MATH*unesa*
Jurnal Ilmiah Matematika *Volume 8 No.1 Tahun 2020*
ISSN 2716-506X

BILANGAN KROMATIK-TOTAL HASIL KALI KORONA DUA GRAF

Sabita Ellania Rahmah
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : sabitarahmah16030214024@mhs.unesa.ac.id

I Ketut Budayasa
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : ketutbudayasa@yahoo.com

Abstrak

Pewarnaan-total graf G adalah pewarnaan semua titik dan semua sisi G sedemikian hingga dua titik yang berhubungan langsung mendapat warna berbeda serta dua sisi yang terkait pada titik yang sama, baik sisi maupun titik mendapat warna berbeda. Minimum banyak warna dalam sebuah pewarnaan-total G disebut bilangan kromatik-total G, dan dinotasikan dengan $\chi_T(G)$. Untuk menentukan nilai eksak dari pewarnaan-total suatu graf dianggap sebagai masalah yang sulit dalam teori graf. Pada tulisan ini, diperoleh bilangan kromatik-total hasil kali korona dua graf G dan H, dengan $G \geq 2$ dan H adalah sikel (C_n), graf komplet (K_n), graf roda (W_n), graf bipartit, pohon (T_n), lintasan (P_n) atau graf bintang (S_n).

Kata kunci: Pewarnaan-total, bilangan kromatik-total, hasil kali korona dua graf

Abstract

Total coloring of graph G is coloring all vertices and all edges of G such that two adjacent vertices get different colors and every two distinct edges that are incident with the same vertex, the edges and the vertex get different colors. The minimum number of colors in a total coloring of G is called the total chromatic number of G, and it is denoted by $\chi_T(G)$. To determine the exact value of total coloring number of a graph is considered as a hard problem in graph theory. In this thesis, obtained the total chromatic number of corona product of two graphs G and H, with $G \geq 2$ and H is a cycle (C_n), a complete graph (K_n), a wheel graph (W_n), a bipartite graph, a tree (T_n), a path (P_n) or a star graph (S_n).

Keywords : Total coloring, total chromatic number, corona product of two graphs

1. PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang telah ada sejak lebih dari dua ratus tahun silam. Jurnal teori graf pertama kali diperkenalkan oleh matematikawan terkenal Swiss bernama Euler pada tahun 1736. Awalnya teori graf "kurang" signifikan dari segi matematika karena kebanyakan dipakai untuk memecahkan teka-teki (puzzle), namun beberapa puluh tahun terakhir ini mengalami perkembangan yang sangat pesat. Aplikasi yang sangat luas dalam kehidupan sehari-hari merupakan salah satu alasan perkembangan teori graf menjadi sangat pesat (Budayasa, 2007).

Sebuah graf G terdiri dari dua himpunan yaitu himpunan berhingga tak kosong $V(G)$ yang angota-anggotanya disebut titik dan himpunan berhingga (mungkin kosong) $E(G)$ yang angota-anggotanya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen e dalam $E(G)$ merupakan pasangan tak berurutan dari titik-titik G (Budayasa, 2007). Salah satu konsep yang dipelajari dalam teori graf adalah pewarnaan pada graf. Pewarnaan titik maupun sisi dalam graf mempunyai banyak aplikasi dalam kehidupan. Misalnya dalam pembuatan jadwal suatu kegiatan, penyimpanan komoditas tertentu yang efektif dan efisien serta pengkontruksian jaringan listrik dan sebagainya.

Dalam tulisan ini membahas pewarnaan suatu titik dan suatu sisi pada graf, yang selanjutnya disebut pewarnaan-total. Pewarnaan-total graf G adalah pewarnaan titik dan sisi G sedemikian hingga dua titik yang berhubungan langsung mendapat warna berbeda serta dua sisi yang terkait pada titik yang sama baik sisi maupun titik dimana sisi itu terkait mendapat warna berbeda. Minimum banyak warna yang digunakan untuk memperoleh sebuah pewarnaan-total pada graf G disebut bilangan kromatik-total G, dilambangkan dengan $\chi_T(G)$. Sebelumnya telah dilakukan penelitian tentang bilangan kromatik-total beberapa kelas graf oleh Sulistya (2019), sehingga dalam tulisan ini akan dilakukan penelitian lebih lanjut tentang bilangan kromatik-total yaitu bilangan kromatik-total hasil operasi graf. Operasi yang digunakan adalah operasi perkalian korona.

