

PERSAMAAN VAN DER POL DAN PENYELESAIANNYA

Laras Nelysa Putri

Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
email: larasputri@mhs.unesa.ac.id

Abstrak

Persamaan Van der Pol adalah salah satu sistem yang paling banyak dipelajari dalam kasus dinamika tak linier. Banyak upaya yang telah dilakukan untuk memperkirakan solusi dari persamaan Van der Pol, di mana solusinya berosilasi. Penelitian ini memiliki dua kasus, ketika parameter μ pada persamaan Van der Pol bernilai sangat kecil ($\mu \ll 1$) dan sangat besar ($\mu \gg 1$). Metode yang dilakukan adalah menyelesaikan persamaan Van der Pol untuk mendapatkan solusi dengan menggunakan metode averaging untuk $\mu \ll 1$ dan transformasi persamaan Lienard serta Deret pangkat untuk $\mu \gg 1$.

Kata Kunci: Persamaan Van der Pol, osilasi, metode averaging, persamaan lienard, deret pangkat.

Abstract

The Van der Pol equation is one of the most studied systems in the case of non-linear dynamics. Many attempts have been made to estimate the solution of the Van der Pol equation, where the solution oscillates. This study has two cases, when the μ parameter in the Van der Pol equation is very small ($\mu \ll 1$) and very large ($\mu \gg 1$). The method carried out in this study are to solve the Van der Pol equation to get a solution using the Averaging method for $\mu \ll 1$ and the transformation of the Lienard equation and power series for $\mu \gg 1$.

Keywords: Van der Pol equation, oscillation, averaging method, lienard equation, power series.

1. PENDAHULUAN

Persamaan Van der Pol yang mempunyai bentuk berikut

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \quad (1)$$

merupakan persamaan diferensial orde dua tak linier karena orde tertinggi dari persamaan Van der Pol adalah dua dan bentuk $(x^2 - 1)\frac{dx}{dt}$ merupakan bentuk tak linier. Model persamaan Van der Pol telah digunakan dalam bidang ilmu mesin, fisika dan biologi. Sebagai contoh yaitu modifikasi stabilitas jantung dengan persamaan Van der Pol tak linier (Nazari, Heydari, & Khaligh, 2013).

Persamaan Van der Pol adalah salah satu sistem yang paling banyak dipelajari dalam kasus dinamik tak linier. Banyak upaya yang telah dilakukan untuk memperkirakan solusi dari persamaan ini, di mana solusinya adalah osilasi (Tsatsos, 2006). Osilasi secara fisik dapat diartikan goyangan, ayunan, atau gerak berulang secara periodik (Rosha, 2013). Sejak diperkenalkan pada tahun 1920, persamaan Van der Pol adalah sebuah bentuk dasar untuk sistem dengan osilasi *limit cycle*. Sistem pengaturan klasik dari penelitian tersebut adalah osilator dengan katub yang terhubung pada vakum. Banyak penyelidikan tentang keunikan perilaku osilator Van der Pol, yang berguna sebagai model

dasar untuk proses osilasi dalam fisika, elektronik, biologi, neurologi, dan ekonomi (Tsatsos, 2006). Berdasarkan hal tersebut, persamaan Van der Pol membantu dalam penerapan sebagai model dasar dari munculnya suatu osilasi yang tereksitasi sendiri (*self-excited*) pada sistem mekanik dan aplikasinya di bidang lain. Persamaan ini memiliki keterkaitan yang berhubungan, khususnya dalam kasus yang ekstrim ketika parameter μ bernilai sangat kecil atau besar.

Jika nilai $\mu = 0$, maka persamaan Van der Pol, menjadi $\ddot{x} + x = 0$. Hal ini menunjukkan tidak ada redaman yang terjadi pada saat perubahan variabel dinamik terhadap waktu, dan solusi analitiknya adalah $x(t) = A \cos t + B \sin t$, dengan $A, B \in \mathbb{R}$ (Strogatz, 1994). Ketika $\mu > 0$, koefisien redaman $\mu(x^2 - 1)$ persamaan Van der Pol dapat bervariasi nilainya bergantung pada nilai x . Apabila $x > 1$, $\mu(x^2 - 1)$ bernilai positif, artinya persamaan Van der Pol memiliki redaman positif, yang mengeluarkan energi dari sistem dan mengakibatkan amplitudo mengecil. Sedangkan, apabila $x < 1$, $\mu(x^2 - 1)$ bernilai negatif, berarti persamaan Van der Pol memiliki redaman negatif, yang memasukkan energi ke sistem dan mengakibatkan amplitudo semakin membesar. Sehingga, penyelesaian persamaan Van der Pol berupa osilasi akibat terjadinya perubahan nilai redaman positif ke negatif, atau sebaliknya. Sedangkan dalam bidang fase, penyelesaian

