MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika *Volume 8 No.1 Tahun 2020*
ISSN 2716-506X

SEGITIGA PELANGI PADA PEWARNAAN-SISI GRAF

Annisa Ajeng Kusumastuti
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : annisakusumastuti16030214041@mhs.unesa.ac.id

I Ketut Budayasa
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail **:** ketutbudayasa@yahoo.com

Abstrak

Graf yang digunakan dalam tulisan ini adalah graf sederhana dan berhingga. Misalkan $G = (V(G), E(G))$ adalah graf. Pewarnaan-sisi pada G adalah sebuah pemetaan $C : E(G) \to \mathbb{N}$, dimana $\mathbb{N}$ adalah himpunan bilangan asli. Dalam kasus pewarnaan-sisi ini setiap dua sisi yang terkait pada titik yang sama boleh mendapat warna yang sama. Subgraf H dari graf G dengan pewarnaan-sisi C disebut subgraf pelangi jika semua sisi H mempunyai warna berbeda. Tulisan ini fokus pada graf yang memiliki subgraf berupa segitiga atau C_3. Dalam skripsi ini diperoleh beberapa syarat cukup bagi suatu pewarnaan-sisi pada graf sedemikian hingga memuat segitiga pelangi. Misalkan G adalah sebuah graf dengan n titik, m sisi, dan Cadalah sebuah pewarnaan-sisi dari G. Kita buktikan bahwa jika $c(G) \geq \frac{n(n+1)}{2} - m$, maka G memuat segitiga pelangi. Kita juga buktikan bahwa jika $\sum_{v \in V(G)} d^c(v) \geq \frac{n(n+1)}{2}$, maka G memuat segitiga pelangi. Akhirnya, kita buktikan bahwa jika n ganjil dan $d^c(v) \geq \frac{n}{2}$ untuk setiap $v \in V(G)$, maka G memuat segitiga pelangi.

Kata Kunci: Pewarnaan-sisi, segitiga pelangi, syarat cukup.

Abstract

All graphs considered in this paper are finite and simple graphs. Let $G = (V(G), E(G))$ be a graph. The edge-coloring of G is a mapping of $C : E\ (G) \to \mathbb{N}$, where $\mathbb{N}$ is the set of natural number. Note that in this kind of edge-coloring two distinct edges of G that are incident with the same vertex can have the same color. Respect to this coloring of G, a subgraph H of G is called a rainbow subgraph if all of its edges have different color. This paper is focus on the graphs that contain triangle subgraph. We consider the problem of determining sufficient conditions for a graph with edge-coloring having a rainbow triangle. Let G be a graph on n vertices ,m edges, and C be an edge-coloring of G. We proof that if $c(G) \geq \frac{n(n+1)}{2} - m$, then G contains a rainbow triangle. We also proof that if $\sum_{v \in V(G)} d^c(v) \geq \frac{n(n+1)}{2}$, then G contains a rainbow triangle. Finally, we proof that if n odd and $d^c(v) \geq \frac{n}{2}$ for every $v \in V(G)$, then G contains a rainbow triangle.

Keyword: Edge-colored, rainbow triangles, sufficient conditions.

1. PENDAHULUAN

Matematika merupakan dasar dari semua bidang ilmu. Perkembangannya yang sangat pesat membuat matematika banyak diterapkan dalam kehidupan sehari-hari. Model dari matematika banyak dimanfaatkan untuk menyelesaikan berbagai permasalahan, dari yang sederhana sampai yang rumit. Sehingga matematika tidak bisa dilepas dari kehidupan. Matematika sendiri terbagi menjadi beberapa cabang ilmu, teori graf menjadi salah satunya.

Teori merupakan salah satu cabang matematika yang telah ada sejak lebih dari dua ratus tahun yang silam. Jurnal pertama dikenalkan oleh Euler seorang matematikawan terkenal dari Swiss pada tahun 1736. Karena pada awalnya teori graf kebanyakan dipakai untuk memecahkan teka-teki sehingga “kurang” signifikan dari segi matematika, namun beberapa puluh tahun terakhir ini mengalami perkembangan yang sangat pesat. (Budayasa 2007). Teori graf merupakan pasangan berurutan dari dua himpunan, yaitu himpunan titik dan himpunan sisi. Salah satu pengaplikasian pada teori graf adalah pewarnaan pada graf.

Pewarnaan pada graf terbagi menjadi pewarnaan-titik dan juga pewarnaan-sisi. Pada skripsi ini penulis akan mengkaji tentang pewarnaan-sisi graf. Sebuah pewarnaan-sisi pada graf G adalah pewarnaan semua sisi G sedemikian hingga setiap dua sisi yang terkait pada titik yang sama mendapat warna yang berbeda (Budayasa 2007). Tetapi pewarnaan-sisi pada skripsi ini setiap dua sisi yang terkait pada titik yang sama boleh mendapat warna yang sama. Pengaplikasian pewarnaan-sisi di kehidupan adalah untuk menentukan minimum frekuensi untuk mengoperasikan suatu sistem komunikasi, mengkontrusi bujur sangkar latin yang banyak digunakan dalam bidang statistika khususnya dalam pembuatan rancangan percobaan yang valid. Sebuah subgraf H dari graf G pada pewarnaan-sisi G disebut subgraf pelangi jika semua sisi H mempunyai warna berbeda. Dalam skripsi ini akan dikaji tentang syarat cukup bagi suatu pewarnaan-sisi pada graf sedemikian hingga memuat segitiga pelangi. Graf yang digunakan dalam skripsi ini adalah graf sederhana dan berhingga.

2. KAJIAN TEORI

Berikut beberapa konsep dasar yang akan digunakan sebagai landasan pada pembahasan berikutnya.

Definisi 2.1

Graf G terdiri atas dua himpunan yaitu himpunan berhingga tak kosong $V(G)$ dari obyek-obyek yang disebut titik G dan himpunan berhingga (mungkin kosong) $E(G)$ yang anggota-anggotanya disebut sisi G sedemikian hingga setiap anggota $E(G)$ merupakan pasangan tak berurutan titik-titik G (Himpunan $V(G)$ disebut himpunan titik G, dan himpunan $E(G)$ disebut himpunan sisi G). Misalkan u dan v adalah dua titik di G dan $e = u,v$ adalah sisi di G. Kita katakan u dan v berhubungan langsung. Sebuah graf G dapat direpresentasikan dalam bentuk gambar. Titik G digambarkan dengan dot(titik kecil) dan dua titik yang dihubungkan oleh sisi digambarkan dengan ruas garis dengan titik-titik akhir di kedua titik tersebut. (Budayasa 2007).