2. KAJIAN TEORI

Definisi 2.1: Graf G terdiri dari dua himpunan yaitu himpunan berhingga tak kosong $V(G)$ dari obyek-obyek yang disebut titik G dan himpunan berhingga (mungkin kosong) $E(G)$ yang elemen-elemennya disebut sisi G sedemikian hingga setiap elemen e dalam $E(G)$ merupakan pasangan tak berurutan dari titik-titik G. Himpunan $V(G)$ disebut himpunan titik G dan himpunan $E(G)$ disebut himpunan sisi G. Misalkan u dan v adalah dua titik di G dan $e = \{u, v\}$ (sering ditulis $e = uv$) adalah sebuah sisi G (Budayasa, 2007).

Definisi 2.2: Sebuah graf komplet (graf lengkap) dengan n titik, dilambangkan dengan K_n adalah graf sederhana dengan n titik dan setiap dua titik bebeda dihubungkan dengan sebuah sisi (Budayasa, 2007).

Definisi 2.3: Graf G disebut graf bipartit jika himpunan titik G dapat dipartisi menjadi dua himpunan bagian A dan B sedemikian sehingga setiap sisi dari G menghubungkan sebuah titik di A dan sebuah titik di B. Misalkan (A, B) bipartisi dari G. Sedangkan graf G disebut graf bipartit komplet apabila G sederhana dan bipartisi dengan bipartisi (A, B) sedemikian hingga setiap titik di A berhubungan langsung dengan setiap titik di B, dilambangkan dengan $K_{m,n}$ dimana $|A| = m$ dan $|B| = n$ (Budayasa, 2007).

Definisi 2.4: Misalkan G graf. Jalan di G adalah barisan berhingga (tak kosong) $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k)$ yang suku-sukunya bergantian titik dan sisi (Budayasa 2007).

Definisi 2.5: Lintasan adalah jalan dengan semua titik dan semua sisinya berbeda, lintasan dengan k titik dilambangkan dengan P_k (Budayasa, 2007).

Definisi 2.6: Sikel adalah jalan dengan semua sisi dan semua titik internalnya bebeda, sedangkan titik awal dan titik akhirnya sama. Sikel dengan k titik dilambangkan C_k (Budayasa, 2007).

Definisi 2.7: Graf roda adalah graf yang disusun dari sebuah sikel C_n dan graf komplet K_1 dimana setiap titik pada sikel tersebut terhubung langsung pada titik pusat (graf komplet K_1) (Rahmawati dkk., 2014). Graf roda lambangkan dengan W_m dimana m adalah banyaknya titik sikel C_n ditambah satu**.**

Definisi 2.8: Pohon adalah graf terhubung dan tidak memuat sikel (Budayasa, 2007).

Definisi 2.9: Graf bintang merupakan graf bipartit komplet $(K_{1,n-1})$ yang dilambangkan dengan S_n (Roza dkk., 2014). Dengan $V(S_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan $V(S_n) = \{v_1, v_i | i = 2,3, \dots, n\}$ dimana titik v_1 disebut titik pusat dan titik-titik lain yang berhubungan langsung dengan titik v_1 disebut daun.