persamaan Van der Pol berupa *limit cycle*. Keberadaan *limit cycle* sejalan dengan teorema Poincare-Bendixson (Strogatz, 1994). Penelitian ini akan membahas penyelesaian persamaan Van der Pol untuk kasus ketika $\mu \ll 1$ yang disebut osilator tak linier lemah dan ketika $\mu \gg 1$ yang disebut osilator relaksasi. Hal tersebut dikarenakan perubahan solusi dari persamaan Van der Pol bergantung pada μ , solusi dari persamaan tersebut akan berbeda ketika mulai $\mu = 1$, sehingga 1 dijadikan batas untuk μ yang sangat kecil dan sangat besar.

2. KAJIAN TEORI

Metode Averaging

Metode averaging atau metode rata-rata membandingkan penyelesaian asimtot dan penyelesaian analitik. Ide dari metode rata-rata berasal dari teknik komputasi yang telah diformulasikan/dibentuk dengan sangat jelas oleh Lagrange (1788) dalam studinya tentang masalah gravitasi tiga benda (*three-body problem*) sebagai gangguan dari masalah dua benda (*two-body problem*) (Verhulst, 1996).

Sebagai contoh, dimisalkan persamaan :

$$\ddot{x} + x = \mu h(x, \dot{x}), \quad \mu \ll 1 \quad (2)$$

Jika $\mu = 0$ maka solusinya adalah kombinasi linier $\cos t$ dan $\sin t$

$$a_0 \cos t + b_0 \sin t \quad (3)$$

atau dapat ditulis seperti berikut:

$$r_0 \cos(t + \psi_0) \quad (4)$$

akan diuraikan (4) sehingga diperoleh:

$$r_0(\cos t \cos \psi_0) - (\sin t \sin \psi_0)$$

$$= r_0 \cos \psi_0 \cos t - r_0 \sin \psi_0 \sin t$$

dengan $a_0 = r_0 \cos \psi_0$, dan $b_0 = -r_0 \sin \psi_0$

sehingga bentuk lain dari (3) adalah bentuk (4) di mana:

(4) memiliki r_0 yang merupakan amplitudo dan ψ_0 merupakan fase merupakan konstanta dan keduanya ditentukan oleh nilai awal. Untuk mempelajari karakter dari solusi untuk setiap $\mu \neq 0$, Lagrange mengenalkan “variasi konstan/variasi parameter”. Ada sebuah asumsi, bahwa untuk setiap $\mu \neq 0$, maka solusinya berbentuk fungsi waktu.

Langkah pertama adalah menentukan penyelesaian umum dari persamaan (2) dengan menggunakan persamaan karakteristik di mana diperoleh (3) atau (4). Dari persamaan (3) dimisalkan penyelesaian khususnya yaitu

$$x(t) = a_0(t) \cos t + b_0(t) \sin t \quad (5)$$

dengan menurunkan (5) diperoleh:

$$\dot{x}(t) = -a_0(t) \sin t + b_0(t) \cos t + \dot{a}_0(t) \cos t + \dot{b}_0(t) \sin t \quad (6)$$

Selanjutnya dipilih dua suku terakhir pada ruas kanan persamaan (6) sama dengan nol,

$$\dot{a}_0(t) \cos t + \dot{b}_0(t) \sin t = 0 \quad (7)$$

Sehingga persamaan (7) menjadi:

$$\dot{x}(t) = -a_0(t) \sin t + b_0(t) \cos t. \quad (8)$$

(Prawoto, 2015)

Berdasarkan (4) maka bentuk lain dari (5) adalah

$$x(t) = r(t) \cos(t + \psi(t)). \quad (9)$$

Kemudian, (9) akan diturunkan untuk mendapatkan nilai $\dot{x}(t)$ sebagai berikut:

$$\dot{x}(t) = -r(t) \sin(t + \psi(t)) (1 + \dot{\psi}) + \dot{r} \cos(t + \psi(t))$$

$$\dot{x}(t) = -r(t) \sin(t + \psi(t)) - \dot{\psi} \sin(t + \psi(t))$$

$$+ \dot{r} \cos(t + \psi(t))$$

Berdasarkan (7) maka turunan dari (9) dipilih dua suku terakhir pada ruas kanan sama dengan nol

$$-\dot{\psi} \sin(t + \psi(t)) + \dot{r} \cos(t + \psi(t)) = 0$$

Sehingga diperoleh :

$$\dot{x}(t) = -r(t) \sin(t + \psi(t)) \quad (10)$$

Substitusi untuk setiap x dan $\dot{x}$ atau (9) dan (10) ke persamaan (2) sehingga dihasilkan persamaan untuk setiap r dan ψ

$$-\dot{r} \sin(t + \psi) - r \cos(t + \psi) (1 + \dot{\psi}) + r \cos(t + \psi) = \mu h(r \cos(t + \psi), -r \sin(t + \psi))$$