Definisi 2.2 :

Misalkan G graf. **Jalan** di G adalah barisan berhingga (tak kosong) W= (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, ..., e_k, v_k) yang suku-sukunya bergantian titik dan sisi. Kita katakan W adalah sebuah jalan dari titik v_0 ke titik v_k, atau jalan-(v_0,v_k). Titik v_0 adalah titik awal dan v_k adalah titik akhir W. Jika semua sisi $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_k$ dalam jalan W berbeda, maka W disebut sebuah **jejak**. Jika semua titik dan sisi pada W berbeda, maka W disebut **lintasan**. Panjang lintasan terpendek yang menghubungkan dua titik katakanlah u dan v disimbolkan dengan $d(u,v)$. Sebuah jalan dengan panjang positif disebut tertutup jika titik awal dan titik akhir dari W identik (sama). Sebuah **sikel** adalah sebuah jejak tertutup yang titik awal dan semua titik internalnya berbeda. Sikel dengan panjang k disebut sikel- k , disimbolkan dengan C_k.(Budayasa 2007)

Definisi 2.3:

Pada graf berarah D. Misalkan $(u,v) \in \Gamma(D)$, u disebut titik pangkal busur (u,v), dan v disebut titik ujung busur (u,v). Selanjutnya titik v disebut **tetangga-keluar** dari u dan u disebut **tetangga-masuk** ke- v. Himpunan semua tetangga-keluar dari titik u, dilambangkan dengan $N_D^+(u)$; sedangkan himpunan semua tetangga-masuk ke titik u, dilambangkan dengan $N_D^-(u)$. **Derajat-masuk** titik v di D, dilambangkan dengan $id(v)$, adalah banyaknya busur D yang masuk ke titik v. **Derajat-keluar** titik v di D, dilambangkan dengan $od(v)$, adalah banyaknya busur D yang keluar dari titik v. Misalkan $S \subset V(D)$, sebuah subgraf berarah dari D yang dibangun oleh S, dilambangkan dengan $D[S]$. **Bilangan komponen-luar** dari titik v di graf berarah D, dilambangkan dengan $\omega_D^+(v)$, adalah banyaknya komponen $D[N^+(v)]$. Untuk dua titik $u, v \in V(D)$, kita dapat katakan u mendominasi v jika $(u,v) \in \Gamma(D)$. (Li, Ning, Xu, & Zhang, 2014)

Teorema 2.1 :

Graf nontrivial adalah bipartit jika dan hanya jika tidak memuat sikel ganjil.(Chartrand and Lesniak 1996)

Teorema 2.2 :

Jika G sebuah graf maka $\sum_{v \epsilon V(G)} d(v) = 2|E(G)|$. (Budayasa 2007)

Lemma 2.3 :

Dalamgraf bipartit G dengan n titik berlaku $|E(G)| \leq \frac{n^2}{4}$

Lemma 2.4 :

Jika G graf sederhana dengan n titik maka $|E(G)| > \frac{n^2}{4}$, maka G memuat sebuah segitiga

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Kita awali bab pembahasan ini dengan konsep pewarnaan-sisi pada graf dan konsep graf pelangi.

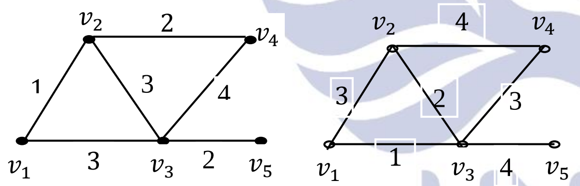
Definisi 3.1 :

Misalkan G graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Pewarnaan-sisi pada G adalah sebuah pemetaan $C : E(G) \to \mathbb{N}$, dimana $\mathbb{N}$ adalah himpunan warna (himpunan bilangan asli). Dalam kasus pewarnaan-sisi ini setiap dua sisi yang terkait pada titik yang sama boleh mendapat warna yang sama. Himpunan warna-warna yang muncul pada $E(G)$ disimbolkan dengan $C(G)$ dan $c(G) = |C(G)|$. Dalam sebuah pewarnaan-sisi C pada graf G, derajat warna titik $v \in V(G)$ dilambangkan dengan $d_G^c(v)$, didefinisikan sebagai banyak warna pada sisi G yang terkait pada v. Selanjutnya sebuah subgraf H dari G disebut subgraf pelangi jika semua sisi H mempunyai warna berbeda.

Contoh 3.1 :

Sebuah pewarnaan-sisi pada C_1 di G dengan menggunakan empat warna diperlihatkan pada Gambar 3.1(a) dan sebuah pewarnaan-sisi pada C_2 di G dengan menggunakan empat warna diperlihatkan pada 3.1(b). Dalam hal ini $C_1(G) = \{1,2,3,4\}$ dan $c_1(G) = |C_1(G)| = 4$. Perhatikan bahwa derajat warna v_1 di G adalah $d_G^{c_1}(v_1) = |\{1,3\}| = 2$. begitu juga $d_G^{c_1}(v_2) = |\{1,2,3\}| = 3$, $d_G^{c_1}(v_3) = |\{2,3,4\}| = 3$, $d_G^{c_1}(v_4) = |\{2,4\}| = 2$, dan $d_G^{c_1}(v_5) = |\{2\}| = 1$.

Sedangkan pada Gambar 3.1(b) derajat warna v_1 di G adalah $d_G^{c_2}(v_1) = |\{1,3\}| = 2$. Begitu juga $d_G^{c_2}(v_2) = |\{2,3,4\}| = 3$, $d_G^{c_2}(v_3) = |\{1,2,3,4\}| = 4$, $d_G^{c_2}(v_4) = |\{3,4\}| = 2$, dan $d_G^{c_2}(v_5) = |\{4\}| = 1$.



$\boldsymbol{G}$ $(\boldsymbol{a})$ $\boldsymbol{G}$ $(\boldsymbol{b})$

Gambar 3.1 Graf G dengan 4 warna

Perhatikan pewarnaan-sisi C_1 di graf G pada Gambar 3.1 (a), subgraf dari G yang dibangun oleh himpunan titik$\{v_2, v_3, v_4\}$ atau dilambangkan dengan $G[\{v_2, v_3, v_4\}]$ merupakan sebuah segitiga pelangi (C_3 pelangi) dan $G[\{v_1, v_2, v_3\}]$ adalah sebuah segitiga (C_3) tetapi bukan merupakan segitiga pelangi terhadap pewarnaan-sisi C_1. Tetapi terhadap pewarnaan-sisi C_2 di graf G pada Gambar 3.1(b), $G[\{v_2, v_3, v_4\}]$ maupun $G[\{v_1, v_2, v_3\}]$ masing-masing merupakan segitiga pelangi.

Teorema berikut memberikan syarat cukup bagi sebuah pewarnaan-sisi pada G sedemikian hingga memuat segitiga pelangi. Ingat bahwa banyak sisi pada G disimbolkan dengan $e(G)$.

Teorema 3.1 :

Misalkan G graf dengan n titik dan C adalah sebuah pewarnaan-sisi pada G. Jika $e(G) + c(G) \geq \frac{n(n+1)}{2}$, maka G memuat segitiga pelangi.