Definisi 2.10: Misalkan G graf. Pewarnaan-k pada G adalah pewarnaan semua titik G dengan menggunakan k warna sedemikian hingga dua titik G yang berhubungan langsung mendapat warna berbeda. Jika G memiliki pewarnaan-k maka G dikatakan dapat diwarnai dengan k warna. Pewarnaan-k pada graf G biasanya ditunjukkan dengan melabeli titik-titik G dengan warna $1,2,3, \dots, k$. Misalkan G graf. Bilangan kromatik (chromatic number) graf G, dilambangkan dengan $\chi(G)$, didefinisikan sebagai berikut:

$$\chi(G) = \min \{ k | \text{ada pewarnaan} - k \text{ pada } G\}$$

(Budayasa, 2007)

Lemma 2.1 G graf bipartit jika dan hanya jika $\chi(G) = 2$ ■

Lemma 2.2 Pohon nontrivial adalah graf bipartit. ■

Definisi 2.11: Misalkan G graf sederhana. Pewarnaan-total G adalah pewarnaan semua titik G dan semua sisi G sedemikian hingga dua titik yang berhubungan langsung mendapat warna berbeda dan dua sisi yang terkait pada titik yang sama baik titik maupun sisi mendapat warna berbeda (Manikandan dkk., 2014). Pewarnaan-total-k pada G adalah sebuah pewarnaan-total G dengan menggunakan k warna. Pewarnaan-total-k pada G biasanya ditunjukkan dengan melabeli semua titik G dan sisi G dengan warna $1,2,3, \dots, k$. Bilangan kromatik-total G, dinotasikan $\chi_T(G)$. didefinisikan sebagai berikut:

$$\chi_T(G) = \min \{ k | \text{ada pewarnaan} - \text{total} - k \text{ pada } G\}$$

Teorema 2.3: Jika G graf sederhana, maka

$$\chi_T(G) \geq \Delta(G) + 1 \quad ■$$

(Behzad, 1965)

Definisi 2.12: Sebuah graf G dengan $\chi_T(G) = \Delta(G) + 1$ disebut graf kelas-1 sedangkan graf G dengan $\chi_T(G) > \Delta(G) + 1$ disebut graf kelas-2.

3. PEMBAHASAN

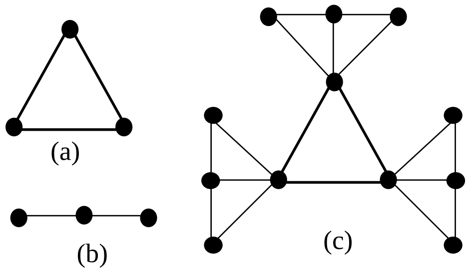
Pada bab ini akan dibahas bilangan kromatik-total hasil kali korona dua graf, namun sebelumnya diawali dengan konsep hasil kali korona dua graf. Semua graf yang dibicarakan dalam tulisan ini adalah graf sederhana dan bilangan kromatik-total dari graf tersebut kurang dari atau sama dengan derajat maksimum ditambah dua.

A. Hasil Kali Korona Dua Graf

Definisi 3.1:
Misal G dan H dua buah graf. Hasil kali korona dari G dan H, dilambangkan dengan $G \circ H$, adalah sebuah graf yang diperoleh dengan mengambil satu salinan G, disebut graf pusat, dan sebanyak $|V(G)|$ salinan H, disebut graf luar dan membuat titik G ke-i berhubungan langsung ke setiap titik salinan H ke-i, dimana $1 \leq i \leq |V(G)|$ (Harary dan Frucht , 1970).

Perkalian korona pertama kali diperkenalkan oleh F. Harary dan Frucht pada tahun 1970. Hasil kali korona tidak komutatif dan tidak asosiatif.

Contoh 3.1:



Gambar 3. 1 (a) Graf G; (b) Graf H; (c) Hasil kali korona $G\ dan\ H(G \circ H)$;

B. Bilangan Kromatik-Total Hasil Kali Korona Dua Graf

Pada subbab ini akan dibahas bilangan kromatik-total hasil kali korona graf G dan graf H, dengan $\Delta(G) \geq 2$ dan H adalah sikel, graf komplet, graf roda, graf bipartit, pohon, lintasan atau graf bintang. Dalam hal ini akan ditunjukkan bilangan kromatik-total hasil kali korona dua graf tersebut menghasilkan graf kelas-1.

Berikut akan ditunjukkan bahwa hasil kali korona sebarang graf dengan sikel C_n menghasilkan graf kelas-1.