Atau dapat ditulis :

$$-\dot{r} \sin(t + \psi) - r \cos(t + \psi) \dot{\psi} = \mu h(r \cos(t + \psi), -r \sin(t + \psi)) \quad (11)$$

Persyaratan yang lainnya yaitu penurunan pada sisi kanan persamaan (9) harus menghasilkan pernyataan yang sama dengan sisi kanan persamaan (10). Sehingga didapatkan:

$$\dot{r} \cos(t + \psi) - r \sin(t + \psi) (1 + \dot{\psi}) = -r \sin(t + \psi)$$

atau dituliskan:

$$\dot{r} \cos(t + \psi) - \dot{\psi} r \sin(t + \psi) = 0. \quad (12)$$

Persamaan (2.24) dan (2.25) dapat dianggap sebagai dua persamaan untuk $\dot{r}$ dan $\dot{\psi}$, sebagai berikut:

$$\dot{r} = -\mu \sin(t + \psi) h(r \cos(t + \psi), -r \sin(t + \psi)) \quad (13)$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\mu}{r} \cos(t + \psi) h(r \cos(t + \psi), -r \sin(t + \psi)) \quad (14)$$

Deret Pangkat

Pada metode ini, akan digunakan untuk mencari solusi analitik persamaan Van der Pol dengan kasus $\mu \gg 1$. Metode Deret pangkat merupakan metode dasar untuk menyelesaikan persamaan diferensial linier dengan koefisien yang berubah. Diberikan bentuk persamaan Deret pangkat sebagai berikut:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} h_k(x) \mu^k \quad (15)$$

yang apabila dijabarkan akan menjadi

$$f_n(x) = h_0(x) + h_1(x)\mu + h_2(x)\mu^2 + \dots + h_n(x)\mu^n \quad (16)$$

di mana $f_n(x)$ merupakan fungsi deret suku ke- n dan h_k adalah koefisien deret suku ke- n dari variabel x . Kemudian bentuk (15) akan disubstitusikan ke dalam persamaan diferensial, dalam kasus ini yaitu persamaan Van der Pol sehingga diperoleh:

$$f(x, \mu) = h_n(x) \frac{dh_n(x)}{dx} - \mu(1 - x^2)h_n(x) + x \quad (17)$$

Selanjutnya bentuk (17) akan diekspansi taylor hingga orde n sebagai berikut:

$$f_n(x, \mu) = f(x, 0) + \frac{\partial f}{\partial \mu}(x, 0)\mu + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2}(x, 0)\mu^2 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial \mu^n}(x, 0)\mu^n, \quad (18)$$

dengan menggunakan bentuk (18) akan dicari solusi dengan pendekatan menggunakan metode Deret pangkat sehingga diperoleh fungsi deret seperti pada bentuk (16) yang nantinya merupakan solusi analitik dari persamaan diferensial tersebut.

3. PEMBAHASAN

Solusi Persamaan Van der Pol

Penyelesaian Persamaan Van der Pol Menggunakan Metode Averaging

Pada penyelesaian ini, penulis akan menunjukkan untuk kasus $\mu \ll 1$. Kasus tersebut sering dikatakan osilator tak linier lemah.

Diberikan sistem,

$$\ddot{x} + x + \mu h(x, \dot{x}) = 0, \text{ dimana } 0 \leq \mu \ll 1 \quad (19)$$

dengan catatan ketika $\mu = 0$, solusi dari (19) sebagai berikut:

$$x(t) = r \cos(t + \psi) \quad (20)$$

dengan r, ψ adalah amplitudo dan fase yang merupakan konstanta. Sedangkan ketika $\mu \neq 0$, diharapkan terjadi pergeseran secara lambat dari r dan ψ yang akan bergeser sedemikian hingga mendekati *limit cycle*. Sekarang akan dicari persamaan evolusi dari amplitudo dan fase yang memberikan pengaruh pada suku tak linier yaitu $h(x, \dot{x})$. Dapat dipastikan bahwa nilai μ sangat kecil sehingga trajektori yang dihasilkan akan mendekati bentuk lingkaran secara utuh dan akan memiliki periode sekitar 2π .

Sekarang, dimisalkan

$$x(t) = r(t) \cos(t + \psi(t)) \quad (20)$$

Berdasarkan persamaan (19) akan dicari persamaan

$\dot{r}$ dari persamaan Van der Pol, dengan

$\dot{r} = -\sin(t + \psi) h(x, \dot{x})$ di mana $h(x, \dot{x}) = \dot{x}(x^2 - 1)$ diambil dari persamaan (1).