Bukti : (dengan kontradiksi)

Andaikan ada sebuah pewarnaan-sisi C di G dengan minimum banyak titik dan banyak sisi sedemikian hingga G tidak memuat segitiga pelangi.

Klaim 1 :

G memuat dua sisi dengan warna sama.

Bukti:

Karena $c(G) \leq e(G)$ maka $e(G) + c(G) \leq 2e(G)$…..(1)
Padahal diketahui bahwa $e(G) + c(G) \geq \frac{n(n+1)}{2}$…….(2)
Dari (1) dan (2), diperoleh

$$2e(G) \geq \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$$
atau
$$e(G) \geq \frac{n^2+n}{4} > \frac{n^2}{4}$$

Sehingga $e(G) > \frac{n^2}{4}$. Berdasarkan Lemma 2.4, G memuat sebuah segitiga. Karena pewarnaan-sisi G tidak memuat segitiga pelangi, maka ada dua sisi pada segitiga tersebut yang memiliki warna sama. Karena dua sisi pada segitiga tersebut juga berada di G maka ada dua sisi G yang punya warna sama. Klaim 1 terbukti □

Klaim 2 :

$e(G) + c(G) = \frac{n(n+1)}{2}$

Bukti:

Berdasarkan Klaim 1, ada dua sisi di G yang berwarna sama. Misalkan kedua sisi tersebut e_1 dan e_2.
Maka $c(G - e_1) = c(G)$ dan
$e(G - e_1) = e(G) - 1$.
Andaikan $e(G) + c(G) \geq \frac{n(n+1)}{2} + 1$, maka

$$\begin{aligned} e(G-e_1) + c(G-e_1) &= e(G) - 1 + c(G) \\ &= e(G) + c(G) - 1 \\ &\geq \frac{n(n+1)}{2} + 1 - 1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Sehingga $e(G - e_1) + c(G - e_1) \geq \frac{n(n+1)}{2}$
Karena G tidak memuat segitiga pelangi maka $(G - e_1)$ juga tidak memuat segitiga pelangi, hal ini bertentangan dengan minimalisasi banyak sisi G. □

Klaim 3:

$$d(v) + d_G^c(v) \geq n + 1 \text{ untuk setiap } v \epsilon V(G)$$

Bukti :

Misalkan $v \epsilon V(G)$, maka $e(G-v) = e(G) - d(v)$.
Jika warna di $C(G)$ tidak digunakan pada sisi-sisi yang terkait pada v, maka warna tersebut juga merupakan warna di $C(G-v)$. Ini berakibat bahwa $c(G-v) = c(G) - d_G^c(v)$
Andaikan $d(v) + d_G^c(v) \leq n$
Maka $e(G-v) + c(G-v) = e(G) - d(v) + c(G) - d_G^c(v)$

$$= e(G) + c(G) - \left(d(v) + d_G^c(v)\right)$$
$$\geq e(G) + c(G) - n$$
$$= \frac{n(n+1)}{2} - n$$
$$= \frac{n(n-1)}{2}$$

Karena G tidak memuat segitiga pelangi jelas bahwa $(G-v)$ tidak memuat segitiga pelangi. Hal ini bertentangan dengan minimalisasi dari banyak titik di G.□

Klaim 4:

$\sum_{v\in V(G)} d_G^c(v) \leq 2c(G)$ dan kesamaan dipenuhi jika dan hanya jika setiap dua sisi mempunyai warna berbeda.

Bukti:

Misalkan c warna sembarang di $C(G)$. Warna c terkait dengan paling banyak dua titik dan c terkait dengan tepat dua titik jika dan hanya jika c muncul hanya pada satu sisi. Sehingga $\sum_{v\in V(G)} d_G^c(v)$ tidak pernah melebihi dua kali warna G dan kesamaan dipenuhi jika dan hanya jika tiap dua sisi punya warna yang berbeda. □
Dari Klaim 3 diperoleh,
$d(v) + d_G^c(v) \geq n+1$ untuk setiap $v \in V(G)$
Sigmakan kedua ruas terhadap $v \in V(G)$ diperoleh
$\sum_{v\in V(G)}\left(d(v) + d_G^c(v)\right) \geq \sum_{v\in V(G)}(n+1) = n(n+1)$……………………………………………………..(1)

$$\sum_{v\in V(G)} \left(d(v) + d_G^c(v)\right) = \sum_{v\in V(G)} d(v) + \sum_{v\in V(G)} d_G^c(v)$$

Padahal, berdasarkan Teorema Jabat Tangan $\sum_{v\in V(G)} d(v) = 2e(G)$, sehingga diperoleh:

$$\sum_{v\in V(G)} \left(d(v) + d_G^c(v)\right) = 2\, e(G) + \sum_{v\in V(G)} d_G^c(v)$$

$\leq 2e(G) + 2c(G)$ (Berdasarkan Klaim 4)

$$= 2\left(e(G) + c(G)\right)$$

$= 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$ (Berdasarkan Klaim 2)

$= n(n+1)$…………………………………………......(2)

Dari (1) dan (2) diperoleh

$$\sum_{v\in V(G)} \left(d(v) + d_G^c(v)\right) = 2e(G) + 2c(G) = n(n+1)$$

Ekuivalen dengan,

$$\sum_{v\in V(G)} d(v) + \sum_{v\in V(G)} d_G^c(v) = 2e(G) + 2c(G)$$

Atau,

$$2e(G) + \sum_{v\in V(G)} d_G^c(v) = 2e(G) + 2c(G)$$

Sehingga,

$$\sum_{v\in V(G)} d_G^c(v) = 2c(G)$$

Berdasarkan Klaim 4, setiap dua sisi G punya warna berbeda. Hal ini bertentangan dengan Klaim 1. □
Dengan demikian teorema ini terbukti. ■

Misalkan D graf berarah dan G adalah graf dasar dari D. Andaikan C adalah pewarnaan-sisi pada G yang bersesuaian dengan pewarnaan-busur pada D.

Lemma 3.2:

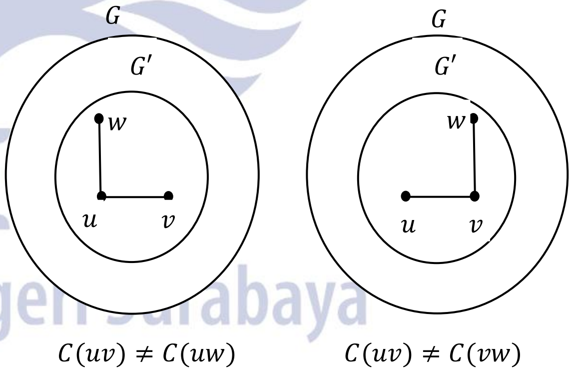
Graf berarah D memuat segitiga berarah jika dan hanya jika G memuat segitiga pelangi.

Bukti:

(→) Andaikan G tidak mempunyai segitiga pelangi. Misalkan G' adalah subgraf rentang untuk G yang memiliki banyak sisi di G' minimum.

