). (Budayasa, I.K.(2007).*Teori Graph dan Aplikasinya*.Surabaya: Unesa University Press-2007).

Contoh 2.1

Misalkan, graf G dengan $V(G) = \{u, v, w, x\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$ dimana $e_1 = uv, e_2 = vw, e_3 = wx$, $e_4 = ux,$ dan $e_5 = uw$ dapat disajikan gambar dibawah ini,

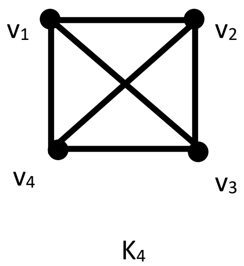


Gambar 3.1

Definisi 2.2

Graf sederhana bersama n titik dan setiap dua titik yang berbeda dihubungkan dengan sisi itu yang disebut Graf Komplet (graf lengkap) dengan n titik, yg dilambangkan dengan Kn.

Contoh 2.2 K_4 graf komplet dengan 4 titik

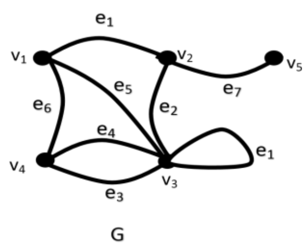


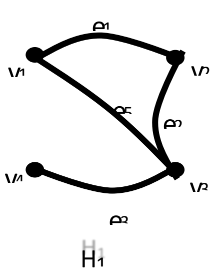
Definisi 2.3

jika $V(H) \subset V(G)$ dan $E(H) \subset E(G)$.

Maka sebuah graf H disebut subgraf dari G , jika $H \subset G$.

Contoh 2.3





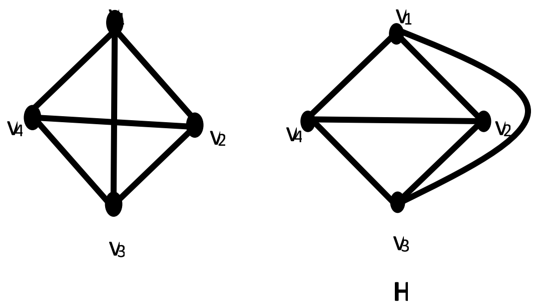
H_1 subgraf G

Definisi 2.4

Jika graf G yang dapat digambar di bidang datar yang mana sehingga sisi-sisinya tidak ada yang saling berpotongan kecuali pada sisi-sisi dan titik-titik tersebut. Maka graf disebut Graf Planar.

Pajangan (embedding) G yaitu graf planar G yang digambar dibidang datar sedemikian hingga tidak ada sisi-sisinya yang berpotongan kecuali mungkin pada titik-titik akhir sisi-sisi tersebut yang disebut Subgraf.

Bisa diperhatikan bahwa subgraf pasti graf planar, tetapi sebaliknya tidak berlaku. Sebagai contoh, graf $G = K_4$ di gambar 2.4 adalah graf planar karena dapat digambar seperti graf H, tetapi G bukan subgraf karena sisi V_1V_5 dan V_1V_5



$G = K_4$

Gambar 2.4: Graf $G = K_4$ adalah graf planar

Teorema 2.5

(Formula Euler). Jika G graf bidang terhubung, maka $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2$

Bukti teorema dapat dilihat pada (Budayasa, I. K. (2007). *Teori Graph dan Aplikasinya*).

Teorema 2.6 : Jika G graf planar sederhana dengan $|E(G)| > 1$, maka $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$

Bukti teorema dapat dilihat pada Bukti teorema dapat dilihat pada (Budayasa, I. K. (2007). *Teori Graph dan Aplikasinya*).

Teorema 2.7 : (Teorema Jabat Tangan) . Jika G sebuah graf maka $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|$ ■.

Sebagai akibat dari teorema tersebut adalah teorema berikut.

Teorema 2.8 : Banyaknya titik berderajat ganjil disebuah graf adalah genap.