Teorema 3.1:

Untuk setiap graf G dan sikel C_n dengan $n \geq 3$, diperoleh

$$\chi_T(G \circ C_n) = \Delta(G \circ C_n) + 1 = \Delta(G) + n + 1$$

(Mohan dkk., 2017)

Bukti:

Berdasarkan Definisi 3.1, $\Delta(G \circ C_n) = \Delta(G) + n$

Misalkan $A = \{1, 2, 3, \ldots, \Delta(G), \Delta(G) + 1, \ldots, \Delta(G) + n + 1\}$ adalah himpunan warna dengan $\Delta(G) + n + 1$ warna. Tinjau menjadi dua kasus.

Kasus 1: $\chi_T(G) = \Delta(G) + 1$

Kontruksi pewarnaan-total pada G dengan menggunakan $\Delta(G) + 1$ warna pertama pada A. Untuk mewarnai sikel C_n dan sisi-sisi yang menghubungkan titik G dengan sikel C_n tinjau menjadi tiga subkasus.

Subkasus 1.1: $n \equiv 0 \pmod 3$

Perhatikan n warna tersisa dari himpunan A, selanjutnya pilih dua warna berbeda yang telah digunakan untuk mewarnai G namakan warna w_1 dan w_2, dimana warna w_1 dan w_2 bukan warna titik G yang berhubungan langsung dengan titik C_n, sehingga dua warna tersebut bersama n warna tersisa di A himpun namakan A_1, dimana

$$A_1 = \{w_1, w_2, w_3 = \Delta(G) + 2, \ldots, w_{n+2} = \Delta(G) + n + 1\}$$

Selanjutnya gunakan warna w_1, w_2, w_3 dan w_4 untuk mewarnai sikel C_n. Langkah pertama definisikan $w(v)$ adalah warna titik v dan $w(e)$ adalah warna sisi e, selanjutnya warnai sikel C_n sedemikian hingga untuk setiap $1 \leq i \leq \frac{n}{3}$,

$$w(v_{3i-2}) = w_1;\ w(v_{3i}) = w_2;\ w(v_{3i-1}) = w_3, \text{dan}$$

$$w(e_{3i-1}) = w_1;\ w(e_{3i-2}) = w_2;\ w(e_{3i}) = w_3 \text{ kecuali } w(e_n) = w_4$$

Perhatikan bahwa untuk setiap titik C_n terdapat $n - 1$ warna A_1 yang absen, dari warna-warna tersebut gunakan untuk mewarnai sisi-sisi yang menghubungkan titik G dengan titik C_n. Diperoleh sebuah pewarnaan-total pada $G \circ C_n$ dengan menggunakan $\Delta(G) + 1 + n$ warna. Berdasarkan Definisi 2.11,

$$\chi_T(G \circ C_n) \leq \Delta(G) + 1 + n = \Delta(G \circ C_n) + 1 \quad \ldots(1)$$

Berdasarkan Teorema 2.3,

$$\chi_T(G \circ C_n) \geq \Delta(G \circ C_n) + 1 \quad \ldots(2)$$

Dari (1) dan (2), disimpulkan

$$\chi_T(G \circ C_n) = \Delta(G \circ C_n) + 1$$

Subkasus 1.2: $n \equiv 1 \pmod 3$

Perhatikan n warna tersisa dari himpunan A, selanjutnya pilih dua warna berbeda yang telah digunakan untuk mewarnai G namakan warna w_2 dan w_4, dimana warna w_2 dan w_4 bukan warna titik G yang berhubungan langsung dengan titik C_n, sehingga dua warna tersebut bersama n warna tersisa di A himpun namakan A_2, dimana

$$A_2 = \{w_1 = \Delta(G) + 2, w_2, w_3 = \Delta(G) + 3, w_4, \ldots, w_{n+2} = \Delta(G) + n + 1\}$$