Klaim 1:

Untuk setiap sisi $uv \epsilon E(G')$, satu dari dua pernyataan berikut benar:
(1). $C(uw) \neq C(uv)$ untuk setiap $w \in N_{G'}(u) - \{v\}$ atau
(2). $C(wv) \neq C(uv)$ untuk setiap $w \in N_{G'}(v) - \{u\}$



Gambar 3.2 Graf dengan 3 titik dan 2 sisi

Andaikan $C(uw) = C(uv)$ untuk setiap $w \in N_{G'}(u) - \{v\}$ dan $C(wv) = C(uv)$ untuk setiap $w \in N_{G'}(v) - \{u\}$
Dengan menghapus sisi uv dari G', diperoleh graf baru, namakan G_1 yang mana G_1 juga merupakan subgraf rentang G. Maka $d_{G'}^c(u) = d_{G_1}^c(u)$ dan $d_{G'}^c(v) = d_{G_1}^c(v)$.
Sehingga $\sum_{v\in V(G')} d^c(v) = \sum_{v\in V(G_1)} d^c(v) \geq \frac{n(n+1)}{2}$.
Karena G' tidak memuat segitiga pelangi, maka G_1 tidak memuat segitiga pelangi. Dengan $e(G_1) = e(G) - 1$. Hal

ini bertentangan dengan minimalisasi banyak sisi di G'. Dengan demikian Klaim 1 terbukti.□

Selanjutnya kita kontruksi G' yang berorientasi sedemikian sehingga : untuk sisi $uv \in E(G')$, jika (1) dalam Klaim 1 dipenuhi maka diberikan orientasi (arah) sisi tersebut dari v ke u; jika (2) dari Klaim 1 yang dipenuhi, maka sisi uv diberi orientasi (arah) dari u ke v; jika (1) dan (2) dalam Klaim 1 terpenuhi maka diberi orientasi (arah) sebarang pada sisi tersebut. Misalkan orientasi dari graf G' dilambangkan dengan graf berarah D. Dari pengkonstruksian dari D tersebut diperoleh klaim berikut:

Klaim 2:

Jika $(u,v) \in \Gamma(D)$, maka $C(uv)$ berbeda dengan warna-warna dari setiap warna busur yang lain yang terkait dengan v.

Selanjutnya kita buktikan klaim berikut:

Klaim 3:

Misalkan v merupakan titik di D. Jika $x,y \in N_D^+(v)$ dan $(x,y) \in \Gamma(D)$, maka $C(vx) = C(vy)$

Bukti:

Dari Klaim 2 kita peroleh $C(vx) \neq C(xy)$ dan $C(vy) \neq C(xy)$. Jika $C(vx) \neq C(vy)$, maka $vxyv$ adalah segitiga pelangi di G, kontradiksi.□

Karena D mempunyai segitiga berarah namakan (u,v,w,u). Berdasarkan Klaim 2 $C(uv) \neq C(vw)$, $C(vw) \neq C(wu)$, dan $C(wu) \neq C(uv)$. Sehingga (u,v,w,u) adalah segitiga pelangi di G.□

(⟵) dalam hal ini graf G memuat segitiga pelangi, katakanlah segitiga tersebut (u,v,w,u). Jika $D[\{u,v,w\}]$ tidak membentuk segitiga berarah pada D, maka terdapat titik, katakanlah u yang mendominasi dua titik yang lain. Ini berarti ada busur dari u ke v dan dari u ke w. Sementara titik v dan w berada pada komponen yang sama dari $D[N_D^+(u)]$. Berdasarkan Klaim 3 maka $C(uv) = C(uw)$. Akibatnya tidak memuat segitiga pelangi di G, kontradiksi □

Berdasarkan bukti dari kanan dan bukti dari kiri Lemma terbukti ■

Berdasarkan Teorema 3.1 dan Lemma 3.2, diperoleh hasil berikut

Teorema 3.3 :

Misalkan D graf berarah dengan n titik dan m busur. Jika $\sum_{v\in V(D)} \omega^+(v) \geq \frac{n(n+1)}{2} - m$, maka D memuat segitiga pelangi.

Bukti:

Jika G graf dasar dari D, maka $|E(G)| = |\Gamma(D)| = m$ dan $c(G) = \sum_{v\in V(G)} \omega^+(v)$

Sehingga $|E(G)| + c(G) = |\Gamma(D)| + \sum_{v\in V(G)} \omega^+(v)$

$$= m + \sum_{v\in V(G)} \omega^+(v)$$

$$\geq \frac{n(n+1)}{2}$$

Sehingga berdasarkan Teorema 3.1 G memuat segitiga pelangi. Berdasarkan Lemma 3.2, D memuat segitiga berarah.

Oleh karena itu teorema terbukti ■

Hasil berikut memberikan sebuah syarat cukup bagi sebuah pewarnaan-sisi pada graf sedemikian hingga graf tersebut memuat segitiga pelangi. Syarat didasarkan atas banyak titik pada graf dan derajat warna pada graf.

Teorema 3.4 :

Misalkan G graf dengan n titik. Jika pewarnaan-sisi C pada G memenuhi $\sum_{v\in V(G)} d_G^c(v) \geq \frac{n(n+1)}{2}$, maka G memuat segitiga pelangi.

Bukti:

Misalkan G memenuhi premis dalam teorema dan andaikan G tidak memuat segitiga pelangi. Misalkan G' adalah subgraf rentang dari G yang memenuhi premis dalam teorema sedemikian hingga banyak sisi G' minimum.

Klaim 1:

Untuk setiap sisi $uv \in E(G')$, satu dari pernyataan dibawah benar:

(1). $C(uw) \neq C(uv)$ untuk setiap $w \in N_{G'}(u) - \{v\}$ atau

(2). $C(wv) \neq C(uv)$ untuk setiap $w \in N_{G'}(v) - \{u\}$

Berdasarkan Lemma 3.2, Klaim 1 terbukti.□

Dari pengkonstruksian D diperoleh Klaim 2:

Klaim 2:

Jika $(u,v) \in \Gamma(D)$, maka $C(uv)$ berbeda dengan warna-warna dari setiap warna busur yang lain yang terkait ke-v.