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\mu \sin(t + \psi) (-r \sin(t + \psi) (r^2 \cos^2(t + \psi) - 1)) \\ \dot{r} &= \mu r \sin^2(t + \psi) r^2 \cos^2(t + \psi) - \mu r \sin^2(t + \psi). \end{aligned} \quad (21)$$

Dilakukan dengan cara yang sama, berdasarkan (20) akan dicari persamaan $\dot{\psi}$ dari persamaan Van der Pol, dengan

$$\dot{\psi} = -\frac{\mu}{r} \cos(t + \psi) h(x, \dot{x})$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= -\frac{\mu}{r} \cos(t + \psi) (-r \sin(t + \psi) (r^2 \cos^2(t + \psi) - 1)) \\ \dot{\psi} &= -\mu r \cos^3(t + \psi) \sin(t + \psi) + \mu \cos(t + \psi) \sin(t + \psi). \end{aligned} \quad (22)$$

Hal berikutnya yang akan dilakukan yaitu memanfaatkan pemisahan skala waktu dari persamaan evolusi yaitu osilasi cepat dengan penyimpangan lambat. Tujuan utamanya adalah untuk memperbaiki osilasi cepat menggunakan metode averaging di mana lebih dari satu *cycle* dengan panjang 2π dalam satu osilasi, sehingga dapat diketahui keterikatan eksplisit dari persamaan evolusi pada μ .

Berdasarkan definisi 1 dan teorema 2, maka diberikan $\dot{r}_a(t)$ dan $\dot{\psi}_a(t)$ di mana index a didefinisikan sebagai pendekatan nilai r dan ψ oleh r_a dan ψ_a , sebagai berikut

$$\begin{aligned} \dot{r}_a &= \frac{1}{2\pi} \int_{t-\pi}^{t+\pi} \dot{r} dt \\ \dot{\psi}_a &= \frac{1}{2\pi} \int_{t-\pi}^{t+\pi} \dot{\psi} dt \end{aligned}$$

Sehingga akan dicari nilai $\dot{r}_a$ pada persamaan (21) sebagai berikut

$$\begin{aligned} \dot{r}_a &= \frac{1}{2\pi} \left(\left(\mu r^3 \int_0^{2\pi} \sin^2(t + \psi) \cos^2(t + \psi) dt - \left(\mu r \int_0^{2\pi} \sin^2(t + \psi) dt \right) \right) \right. \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\left(\mu r^3 \int_0^{2\pi} \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos 4(t + \psi) dt - \left(\mu r \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2(t + \psi) dt \right) \right) \right. \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\mu r^3 \int_0^{2\pi} \frac{1}{8} dt - r^3 \int_0^{2\pi} \frac{1}{8} \cos(4t + 4\psi) dt - \mu r \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} dt + \mu r \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cos(2t + 2\psi) dt \right) \\ &= \mu \left(\frac{2\pi r^3}{16\pi} - \frac{r^3}{64\pi} \sin(8\pi + 4\psi) + \frac{r^3}{64\pi} \sin(4\psi) - \frac{2\pi r}{4\pi} + \frac{r}{8\pi} \sin(4\pi + 2\psi) - \frac{r}{8\pi} \sin(2\psi) \right) \\ &= \mu \left(\frac{r^3}{8} - \frac{2r}{2} \right) \\ &= \frac{\mu r}{8} (4 - r^2) \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\dot{r}_a = \frac{\mu r}{8} (4 - r^2) \quad (23)$$

Kemudian akan dicari nilai $\dot{\psi}_a$ pada persamaan (22) sebagai berikut

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_a &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -r \cos^3(t + \psi) \sin(t + \psi) + \mu \cos(t + \psi) \sin(t + \psi) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} -r \cos^3(t + \psi) d(\cos(t + \psi)) + \int_0^{2\pi} \cos(t + \psi) d(\cos(t + \psi)) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} ((-r \sin^3(2\pi + \psi) + \sin^3(0 + \psi)) + (\sin(2\pi + \psi) - \sin(0 + \psi))) \\ &= \frac{1}{2\pi} (0 + 0) = 0 \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\dot{\psi}_a = 0 \quad (24)$$

maka $\psi(t) = \mathcal{O}(\mu^2)$ yang berarti orde dari μ sebagai solusinya. Sedangkan, berdasarkan hasil pada (23) akan

dicari solusi persamaan diferensial $\dot{r}_a$ dengan menggunakan metode pemisahan variabel sebagai berikut:

$$\frac{\mu r}{8}(4-r^2) = \frac{dr}{dt}$$

$$\int \mu dt = \int \frac{8}{r(4-r^2)} dr$$

kemudian memanfaatkan metode integral pada fungsi pecahan, diperoleh bentuk integral berikut yang lebih sederhana

$$\mu t + c = \int \frac{2}{r} dr + \int -\frac{1}{2+r} dr + \int \frac{1}{2-r} dr$$

$$\mu t + c = \ln r^2 - \ln(2+r) - \ln(2-r)$$

$$-\mu t + c = -\ln r^2 + \ln(2+r) + \ln(2-r)$$

$$-\mu t + c = -\ln r^2 + \ln(2+r)(2-r)$$

$$-\mu t + c = -\ln r^2 + \ln(4-r^2)$$

$$-\mu t + c = \frac{\ln(4-r^2)}{\ln r^2}$$

$$e^{-\mu t + c} = \frac{4}{r^2} - 1$$

$$e^{-\mu t} e^c = \frac{4}{r^2} - 1$$

$$ce^{-\mu t} + 1 = \frac{4}{r^2}$$

$$r^2 = \frac{4}{1 + ce^{-\mu t}}$$

$$r = \frac{2}{\sqrt{1 + ce^{-\mu t}}}$$

Jika $t = 0$ maka $r(0) = 1$ maka

$$r(t) = \frac{2}{\sqrt{1 + 3e^{-\mu t}}} \quad (25)$$

Berdasarkan sistem (20) didapatkan solusi pada persamaan Van der Pol menggunakan metode Averaging dengan $\mu \ll 1$ sebagai berikut:

$$x(t) = \frac{2}{\sqrt{1 + 3e^{-\mu t}}} \cos t + \mathcal{O}(\mu) \quad (26)$$

Sebelumnya telah diperoleh bahwa $\psi(t) = \mathcal{O}(\mu)$, berdasarkan hal tersebut dapat diketahui bahwa ψ berubah pada skala waktu yang sangat lambat. Dengan begitu didapatkan periode persamaan Van der Pol yaitu $2\pi + \mathcal{O}(\mu)$.

Penyelesaian Persamaan Van der Pol Menggunakan Persamaan Lienard dan Deret pangkat

Pada penyelesaian ini, penulis akan menunjukkan untuk kasus $\mu \gg 1$. Kasus tersebut sering dikatakan osilator relaksasi. Metode yang digunakan yaitu untuk penyelesaian analitik pada kasus ini, akan digunakan metode Deret pangkat.

Diketahui fungsi deret untuk solusi persamaan Van der Pol sebagai berikut:

$$f_n(x, \mu) = f(x, 0) + \frac{\partial f}{\partial \mu}(x, 0)\mu + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2}(x, 0)\mu^2 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial \mu^n}(x, 0)\mu^n, \quad (27)$$

di mana untuk persamaan Van der Pol, maka

$$f(x, \mu) = h_n(x) \frac{dh_n(x)}{dx} - \mu(1-x^2)h_n(x) + x \quad (28)$$

untuk orde nol (μ^0), langkah pertama dengan mensubstitusikan nol pada parameter μ sehingga bentuk (28) akan menjadi

$$f(x, 0) = h_0(x) \frac{dh_0(x)}{dx} - 0(1-x^2)h_0(x) + x \quad (29)$$

maka diperoleh:

$$h_0(x) \frac{dh_0(x)}{dx} + x \quad (30)$$

dengan mengintegral persamaan (30) sehingga didapatkan bentuk

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{h_0(x)^2 + x^2}{2} \right] = 0. \quad (31)$$

Berdasarkan persamaan kartesius yaitu $x^2 + y^2 = c^2$ maka bentuk (31) dapat diubah menjadi

$$\frac{h_0(x)^2 + x^2}{2} = A^2 \quad (32)$$

di mana, A = konstanta

sehingga diperoleh:

$$h_0(x)^2 + x^2 = A^2$$

$$h_0(x)^2 = A^2 - x^2$$

$$h_0(x) = \pm \sqrt{A^2 - x^2} \quad (33)$$

maka

$$f_0(x) = \pm \sqrt{A^2 - x^2}. \quad (34)$$

Untuk orde satu (μ^1), diberikan fungsi linier dari parameter sebagai berikut:

$$f_1(x) = h_0(x) + h_1(x)\mu \quad (35)$$

Dengan mensubstitusikan bentuk (33) ke dalam bentuk (35) diperoleh

$$f_1(x) = \pm \sqrt{A^2 - x^2} + h_1(x)\mu \quad (36)$$

untuk mencari $h_1(x)$ dapat diperoleh dari fungsi deret pada bentuk (4.24) sehingga diperoleh