Selanjutnya gunakan warna w_1, w_2, w_3 dan w_4 untuk mewarnai sikel C_n. Langkah pertama definisikan $w(v)$ adalah warna dari titik v dan $w(e)$ adalah warna sisi e, selanjutnya warnai sikel C_n dengan cara berikut,

$$w(v_1) = w_1;\ w(v_{3i}) = w_1, 1 \leq i \leq \frac{n-1}{3};$$

$$w(v_{3i+2}) = w_2, 1 \leq i \leq \frac{n-4}{3};\ w(v_2) = w_3;$$

$$w(v_{3i+1}) = w_3, 1 \leq i \leq \frac{n-1}{3} \text{ dan } w(e_1) = w_2;$$

$$w(e_2) = w(e_n) = w_4;\ w(e_{3i+1}) = w_1,$$

$$1 \leq i \leq \frac{n-4}{3};\ w(e_{3i}) = w_2, 1 \leq i \leq \frac{n-1}{3};$$

$$w(e_{3i+2}) = w_3, 1 \leq i \leq \frac{n-4}{3}$$

Perhatikan bahwa untuk setiap titik C_n terdapat $n - 1$ warna A_2 yang absen, dari warna-warna tersebut gunakan untuk mewarnai sisi-sisi yang menghubunkan titik G dengan titik C_n. Diperoleh sebuah pewarnaan-total pada $G \circ C_n$ dengan menggunakan $\Delta(G) + 1 + n$ warna. Berdasarkan Definisi 2.11,

$$\chi_T(G \circ C_n) \leq \Delta(G) + 1 + n = \Delta(G \circ C_n) + 1 \ \ldots(3)$$

Berdasarkan Teorema 2.3,

$$\chi_T(G \circ C_n) \geq \Delta(G \circ C_n) + 1 \quad \ldots(4)$$

Dari (3) dan (4), disimpulkan

$$\chi_T(G \circ C_n) = \Delta(G \circ C_n) + 1$$

Subkasus 1.3: $n \equiv 2 \pmod 3$

Perhatikan n warna tersisa dari himpunan A, selanjutnya pilih dua warna berbeda yang telah digunakan untuk mewarnai G namakan warna w_1 dan w_2, dimana warna w_1 dan w_2 bukan warna titik G yang berhubungan langsung dengan titik C_n, sehingga dua warna tersebut bersama n warna tersisa di A himpun namakan A_3, dimana

$$A_3 = \{w_1, w_2, w_3 = \Delta(G) + 2, ..., w_{n+2} = \Delta(G) + n + 1\}$$

Selanjutnya gunakan warna w_1, w_2, w_3 dan w_4 untuk mewarnai sikel C_n. Langkah pertama definisikan $w(v)$ adalah warna dari titik v dan $w(e)$ adalah warna sisi e, selanjutnya warnai sikel C_n dengan cara berikut,

$$w(v_{3i-2}) = w_1, 1 \le i \le \frac{n+1}{3};\ w(v_{3i}) = w_2, 1 \le i \le \frac{n-2}{3};\ w(v_{3i-1}) = w_3, 1 \le i \le \frac{n+1}{3} \text{ dan } w(e_{3i-1}) = w_1, 1 \le i \le \frac{n-2}{3};\ w(e_{3i-2}) = w_2, 1 \le i \le \frac{n+1}{3};\ w(e_{3i}) = w_3, 1 \le i \le \frac{n-2}{3};\ w(e_n) = w_4$$

Perhatikan bahwa untuk setiap titik C_n terdapat $n-1$ warna A_3 yang absen, dari warna-warna tersebut gunakan untuk mewarnai sisi-sisi yang menghubunkan titik G dengan titik C_n. Diperoleh sebuah pewarnaan-total pada $G \circ C_n$ dengan menggunakan $\Delta(G) + 1 + n$ warna. Berdasarkan Definisi 2.11,

$$\chi_T(G \circ C_n) \le \Delta(G) + 1 + n = \Delta(G \circ C_n) + 1 \quad \ldots(5)$$

Berdasarkan Teorema 2.3,

$$\chi_T(G \circ C_n) \ge \Delta(G \circ C_n) + 1 \quad \ldots(6)$$

Dari (5) dan (6), disimpulkan

$$\chi_T(G \circ C_n) = \Delta(G \circ C_n) + 1$$

Kasus 2: $\chi_T(G) = \Delta(G) + 2$

Kontruksi pewarnaan-total dari G dengan menggunakan $\Delta(G) + 2$ warna pertama pada A. Untuk mewarnai sikel C_n dan sisi-sisi yang menghubungkan titik G dengan sikel C_n tinjau menjadi tiga subkasus.