Dari Klaim 2 kita peroleh klaim berikut:

Klaim 3:

Misalkan v merupakan titik di D. Jika $x,y \in N_D^+(v)$ dan $(x,y) \in \Gamma(D)$, maka $C(vx) = C(vy)$

Bukti:

Berdasarkan Lemma 3.2, Klaim 3 terbukti.□

Dengan menerapkan Klaim 3 secara berulang, kita dapat menyimpulkan bahwa jika H komponen dari $D[N_D^+(v)]$,

maka warna-warna busur yang terkait dengan v ke semua titik H adalah sama.
Berdasarkan Klaim 2 dan Klaim 3 kita buktikan klaim berikut:

Klaim 4:

$id(v) + \omega^+(v) \geq d^c_{G'}(v)$, untuk setiap titik $v \in V(D)$

Bukti:

Dari Klaim 2, setiap busur yang memiliki titik pangkal di v memiliki warna berbeda dari warna-warna busur yang terkait di v. Dari Klaim 3, busur-busur dari v ke titik-titik di komponen yang sama dari $D[N_D^+(v)]$ mempunyai warna yang sama, sehingga $id(v) + \omega^+(v) \geq d^c_{G'}(v)$.
Klaim terbukti.□
Misalkan $|\Gamma(D)| = a(D)$
Dari Klaim 4 diperoleh:

$$\begin{aligned} a(D) + \sum_{v \epsilon V(D)} \omega^+(v) &= \sum_{v \epsilon V(D)} id(V) + \sum_{v \epsilon V(D)} \omega^+(v) \\ &= \sum_{v \epsilon V(D)} \left(id(v) + \omega^+(v)\right) \\ &\geq \sum_{v \epsilon V(D)} d^c_{G'}(v) \\ &\geq \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Berdasarkan Lemma 3.2, graf berarah D memuat segitiga berarah, namakan $uvwu$. Berdasarkan Klaim 2: $C(uv) \neq C(vw)$, $C(vw) \neq C(wu)$, $C(wu) \neq C(uv)$. Sehingga $uvwu$ segitiga pelangi di G, kontradiksi. Dengan demikian teorema terbukti. ■

Untuk memperoleh hasil selanjutya, diperlukan dua lemma berikut:

Lemma 3.5 :

Jika $\alpha = 3 - \sqrt{7} = 0{,}3542\ldots$, maka setiap graf berarah dengan n titik dan derajat masuk minimum paling sedikit αn memuat segitiga berarah.

Bukti:

Misalkan D adalah graf berarah dengan n titik. Gunakan induksi pada n. Jelaslah Lemma 3.5 berlaku untuk $n = 3$. Sekarang asumsikan bahwa Lemma 3.5 berlaku untuk semua graf berarah dengan titik kurang dari n dan D adalah penyangkal dengan n titik.
Tanpa menghilangkan keumuman, misalkan $od(u) = r = \lceil \alpha n \rceil$ untuk setiap $u \in V$. Misalkan $N_D^+(u) = \{v \in V: (u,v) \in \Gamma\}$ dan $N_D^-(u) = \{v \in V: (v,u) \in \Gamma\}$.
Untuk setiap busur $(u,v) \in \Gamma$ dapatlah kita atur sebagai berikut:
$(u,v) \coloneqq |N_D^+(v) \backslash N_D^+(u)|$, banyaknya lintasan berarah dengan panjang dua dengan busur pertamanya adalah (u,v).
$q(u,v) \coloneqq |N_D^-(u) \backslash N_D^-(v)|$, banyaknya lintasan berarah dengan panjang dua dengan busur terakhirnya (u,v)
$t(u,v) \coloneqq |N_D^+(u) \cap N_D^+(v)|$, banyaknya segitiga transitif yang mempunyai busur (u,v) sebagai alasnya.
Kita klaim bahwa:
$n > r + id(v) + q(u,v) + (1-\alpha)t(u,v)$..................(1)
Jika $t(u,v) = 0$, maka klaim di atas benar. Karena $N_D^+(v)$, $N_D^-(v)$, dan $N_D^-(u) \backslash N_D^-(v)$ adalah himpunan pasangan-disjoin dari $r, id(v)$, dan $q(u,v)$. Jika $t(u,v) > 0$, beberapa titik $w \in N_D^+(u) \cap N_D^+(v)$ mempunyai $od(v)$ kurang dari $\alpha t(u,v)$ di subgraf berarah G yang diinduksi oleh $N_D^+(u) \cap N_D^+(v)$. (jika tidak, subgraf ini akan memuat segitiga berarah dengan minimalitas dari G). Sehingga w dihubungkan dengan paling sedikit $od(w) - p(u,v) - \alpha t(u,v)$ titik.
Misalkan $t(u,v) = r - p(u,v)$

$$\begin{aligned} w \rightarrow &\geq od(w) - p(u,v) - \alpha t(u,v) \\ &= od(v) - p(u,v) - \alpha t(u,v) \\ &= r - p(u,v) - \alpha t(u,v) \\ &= t(u,v) - \alpha t(u,v) \\ &= (1-\alpha)t(u,v) \end{aligned}$$

Titik-titik tersebut tidak di $N_D^+(v)$. Karena G tidak punya segitiga berarah, maka titik-titik ini tidak di $N_D^-(v)$ maupun di $N_D^-(u) \backslash N_D^-(v)$. Ini membuktikan klaim. Catatlah bahwa $t(u,v) = r - p(u,v)$, sehingga dapat kita tulis pertidaksamaan (1) menjadi:

$$\begin{gathered} n > r + id(v) + q(u,v) + (1-\alpha)t(u,v) \\ n > r + id(v) + q(u,v) + t(u,v) - \alpha t(u,v) \\ \alpha t(u,v) > r + id(v) + q(u,v) + t(u,v) - n \\ \alpha t(u,v) > r + id(v) + q(u,v) + r - p(u,v) - n \\ \alpha t(u,v) > 2r + id(v) + q(u,v) - p(u,v) - n \end{gathered}$$

Sigmakan kedua ruas terhadap semua busur $(u,v) \in \Gamma(D)$,
diperoleh
$\sum_{(u,v)\in\Gamma(D)} \alpha t(u,v) > \sum_{(u,v)\in\Gamma(D)} (2r + id(v) + q(u,v) - p(u,v) - n)$................................(2)
Jika t adalah banyaknya segitiga transitif di D, maka

$$\sum_{(u,v)\in\Gamma(D)} \alpha t(u,v) = \alpha t$$

Selanjutnya diperoleh

$$\sum_{(u,v)\in\Gamma(D)} (2r - n) = nr(2r - n)$$

Dan

$$\begin{aligned} \sum_{(u,v)\in\Gamma(D)} \big(id(v)\big) &= \sum_{x \in V(D)} \big(id(v)\big)^2 \\ &\geq \frac{1}{n}\left(\sum_{x\in V(D)} \big(id(v)\big)\right)^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{x\in V(D)} \big(od(v)\big)\right)^2$$
$$= \frac{1}{n}(rn)^2$$
$$= r^2 n$$

Dan

$$\sum_{(u,v)\in\Gamma(D)} \big(q(u,v) - p(u,v)\big) = 0$$

Substitusikan ke pertidaksamaan (2) diperoleh

$$\alpha t > nr(3r-n)$$

$t \leq n\binom{r}{2}$, banyaknya cakar-2 keluar di D, sehingga

$\alpha > \frac{nr(3r-n)}{t}$……………………………………….(*)

Karena $t \leq n\binom{r}{2} = n\left(r * \frac{r-1}{2}\right)$

$= nr\left(\frac{r-1}{2}\right)$……………………………………….(**)