Bukti teorema dapat dilihat pada Bukti teorema dapat dilihat pada (Budayasa, I. K. (2007). *Teori Graph dan Aplikasinya* . Surabaya: Unesa University Press-2007).

3.PEMBAHASAN

Planaritas-1 Graf Komplet

Kita awali membahas ini dengan menentukan hubungan antara banyak titik dan banyak sisi graf planar-1.

Teorema 3.2 : Jika G graf planar-1 maka $|E(G)| \leq 4|V(G)| - 8$

Bukti :

- Misalkan G graf planar-1 maksimal (banyak sisi) dengan n titik. Pikirkan sebuah pajangan planar-1 dari G. Lambangkan pajangan ini dengan $\hat{G}$.
- Misalkan banyaknya titik persilangan di $\hat{G}$ adalah c.

  Jika dua sisi yang saling bebas xy dan zw bersilangan di $\hat{G}$, karena maksimalitas dari G, maka xz, zy, yw dan wx adalah sisi dari $\hat{G}$.

  Jika dari setiap pasang sisi yang bersilangan di $\hat{G}$ dihapus sebuah sisi, maka diperoleh graf bidang $\widehat{G_1}$ sedemikian hingga setiap muka berbentuk segitiga (sikel dengan panjang 3). Berdasarkan Akibat Formula Euler.

  $$\left|E(\widehat{G_1})\right| \leq 3\left|V(\widehat{G_1})\right| - 6 = 3n - 6 \quad ...(1)$$

Karena $\left|E(\widehat{G_1})\right| = \left|E(\hat{G})\right| - c$ dan $\left|E(\hat{G})\right| = |E(G)| = m$

maka $\left|E(\widehat{G_1})\right| = m - c$ atau $m = \left|E(\widehat{G_1})\right| + c$ . . . (2)

Karena dari setiap titik persilangan setelah dihapus mendapatkan 2 muka di $\widehat{G_1}$ maka:

$$c \leq \frac{|F(\widehat{G_1})|}{2} \quad ...(3)$$

Dari (2) dan (3) diperoleh

$$m \leq \left|E(\widehat{G_1})\right| + \frac{|F(\widehat{G_1})|}{2} \quad ...(4)$$

Karena $\frac{|F(\widehat{G_1})|}{2} \leq n - 2$ maka dari (1) dan (4) diperoleh $m \leq 3n - 6 + n - 2 = 4n - 8$

Dengan demikian Teorema 3.2 terbukti ■

Akibat dari Teorema 3.2 adalah sebagai berikut :

Akibat 3.2.1 : Jika G graf planar-1 maka $\delta(G) \leq 7$

Bukti :

Misal G graf planar-1. Berdasarkan Teorema Jabat Tangan,

$$\sum_{v \in V(G)} d(V) = 2|E(G)| \quad \textbf{....(1)}$$

Berdasarkan Teorema 3.1, karena G planar-1 maka

$$|E(G)| \leq 4|V(G)| - 8 \quad \textbf{...(2)}$$

Berdasarkan (1) dan (2) diperoleh

$$\sum_{v \in V(G)} d(V) \leq 8|V(G)| - 16 \quad \textbf{...(3)}$$

Andaikan $\delta(G) > 7$

Karena $\delta(G)$ bilangan bulat maka $\delta(G) \geq 8$. Ini berarti

$\forall v \in V(G), d(V) \geq 8$ sehingga,

$\sum_{v \in V(G)} d(V) \geq 8|V(G)| > 8|V(G)| - 16$ dengan demikian

$$\sum_{v \in V(G)} d(V) > 8|V(G)| - 16 \quad \textbf{...(4)}$$

Jadi (4) kontradiksi dengan (3). Dengan demikian teorema terbukti ■

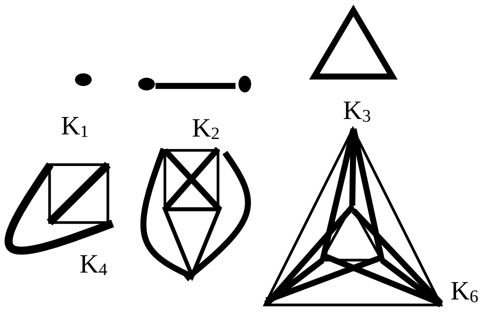
Berdasarkan Teorema 3.2, dapat dibuktikan teorema berikut