$$f_1(x, \mu) = f(x, 0) + \frac{\partial f}{\partial \mu}(x, 0)\mu \quad (37)$$

Kemudian mensubstitusikan (28) ke (37) menjadi

$$= \left(\sqrt{A^2 - x^2} \frac{d\sqrt{A^2 - x^2}}{dx} + x \right) + \left(\sqrt{A^2 - x^2} \frac{dh_1(x)}{dx} - \mu(1-x^2)\sqrt{A^2 - x^2} + x \right)$$

$$= 0 + \left(\sqrt{A^2 - x^2} \frac{dh_1(x)}{dx} - (1-x^2)\sqrt{A^2 - x^2} + x \right)$$

$$\sqrt{A^2 - x^2} \frac{dh_1(x)}{dx} - x = (1-x^2)\sqrt{A^2 - x^2}$$

$$\sqrt{A^2 - x^2} \left(\sqrt{A^2 - x^2} \frac{dh_1(x)}{dx} - x \right) = \sqrt{A^2 - x^2} (1 - x^2) \sqrt{A^2 - x^2}$$

$$A^2 - x^2 \frac{dh_1(x)}{dx} - h_1(x)x = (1-x^2)(A^2 - x^2)$$

Untuk memperoleh nilai $h_1(x)$, digunakan metode faktor integrasi dengan memisalkan $h_1(x) = y$, sebagai berikut:

$$A^2 - x^2 \frac{dy}{dx} - xy = (1-x^2)(A^2 - x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{x}{A^2 - x^2} y = (1-x^2) \quad (38)$$

Diberikan $\varepsilon = e^{\int p dx}$, dimana ε merupakan variabel integrasi yang dijalankan pada bentuk (38) sedangkan untuk p merupakan koefisien pada y , kemudian diperoleh

$$\varepsilon = e^{\int p dx}$$

$$\varepsilon = e^{\int -\frac{x}{A^2-x^2} dx}$$

$$\varepsilon = e^{\int -\frac{x}{A^2-x^2} dx}$$

$$\varepsilon = e^{\frac{1}{2}\ln(A^2-x^2)}$$

$$\varepsilon = (A^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

Mengkalikan ε pada bentuk (38)

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} - \varepsilon \frac{x}{A^2 - x^2} y = \varepsilon(1 - x^2)$$

menjadi

$$y(A^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \int (A^2 - x^2)(1 - x^2) dx$$

$$y(A^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}(A^4 - 4A^2) \arcsin \frac{x}{|A|}$$

$$+ \sqrt{A^2 - x^2}(2x^3 + (-A^2 - 4)x) + c$$

$$y = \frac{1}{8} \left(\frac{A^2(A^2 - 4)}{\sqrt{A^2 - x^2}} \arcsin \frac{x}{|A|} - 2x^3 + xA^2 + 4x + \frac{c}{\sqrt{A^2 - x^2}} \right)$$

karena, sebelumnya telah dimisalkan $h_1(x) = y$ maka diperoleh $h_1(x)$ sebagai berikut: $h_1(x) =$

$$\frac{1}{8} \left(\frac{A^2(A^2 - 4)}{\sqrt{A^2 - x^2}} \arcsin \frac{x}{|A|} - 2x^3 + xA^2 + 4x + \frac{\pm C}{\sqrt{A^2 - x^2}} \right) \quad (39)$$

dimana A merupakan konstanta dan C konstanta dari integral. Dengan memisalkan $A^2 = 4$ dan $\pm C = 0$, maka diperoleh

$$h_1(x) = x - \frac{x^3}{4} \quad (40)$$

Demikian diperoleh solusi analitik pada orde satu dengan pendekatan pada μ , yang merupakan solusi analitik persamaan Van der Pol dengan $\mu \gg 1$

$$f_1(x) = \pm \sqrt{4 - x^2} + \left(x - \frac{x^3}{4}\right) \mu \quad (41)$$

Sekarang akan diestimasi periode dari *limit cycle* untuk persamaan Van der Pol dengan $\mu \gg 1$. Solusinya, diberikan T yang merupakan periode di mana hanya waktu yang dibutuhkan untuk melakukan pergerakan sepanjang dua arus yang lambat, karena waktu yang dihabiskan dalam setiap arus yang cepat atau disebut sebagai lompatan tersebut diabaikan untuk $\mu \gg 1$. Karena sepanjang dua arus lambat tersebut simetri maka waktu yang dihabiskan untuk masing-masing arus adalah sama.