Dari (*) dan (**) diperoleh

$$\alpha > \frac{nr(3r-n)}{nr\left(\frac{r-1}{2}\right)} = \frac{6r-2n}{r-1} > \frac{6r-2n}{r} = 6 - \frac{2n}{r}$$

Karena $r = \lceil \alpha n \rceil \rightarrow r \geq \alpha n$

$$\frac{2}{\alpha} \geq \frac{2n}{r}$$

Sehingga $\alpha > 6 - \frac{2n}{r} > 6 - \frac{2}{\alpha}$

Kalikan kedua ruas dengan α

$$\alpha^2 > 6\alpha - 2$$
$$\alpha^2 - 6\alpha + 2 > 0$$

α yang memenuhi adalah$\alpha > 3 + \sqrt{7}$ atau $\alpha < 3 - \sqrt{7}$

Bertentangan dengan $\alpha = 3 - \sqrt{7}$, sehingga lemma terbukti ■

Menurut Lemma 3.5, dibuktikan lemma berikut

Lemma 3.6 :

Misalkan D graf yang berorientasi pada n titik. Jika $id(v) + \omega^+(v) \geq \frac{n}{2}$ untuk setiap titik $v \epsilon V(D)$, maka di antara D memuat segitiga berarah atau D memuat orientasi dari $K_{n/2,n/2}$(bipartit komplet) untuk n genap.

Bukti:

Kita buktikan dengan induksi pada n. Hasilnya adalah benar ketika $n = 2$ dan 3

Kita asumsikan bahwa $n \geq 4$. Jika $id(v) \geq \alpha n$ untuk setiap titik $v \in V(D)$, dimana $\alpha = 3 - \sqrt{7} = 0{,}3542$ ..., maka ada segitiga berarah (Lemma 3.5). Dengan demikian kita anggap bahwa ada titik v sedemikian hingga

$id(v) < \alpha n$……………………………………........(1)

Catatlah bahwa $id(v) + \omega^+(v) \geq n/2$, kita punya

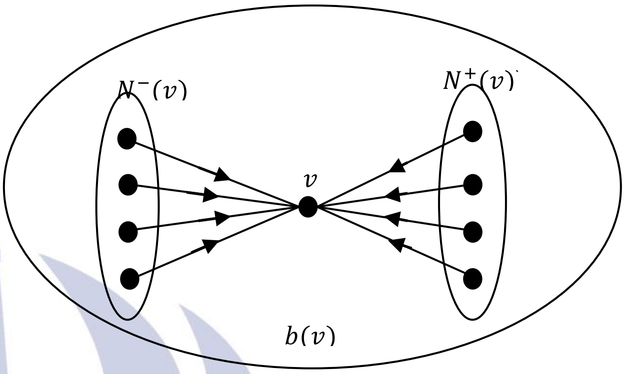
$\omega^+(v) \geq \frac{n}{2} - id(v)$…………………………………(2)

Klaim 1:

Ada komponen dari $D[N_D^+(v)]$ dengan hanya satu titik.

Bukti:

Kita gunakan $b(v)$ untuk menunjukkan banyaknya titik yang tidak berhubungan langsung ke v.Misalkan setiap komponen dari $D[N_D^+(v)]$ punya paling sedikit dua titik.



Gambar 3.3 Graf berarah dengan 9 titik dan 8 busur

Maka

$n = id(v) + od(v) + 1 + b(v) \geq id(v) + 2\omega^+(v) + 1 + b(v)$ dan $n \geq id(v) + 2\omega^+(v) + 1 + b(v)$

dari (2) diperoleh

$$b(v) \leq n - id(v) - 2\omega^+(v) - 1$$
$$\leq n - id(v) - 2\left(\frac{n}{2} - id(v)\right) - 1$$
$$\leq n - id(v) - n + 2id(v) - 1$$

$b(v) \leq id(v) - 1$…………………………………….(3)

Misalkan H menjadi subgraf berarah dari D yang diinduksi oleh $N_D^-(v)$. Jika untuk setiap titik $u \in V(H)$, $id_H(u) \geq \alpha id(v) = \alpha|V(H)|$, maka dari Lemma 3.5, ada segitiga berarah di H. Dengan demikian kita asumsikan bahwa ada titik $u \in V(H)$ sedemikian hingga $id_H(u) < \alpha id(v)$.

Pertama untuk setiap $w \in N_D^+(v), (w,u) \notin \Gamma(D)$; jika tidak $uvwu$ adalah segitiga berarah. Karena $(u,v) \in \Gamma(D)$, semua tetangga keluar u di $\{v\} \cup N_D^-(v) \cup N_D^+(v)$ ada di komponen yang sama dengan $D[N_D^+(u)]$. Setiap titik yang tidak berhubungan langsung dengan v menyumbangkan paling banyak satu dari $id(u) + \omega^+(u)$.

Dengan demikian kita punya

$$id(u) + \omega^+(u) \leq id_H(u) + 1 + b(v)$$
$$< \alpha id(v) + 1 + b(v)$$

Karena $id(u) + \omega^+(u) \geq n/2$, sehingga diperoleh

$$\frac{n}{2} < \alpha id(v) + 1 + b(v)$$

$b(v) > \frac{n}{2} - \alpha id(v) - 1$……………………………..(4)

Kombinasikan pertidaksamaan (3) dengan pertidaksamaan (4),

$$b(v) \leq id(v) - 1$$

$$b(v) > \frac{n}{2} - \alpha id(v) - 1$$

Maka diperoleh

$$\frac{n}{2} - \alpha id(v) - 1 < id(v) - 1$$

$$id(v) > \frac{n}{2(1+\alpha)} > \alpha n$$

Catatlah bahwa $2\alpha(1+\alpha) = 0{,}9594 \ldots < 1$

Bertentangan dengan (1). Klaim 1 terbukti.□

Sekarang misalkan w menjadi titik terasing dari $D[N_D^+(v)]$ dan misalkan $D' = D - \{v,w\}$

Klaim 2:

Untuk setiap titik $u \in V(D')$, $id_{D'}(u) + \omega_{D'}^+(u) \geq id(u) + \omega^+(u) - 1$

Bukti:

Kasus 2.1: Asumsikanbahwa$\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{N_D^-(v)}$.

Catatlah bahwa $wu \notin \Gamma(D)$; jika tidak $uvwu$ akan menjadi segitiga berarah. Kita punya $id_{D'}(u) = id(u)$.

Jika $(u,w) \in \Gamma(D)$, maka v dan w terletak pada komponen yang sama dalam $D[N_D^+(u)]$. Karena menghilangkan $\{v,w\}$ tidak merubah komponen-komponen dari $D[N_D^+(u)]$ yang tidak memuat v, maka diperoleh $\omega_{D'}^+(u) \geq \omega^+(u) - 1$ dan ini berakibat

$$id_{D'}(u) + \omega_{D'}^+(u) \geq id(u) + \omega^+(u) - 1$$

Kasus 2.2: Asumsikan bahwa $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{N_D^+(v) - \{w\}}$.