Teorema 3.3 :

a. Jika $1 \leq n \leq 6$, maka graf komplet Kn adalah planar-1
b. Jika $n \geq 7$ maka graf komplet Kn bukan planar-1

   Bukti :

a. Pajangan plnar-1 dari K_1,K_2,K_3,K_4,K_5, dan K_6 secara berturut-turut dapat dilihat pada gambar berikut



b. Untuk $n \geq 7$ maka $\frac{(n-1)\cdot n}{2} > 4n - 8$

Karena Kn graf beraturan$-(n-1)$ maka

$\sum_{v \in V(Kn)} d(v) = n \cdot (n-1)$ . . . (1)

Berdasarkan Teorema Jabat Tangan

$\sum_{v \in V(Kn)} d(v) = 2 \cdot |E(Kn)|$ . . . (2)

Dari (1) dan (2) diperoleh $n \cdot (n-1) = 2 \cdot |E(Kn)|$ atau $|E(Kn)| = \frac{(n-1)\cdot n}{2}$

Karena untuk $n \geq 7$ $|E(Kn)| = \frac{(n-1)\cdot n}{2} > 4n - 8$,berdasarkan Teorema 3.2. Maka Kn bukan graf planar-1.

Penjabaran:

$$|E(Kn)| = \frac{(n-1)\cdot n}{2}$$

$$\frac{(n-1)\cdot n}{2} > 4n - 8$$

$$(n-1)\cdot n > (4n-8)2$$

$$(n-1)\cdot n > 8n - 16$$

$$n^2 - n > 8n - 16$$

$$n^2 - n - 8n > -16$$

$$n^2 - 9n + 16 > 0 \leftrightarrow n < \frac{9-\sqrt{17}}{2} \; atau$$

$$n > \frac{9+\sqrt{17}}{2}$$

Untuk $n^2 - 9n + 16 = 0$ diperoleh

$$n_1 = \frac{9+\sqrt{81-4\cdot 16}}{2}$$

$$= \frac{9+\sqrt{17}}{2}$$

$$n_2 = \frac{9-\sqrt{81-4\cdot 16}}{2}$$

$$n_2 = \frac{9-\sqrt{17}}{2}$$

Karena n bilangan bulat dan $n > \frac{9+\sqrt{17}}{2}$ maka $n \geq 7$

K5

PENUTUP

Simpulan

1. Graf komplit K_n bukan graf planar-1 jika dan hanya jika $n \geq 7$
2. Graf bipartisi komplit $K_{m,n}$
   a. $K_{1,2}$ merupakan graf planar-1
   b. $K_{3,n}$ dengan $n \leq 6$ merupakan graf planar-1
   c. $K_{3,n}$ dengan $n \geq 7$ bukan merupakan graf planar-1
   d. $K_{4,n}$ dengan $n \leq 4$ adalah graf planar-1
   e. $K_{4,n}$ dengan $n \geq 5$ bukan merupakan graf planar-1
   f. Jika $m \geq 5$ dan $n \geq 5$ maka $K_{m,n}$ bukan merupakan graf planar-1
3. Graf tripartisi komplit K_{n_1,n_2,n_3}
   a. $K_{n_1,1,1}$ dengan $n_1 \geq 1$ merupakan graf planar-1
   b. K_{n_1,n_2,n_3} dengan $n_1 \geq 7$, $n_2 \geq 2$, dan $n_3 \geq 1$ bukan merupakan graf planar-1
   c. K_{6,n_2,n_3} dengan $n_2 \geq 2$ dan $n_2 + n_3 \geq 4$ bukan merupakan graf planar-1
   d. $K_{6,2,1}$, $K_{6,6,1}$ dan $K_{5,2,1}$ merupakan graf planar-1