Subkasus 1.1: $n \equiv 0 \pmod 3$

Perhatikan n warna tersisa dari himpunan A. Karena derajat maksimum G adalah $\Delta(G)$ maka untuk setiap titik G terdapat tepat satu warna yang absen, namakan w_3. Pilih dua warna berbeda yang telah digunakan untuk mewarnai G namakan warna w_1 dan w_2, dimana warna w_1 dan w_2 bukan warna titik G yang berhubungan langsung dengan titik C_n, sehingga tiga warna tersebut bersama $n-1$ warna tersisa di A himpun namakan A_4, dimana

$$A_4 = \{w_1, w_2, w_3, w_4 = \Delta(G) + 3 ..., w_{n+2} = \Delta(G) + n + 1\}$$

Selanjutnya warnai C_n dan sisi-sisi yang menghubungkan titik G dengan titik C_n seperti cara ***Subkasus 1.1*** pada **Kasus 1.** Diperoleh sebuah pewarnaan-total pada $G \circ C_n$ dengan menggunakan $\Delta(G) + 1 + n$ warna. Berdasarkan Definisi 2.11,

$$\chi_T(G \circ C_n) \le \Delta(G) + 1 + n = \Delta(G \circ C_n) + 1 \quad \ldots(7)$$

Berdasarkan Teorema 2.3,

$$\chi_T(G \circ C_n) \ge \Delta(G \circ C_n) + 1 \quad \ldots(8)$$

Dari (7) dan (8), disimpulkan

$$\chi_T(G \circ C_n) = \Delta(G \circ C_n) + 1$$

Subkasus 2.2: $n \equiv 1 \pmod 3$

Perhatikan $n-1$ warna tersisa dari himpunan A. Karena derajat maksimum G adalah $\Delta(G)$ maka untuk setiap titik G terdapat tepat satu warna yang absen, namakan w_1. Pilih dua warna berbeda yang telah digunakan untuk mewarnai G namakan warna w_2 dan w_4, dimana warna w_2 dan w_4 bukan warna titik G yang berhubungan langsung dengan titik C_n, sehingga tiga warna tersebut bersama $n-1$ warna tersisa di A himpun namakan A_5, dimana

$$A_5 = \{w_1, w_2, w_3 = \Delta(G) + 3, w_4, ..., w_{n+2} = \Delta(G) + n + 1\}$$

Selanjutnya warnai C_n dan sisi-sisi yang menghubungkan titik G dengan titik C_n seperti cara ***Subkasus 1.2*** pada **Kasus 1.** Diperoleh sebuah pewarnaan-total dari $G \circ C_n$ dengan menggunakan $\Delta(G) + 1 + n$ warna. Berdasarkan Definisi 2.11,

$$\chi_T(G \circ C_n) \le \Delta(G) + 1 + n = \Delta(G \circ C_n) + 1 \quad \ldots(9)$$

Berdasarkan Teorema 2.3,

$$\chi_T(G \circ C_n) \ge \Delta(G \circ C_n) + 1 \quad \ldots(10)$$

Dari (9) dan (10), disimpulkan

$$\chi_T(G \circ C_n) = \Delta(G \circ C_n) + 1$$

Subkasus 2.3: $n \equiv 2 \pmod 3$

Perhatikan $n-1$ warna tersisa dari himpunan A. Karena derajat maksimum G adalah $\Delta(G)$ maka untuk setiap titik G terdapat tepat satu warna yang absen, namakan w_3. Pilih dua warna berbeda yang telah digunakan untuk mewarnai G namakan warna w_1 dan w_2, dimana warna w_1 dan w_2 bukan warna titik G yang berhubungan langsung dengan titik C_n, sehingga tiga warna tersebut bersama $n-1$ warna tersisa di A himpun namakan A_6, dimana

$$A_6 = \{w_1, w_2, w_3, w_4 = \Delta(G) + 3, ..., w_{n+2} = \Delta(G) + n + 1\}$$