Karena w adalah titik terasing dari $D[N_D^+(v)]$ dan tidak berhubungan langsung dengan u. Ini berakibat $id_{D'}(u) = id(u) - 1$ dan $\omega_{D'}^+(u) = \omega^+(u)$. Oleh karena itu

$$id_{D'}(u) + \omega_{D'}^+(u) = id(u) + \omega^+(u) - 1$$

Kasus 2.3: Asumsikan bahwa $\boldsymbol{u}$ tidak berhubungan langsung dengan $\boldsymbol{v}$.

Subkasus 2.3.1 : $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{w}$ tidak saling berhubungan langsung

Maka $id_{D'}(u) = id(u)$ dan menghilangkan $\{v,w\}$ tidak merubah tetangga masuk dan keluar dari u. Diperoleh $\omega_{D'}^+(u) = \omega^+(u)$. Sehingga $id_{D'}(u) + \omega_{D'}^+(u) = id(u) + \omega^+(u)$

$$id_{D'}(u) + \omega_{D'}^+(u) \geq id(u) + \omega^+(u) - 1$$

Subkasus 2.3.2: $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) \in \boldsymbol{\Gamma(D)}$

Maka $id_{D'}(u) = id(u)$ dan menghilangkan $\{v,w\}$ tidak merubah komponen dari $D[N_D^+(u)]$ yang tidak memuat w. Diperoleh $\omega_{D'}^+(u) \geq \omega^+(u) - 1$. Sehingga

$$id_{D'}(u) + \omega_{D'}^+(u) \geq id(u) + \omega^+(u) - 1$$

Subkasus 2.3.3: $(\boldsymbol{w},\boldsymbol{u}) \in \boldsymbol{\Gamma(D)}$

Maka $id_{D'}(u) = id(u) - 1$ dan menghilangkan $\{v,w\}$ tidak merubah komponen dari $D[N_D^+(u)]$. Diperoleh $\omega_{D'}^+(u) = \omega^+(u)$. Sehingga

$$id_{D'}(u) + \omega_{D'}^+(u) = id(u) + \omega^+(u) - 1$$

Dari semua kasus diperoleh

$$id_{D'}(u) + \omega_{D'}^+(u) \geq id(u) + \omega^+(u) - 1$$

Sehingga Klaim 2 terbukti.□

Dengan pengenalan hipotesis, D' memuat segitiga berarah atau D' adalah orientasi dari $K_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}-1}$ untuk n genap. Jika D' memuat segitiga berarah, maka D juga memuat segitiga berarah. Sekarang asumsikan bahwa D' adalah orientasi dari $K_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}-1}$ untuk n genap. Misalkan $V(D') = X \cup Y$, dimana X dan Y adalah dua himpunan partisi dari graf bipartit D'.

Klaim 3:

Untuk setiap titik $u \in V(D) - \{v,w\}$, u berhubungan langsung dengan tepat satu titik dari $\{v,w\}$.

Bukti:

Jika u tidak berhubungan langsung dengan v atau w, maka $id(u) + \omega^+(u) \leq id(u) + od(u) = \frac{n}{2} - 1$, kontradiksi. Ini menyiratkan bahwa setiap titik di $V(D) - \{v,w\}$ berhubungan langsung dengan paling sedikit satu titik di $\{v,w\}$.

Sekarang misalkan sebaliknya, bahwa u berhubungan langsung dengan v dan w. Jika $(v,u) \in \Gamma(D)$ maka w dan u barada pada komponen yang sama dari $D[N_D^+(v)]$, bertentangan bahwa w adalah titik terasing dari $D[N_D^+(v)]$. Karenanya kita asumsikan bahwa $(u,v) \in \Gamma(D)$. Jika $(w,u) \in \Gamma(\mathrm{D})$, maka $uvwu$ adalah segitiga berarah. Sehingga kita asumsikan bahwa $(u,w) \in \Gamma(D)$. Tanpa menghilangkan keumuman, kita asumsikan bahwa $u \in X$.

Misalkan $y \in Y$, kita klaim bahwa $(y,u) \in \Gamma(D)$. Andaikan sebaliknya bahwa $(u,y) \in \Gamma(D)$. Karena y berhubungan langsung dengan v atau w , $\{y,v,w\}$ termuat di komponen yang sama dalam $D[N_D^+(u)]$. Ingat bahwa u berhubungan langsung dengan $\frac{n}{2} - 2$ titik selain di titik y, v, dan w . Ini berakibat bahwa $id(u) + \omega^+(u) \leq \frac{n}{2} - 1$, kontradiksi.

Oleh karena itu, kita klaim $(y,u) \in \Gamma(D)$. Jika $(v,y) \in \Gamma(\mathrm{D})$ atau $(w,y) \in \Gamma(\mathrm{D})$, maka $uvyu$ atau $uwyu$ adalah segitiga berarah.

Karenanya kita asumsikan bahwa $(v,y) \notin \Gamma(\mathrm{D})$ dan $(w,y) \notin \Gamma(\mathrm{D})$.

Ingat bahwa v,w(jika didominasi oleh y) dan u ada di komponen yang sama dalam $D[N_D^+(y)]$ dan y berhubungan langsung dengan $\frac{n}{2} - 2$ selain di titik

u, v, dan w. Ini menunjukkan bahwa $id(y) + \omega^+(y) \leq \frac{n}{2} - 1$, kontradiksi. Klaim 3 terbukti.□

Karena $id(v) + od(v) \geq id(v) + \omega^+(v) \geq \frac{n}{2}$ dan $id(w) + od(w) \geq id(w) + \omega^+(w) \geq \frac{n}{2}$, dari Klaim 3 dapat kita lihat bahwa $id(v) + od(v) = \frac{n}{2}$, dan $id(w) + od(w) = \frac{n}{2}$. Ini menunjukkan bahwa setiap titik di Dberhubungan langsung dengan tepat $\frac{n}{2}$ titik. Kita klaim bahwa untuk setiap $u \in V(D)$, $N_D^+(u)$ adalah himpunan titik independen. Jika tidak, maka ada komponen dalam $D[N_D^+(u)]$ yang memuat paling sedikit dua titik. Ini menunjukkan bahwa $\omega^+(u) < od(v)$ dan $id(u) + \omega^+(u) < n/2$, kontradiksi.

Sekarang kita klaim bahwa v tidak bisa berhubungan langsung dengan titik $x \in X$ dan titik $y \in Y$. Andaikan tidak. Jika $\{x, y, v\}$ tidak membangun segitiga berarah, maka ada titik, katakanlah x, mendominasi dua titik lainnya. Tapi pada kasus ini, $N_D^+(x)$ bukan himpunan independen, kontradiksi.