   e. Jika $n_1 = 5$, $n_2 + n_3 \geq 4$, dan $n_2 \geq 2$ dan $n_2 + n_3 \geq 1$ maka K_{n_1,n_2,n_3} bukan merupakan graf planar-1
   f. Jika $n_1 = 4$, $n_2 + n_3 \geq 5$, dan $n_2 \geq 2$ dan $n_3 \geq 1$ maka K_{n_1,n_2,n_3} bukan merupakan graf planar-1
   g. $K_{4,2,2}$ atau $K_{4,2,1}$ merupakan graf planar-1
   h. K_{3,n_2,n_3} dengan $n_1 = 3$ dan $n_2 + n_3 \geq 7$ bukan merupakan graf planar-1
   i. Graf $K_{3,2,1}, K_{3,2,2}$, $K_{3,3,1}$, $K_{2,2,1}$ dan $K_{2,2,2}$ masing-masig graf planar-1
   j. Graf $K_{3,2,3}, K_{3,2,4}, K_{3,3,3}, K_{3,4,1}$ dan $K_{3,5,1}$ masing-masing bukan planar-1
4. Graf 4-partisi komplit K_{n_1,n_2,n_3,n_4}
   a. Graf K_{n_1,n_2,n_3,n_4} yang merupakan graf planar-1 yaitu:

$K_{1,1,1,1}, K_{1,2,2,2}, K_{3,1,1,1},$
$K_{3,2,1,1}, K_{4,1,1,1}, K_{5,1,1,1}, K_{6,1,1,1}$

b. Jika $n_1 \geq 7$ maka graf K_{n_1,n_2,n_3,n_4} bukan planar-1

5. Graf 5-partisi komplit K_{n_1,n_2,n_3,n_4,n_5}
   a. Graf K_{n_1,n_2,n_3,n_4,n_5} yang merupakan graf planar-1 yaitu :
      $K_{2,2,1,1,1}, K_{2,1,1,1,1}$, dan $K_{1,1,1,1,1}$
   b. Graf K_{n_1,n_2,n_3,n_4,n_5} yang bukan merupakan graf planar-1 yaitu:
      1) $K_{2,2,2,1,1}$
      2) $K_{2,2,2,2,1}$
      3) $K_{2,2,2,2,2}$
      4) $K_{3,1,1,1,1}$
      5) $K_{3,2,1,1,1}$
      6) $K_{3,2,2,1,1}$

      Kesimpulan : 4),5),6), dan 7)
      Jika $n_1 \geq 3$, maka K_{n_1,n_2,n_3,n_4,n_5} bukan planar-1

6. Graf 6-partisi komplit $K_{n_1,n_2,n_3,n_4,n_5,n_6}$
   a. Graf $K_{1,1,1,1,1,1}$ planar-1
   b. Graf $K_{n_1,n_2,n_3,n_4,n_5,n_6}$ bukan planar-1 jika $n_i \geq 2$ untuk suatu i , $1 \leq i \leq 6$

7. Graf t-partisi komplit $K_{n_1,n_2,n_3,n_4,n_5,n_6,\cdots,n_t}$ dengan $t \geq 7$ bukan planar-1

DAFTAR PUSTAKA

Budayasa, I. K. (2007). *Teori Graph dan Aplikasinya* . Surabaya: Unesa University Press-2007.

D.J.Kleitman. (1970). The crossing number of K5,n. *J. Combinat. Theory 9*, 315-323.

Ho, P. (n.d.). The crossing number of K1,5,n, K2,4,n. *Int. J*.

Jelius Czap, D. H. (2012). 1-planarity of complete multipartite graphs. *Discrete Appl. Math*, 505-512.

Korzhik, V. (2008). Minimal non-1-planar graphs. *Discrete Math*, 1319-1327.

Pratiwi, N. D. (2017). Planaritas-1 Hasil Kali Leksikografik Graf. 2-3.