Dengan begitu digunakan $T = 2 \int_{t_A}^{t_B} dt$.

$$T = 2 \int_{t_A}^{t_B} dt \approx -2 \int_1^2 \frac{dt}{dw} \frac{dw}{dx} dx$$

$$T \approx \frac{1}{w} (\mu(x^2 - 1)) dx$$

$$T \approx -2 \int_1^2 -\frac{1}{x} \mu(x^2 - 1) dx$$

$$T = 2\mu \left(\frac{3}{2} - \ln 2\right)$$

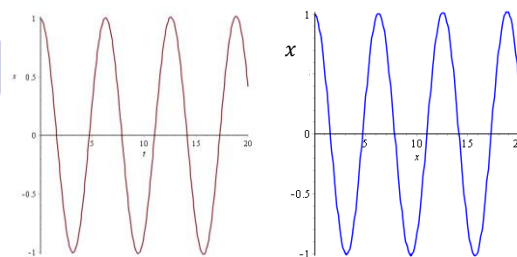
sehingga, periode yang dibutuhkan yaitu sebesar

$$T = \mu(3 - 2 \ln 2). \quad (42)$$

Simulasi

Simulasi dilakukan menggunakan *Maple 18*. Simulasi pada penelitian ini bertujuan untuk mengetahui perubahan pergerakan dari solusi analitik yang telah diperoleh. Simulasi solusi persamaan Van der Pol dengan menjalankan parameter $\mu \ll 1$ pada sistem (26) yaitu:

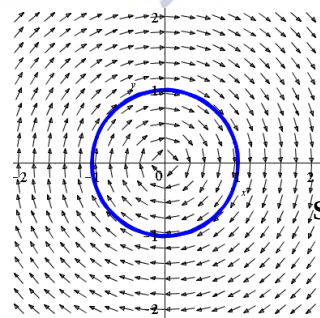
$$x(t) = \frac{2}{\sqrt{1 + 3e^{-\mu t}}} \cos t + \mathcal{O}(\mu).$$



(i) Solusi Numerik (ii) Solusi Analitik

Gambar 1. Kurva x terhadap t untuk Persamaan Van der Pol $\mu = 0.003$

Pada gambar1 merupakan solusi persamaan Van der Pol dengan $\mu \ll 1$ di mana diambil μ sebesar 0.003 dengan kondisi awal $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$. Berdasarkan hal tersebut diperoleh kurva x terhadap t yang mengalami penurunan serta peningkatan nilai secara bergantian pada selang waktu tertentu seiring dengan meningkatnya t . Solusi yang awalnya lebih kecil ini secara bertahap meningkat di mana mengakibatkan masing-masing dari osilasi tersebut mencapai batas osilasi tertentu. Gambar 1 (i) merupakan solusi numerik yang diperoleh dengan bantuan *Maple 18*. Sedangkan untuk Gambar 1 (ii) merupakan solusi analitik dari penyelesaian persamaan Van der Pol yaitu sistem (1) ketika dengan $\mu = 0.003$, dari kedua gambar tersebut dapat dilihat bahwa solusi analitik yang telah diperoleh mendekati sempurna dengan solusi numerik.

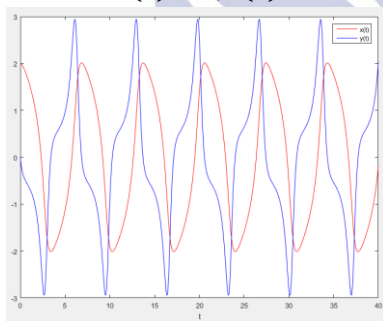


Gambar 2. Potret Fase Persamaan Van der Pol $\mu = 0.003$

Pada gambar 2 ini sejalan dengan teorema *Poincare Bedixson* di mana solusinya akan berada di dalam S , karena vektor kecepatan menuju ke interior S searah jarum jam. Seiring berjalannya waktu, solusinya tidak pernah dapat meninggalkan S , bahkan ketika mendekati kurva batas, di mana mencoba menjauh dari S , vektor-vektor kecepatan selalu menuju ke dalam, memaksa untuk tetap berada di dalam S .

Karena solusinya tidak pernah bisa meninggalkan S , satu-satunya hal yang dapat dilakukan sebagai $t \rightarrow \infty$ adalah mendekati titik kritis atau berputar-putar menuju *closed trajectory*.