Tanpa menghilangkan keumuman, kita asumsikan bahwa v tidak berhubungan langsung dengan semua titik di Y tetapi berhubungan langsung dengan semua titik di X. Dari Klaim 3, w tidak berhubungan langsung dengan semua titik di X dan berhubungan langsung dengan semua titik di Y. Sehingga D adalah orientasi dari $K_{n/2,n/2}$. Terbukti ■

Berdasarkan Lemma 3.6, diperoleh hasil berikut

Teorema 3.7:

Misalkan C pewarnaan pada graf G dengan n titik. Jika $d^c(v) \geq \frac{n}{2}$ untuk setiap titik $v \in V(G)$ dan pewarnaan C pada G tidak memuat segitiga pelangi, maka n genap dan G adalah graf bipartit komplet $K_{n/2,n/2}$, kecuali $G = K_4 - e$ atau K_4jika $n = 4$.

Bukti:

Bukti dari teorema ini berdasarkan pada Lemma 3.6. Andaikan G tidak memuat segitiga pelangi dan $d^c(v) \geq \frac{n}{2}$ untuk setiap $v \in V(G)$. Misalkan G' adalah subgraf rentang dari G yang memenuhi kondisi dari Teorema 3.7 dengan banyak sisi sesedikit mungkin. Seperti pada bukti di Lemma 3.2 kita punya

3.7.1 :Untuk setiap sisi $uv \in E(G')$, satu dari pernyataan dibawah benar

1). $C(uw) \neq C(uv)$ untuk setiap $w \in N_{G'}(u) - \{v\}$ atau

2). $C(wv) \neq C(uv)$ untuk setiap $w \in N_{G'}(v) - \{u\}$

Sekarang kita beri orientasi ke G' seperti pada Lemma 3.2 dan Teorema 3.4, diperoleh:

3.7.2: Jika $(u, v) \in \Gamma(D)$, maka $C(uv)$ berbeda dengan warna-warna dari setiap warna busur yang lain yang terkait ke- v.

Selanjutnya kita buktikan Klaim berikut:

3.7.3: Misalkan v merupakan titik di D. Jika $x, y \in N^+(v)$ dan $(x, y) \in \Gamma(D)$, maka $C(vx) = C(vy)$

3.7.4: $id(v) + \omega^+(v) \geq d_{G'}^c(v)$, untuk setiap titik $v \in V(D)$

Dari 3.7.4, kita punya

$id(v) + \omega^+(v) \geq d_{G'}^c(v)$. Dari premis Teorema 3.7 diketahui bahwa $d^c(v) \geq \frac{n}{2}$, sehingga diperoleh $id(v) + \omega^+(v) \geq \frac{n}{2}$.

Dari Lemma 3.6, D memuat segitiga berarah atau D adalah orientasi dari graf bipartit lengkap $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$ untuk n genap. MenurutLemma 3.2, jika ada segitiga berarah di D, maka segitiga tersebut adalah segitiga pelangi di G, kotradiksi, sehingga kita asumsikan bahwa D adalah orientasi dari $G' = K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$, untuk n genap.

Untuk setiap titik $v \in V(G')$, karena $d_{G'}^c(v) \geq \frac{n}{2}$ dan $d_{G'}(v) = \frac{n}{2}$, setiap pasangan dari sisi-sisi yang terkait ke v punya warna berbeda. Catatlah bahwa G adalah supergraf rentang dari G'. Jika $n = 2$, maka $G = K_2$. Jika $n = 4$ maka $G = K_{2,2}, K_4 - e,$ atau K_4. Sekarang andaikan bahwa $n \geq 6$ dan kita akan menunjukkan bahwa tidak ada sisi di $E(G) - E(G')$. Jika tidak, maka kita asumsikan bahwa $uv \in E(G)$ dengan u, v di himpunan partisi yang sama dari graf bipartit G'. Misalkan x, y, z menjadi tiga titik di himpunan partisi lain dari G'. Karena $ux, uy,$ dan uz mempunyai sepasang warna berbeda, yaitu paling sedikit dua sisi di $\{ux, uy, uz\}$ dengan warna yang berbeda dari uv. Demikian pula ada paling sedikit dua sisi di $\{ux, uy, uz\}$ dengan warna berbeda dari uv. Karena itu baik $uvxu, uvyu,$ atau $uvzu$ adalah segitiga pelangi di G, suatu kontradiksi

Sehingga teorema terbukti ■

4. PENUTUP

Simpulan

Berdasarkan pembahasan pada tulisan ini, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

Misal C sebuah pewarnaan-sisi pada G dengan n titik dan m sisi

1. Jika $c(G) \geq \frac{n(n+1)}{2} - m$, maka G memuat segitiga pelangi
2. Jika $\sum_{v \in V(G)} d^c(v) \geq \frac{n(n+1)}{2}$, maka G memuat segitiga pelangi

3. Jika untuk setiap titik $v \in V(G)$, $d^c(v) \geq \frac{n}{2}$ dan terhadap pewarnaan C pada G tidak memuat segitiga pelangi, maka n genap dan G adalah graf bipartit komplet $K_{n/2,n/2}$, kecuali $G = K_4 - e$ atau K_4jika $n = 4$.

Ketiga kesimpulan di atas merupakan syarat cukup bagi sebuah pewarnaan-sisi graf sedemikian hingga memuat segitiga pelangi.

Saran

Dalam skripsi ini telah dibahas mengenai syarat cukup suatu pewarnaan-sisi pada graf sehingga memuat segitiga pelangi. Graf yang digunakan pada skripsi ini adalah graf sederhana dan berhingga. Secara umum syarat cukup pewarnaan-sisi pada graf lainnya sehingga memuat segitiga pelangi belum ditemukan. Oleh karena itu, penulis menyarankan kepada pembaca yang memiliki minat yang sama, dapat lebih mendalami dan mengembangkan teori-teori yang berkaitan dengan syarat cukup suatu pewarnaan-sisi pada graf sehingga memuat segitiga pelangi yang belum dibahas dalam skripsi ini.

DAFTAR PUSTAKA

Budayasa, I. K. (2007). Teori Graph dan Aplikasinya. Surabaya.

Chartrand, G., & Lesniak, L. (1996). Graphs and Digraphs (third).

Chartrand, G., & Oellermann, O. R. (1993). Applied and Algorithmic Graph Theory. New York: Singapore : McGraw-Hill, 1993.

Harris, J., Hirst, J., & Mossinghoff, M. (2008). Combinatorics and Graph Theory. 2nd Edition. In Media. https://doi.org/10.1007/978-0-387-79711-3 1

Li, B., Ning, B., Xu, C., & Zhang, S. (2014). Rainbow triangles in edge-colored graphs. *European Journal of Combinatorics*, 36(1121300), 453-459. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2013.09.007.

Marsudi. (2016). Teori Graf. Malang.

Nicosia, V., Tang, J., Musolesi, M., Russo, G., Mascolo, C., & Latora, V. (2012). Components in time-varying graphs. Chaos, 22(2). https://doi.org/10.1063/1.3697996

Shen, J. (1998). directed triangles in digraphs. *Journal of Combinatorial Theory*, *14*(1 N), 405–407.