Berikutnya yaitu simulasi solusi persamaan Van der Pol dengan menjalankan parameter $\mu \gg 1$ pada persamaan (1) menggunakan *Matlab R2015b*. Berdasarkan analisis sebelumnya, menunjukkan bahwa pada *limit cycle* persamaan Van der Pol dengan $\mu \gg 1$ ini memiliki dua skala waktu yang terpisah yaitu ketika pergerakan cepat atau dapat disebut sebagai lompatan yang dapat dilihat pada gambar 3 ($x(t)$) dan pergerakan lambat yang dapat dilihat pada gambar 3 ($y(t)$), di mana diperoleh dari persamaan Van der Pol untuk $\mu = 1.25$ dengan kondisi awal $x(0) = 2, \dot{x}(0) = 0$

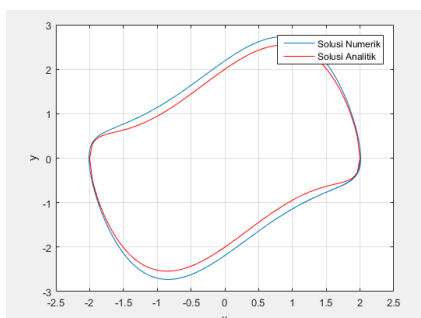


Gambar 3 Bentuk Gelombang Persamaan van der Pol x dan y terhadap t dengan $\mu = 1.25$

Kemudian dengan menggunakan solusi analitik yang telah diperoleh pada sistem (41) yaitu:

$$f_1(x) = \pm\sqrt{4-x^2} + \left(x - \frac{x^3}{4}\right)\mu$$

akan dibandingkan dengan solusi numerik menggunakan *Matlab R2015b* sebagai berikut:



Gambar 4 Perbandingan Solusi Numerik dan Solusi Analitik $\mu = 1.25$

Pada Gambar 4 diketahui bahwa solusi analitik yang telah diperoleh dengan $\mu \gg 1$ mendekati solusi numerik, terdapat dua fase yang terbentuk dari kedua solusi tersebut. Perubahan yang sedikit menjauh terletak pada kondisi pergerakan lambat, sedangkan untuk pergerakan cepat kedua solusi tersebut hampir mendekati sempurna. Hal tersebut yang menjadikan pembeda untuk $\mu \ll 1$ dan $\mu \gg 1$ pada gambar 4 di mana kurva memanjang pada sumbu y . Sehingga bentuk solusi pada persamaan Van der Pol ini dibedakan menjadi dua kasus karena dipengaruhi oleh parameter μ .

4. PENUTUP

Simpulan

Berdasarkan pembahasan dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

Penyelesaian persamaan Van der Pol untuk $\mu \ll 1$ (osilator tak linier lemah) dengan menggunakan metode Averaging diperoleh $x(t) = \frac{2}{\sqrt{1+3e^{-\mu t}}} \cos t + \mathcal{O}(\mu^2)$ dan didapatkan periode sebesar $2\pi + \mathcal{O}(\mu^2)$

Penyelesaian persamaan Van der Pol untuk $\mu \gg 1$ (osilator relaksasi) dengan menggunakan transformasi persamaan Lienard dan Deret pangkat diperoleh $f_1(x) = \pm\sqrt{4-x^2} + \left(x - \frac{x^3}{4}\right)\mu$ serta didapatkan periode sebesar $T = \mu(3 - 2 \ln 2)$.

Hasil dari simulasi kedua kasus yang diperoleh yaitu, ketika $\mu \ll 1$ solusi analitik tepat mendekati solusi numerik sehingga dapat memilih μ dengan bebas dari $\mu \ll 1$. Sedangkan untuk $\mu \gg 1$ solusi analitik yang mendekati solusi numerik ketika $\mu \gg 1$ tidak terlalu besar atau tidak terlalu jauh dari 1, hal tersebut dikarenakan solusi analitik yang diperoleh adalah orde satu, sehingga ketika μ sangat besar, solusi analitik yang di peroleh tidak mendekati solusi numerik.

DAFTAR PUSTAKA

- Nazari, S., Heydari, A., & Khaligh, J. (2013). Modified Modeling of the Heart by Applying Nonlinear Oscillators and Designing Proper Control Signal. *Scientific Research*, 4, 972-978.
- Prawoto, B. P. (2015). *Persamaan Diferensial Biasa*. Surabaya: Jurusan Matematika Unesa.
- Rosha, M. (2013). Kajian Metode Linstedt-Poincare dan Van de Pol Pada Solusi Masalah Osilasi Non

Linear. *Prosiding Semirata Fmipa Universitas Lampung*, 1.

Strogatz, S. H. (1994). *Nonlinear Dynamics and Chaos*. New York: Perseus Book.

Syihabuddin, B., & Ali, E. (2015). *Osilator*. Retrieved from Telkom University:
https://www.pdfpit.com/view?t=Osilator&u=http%3A%2F%2Ffebridifanfx.student.telkomuniversity.ac.id%2Ffiles%2F2015%2F10%2F10_Osilator-v03s1.pdf

Tsatsos, M. (2006). Theoretical and Numerical Study of the Van der Pol equation. *Aristoteles University*(Disertation), 3.

Verhulst, F. (1996). *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Berlin: Springer.