Selanjutnya warnai C_n dan sisi-sisi yang menghubungkan titik G dengan titik C_n seperti cara ***Subkasus 1.3*** pada **Kasus 1.** Diperoleh sebuah pewarnaan-total pada $G \circ C_n$ dengan menggunakan $\Delta(G) + 1 + n$ warna. Berdasarkan Definisi 2.11,

$$\chi_T(G \circ C_n) \le \Delta(G) + 1 + n = \Delta(G \circ C_n) + 1 \quad \ldots(11)$$

Berdasarkan Teorema 2.3,

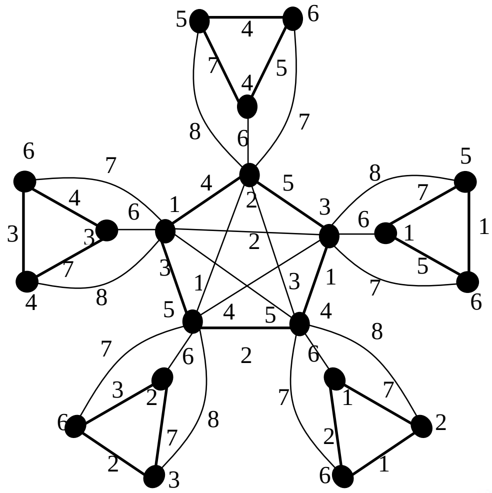
$$\chi_T(G \circ C_n) \ge \Delta(G \circ C_n) + 1 \quad \ldots(12)$$

Dari (11) dan (12), disimpulkan

$$\chi_T(G \circ C_n) = \Delta(G \circ C_n) + 1$$

Dengan demikian teorema terbukti ■

Contoh 3.2:



Gambar 3. 2 Sebuah pewarnaan-total-8 pada $K_5 \circ C_3$

Berikut akan ditunjukkan hasil kali korona sebarang graf dengan graf komplet K_n menghasilkan graf kelas-1

Teorema 3.2:

Untuk setiap graf G dan graf komplet K_n dengan $n \geq 4$, diperoleh

$$\chi_T(G \circ K_n) = \Delta(G \circ K_n) + 1 = \Delta(G) + n + 1$$

(Mohan dkk., 2017)

Bukti:

Berdasarkan Definisi 3.1, $\Delta(G \circ K_n) = \Delta(G) + n$

Misalkan $A = \{1,2,3, \dots, \Delta(G) + 1, \Delta(G) + 2, \dots, \Delta(G) + n + 1\}$ adalah himpunan warna dengan $\Delta(G) + n + 1$ warna. Tinjau menjadi dua kasus.

Kasus 1: $\chi_T(G) = \Delta(G) + 1$

Kontruksi pewarnaan-total dari G dengan menggunakan $\Delta(G) + 1$ warna pertama pada A. untuk mewarnai K_n dan sisi-sisi yang menghubungkan titik G dengan titik K_n tinjau menjadi dua subkasus.

Subkasus 1.1: n ganjil

Perhatikan n warna tersisa dari himpunan A, selanjutnya pilih tiga warna berbeda yang telah digunakan untuk mewarnai G namakan warna w_0, w_1 dan w_2, dimana warna w_0 adalah warna titik G yang berhubungan langsung dengan titik K_n, sehingga tiga warna tersebut bersama n warna tersisa di A himpun namakan A_1, dimana

$$A_1 = \{w_0, w_1, w_2, w_3 = \Delta(G) + 2, w_4 = \Delta(G) + 3, \dots$$
$$w_{n+2} = \Delta(G) + n + 1\}$$

Selanjutnya gunakan $n + 3$ warna tersebut untuk mewarnai K_n. Langkah pertama definisikan $W(v_i)$ adalah warna dari titik v_i dan $W(v_i v_j)$ adalah warna sisi $v_i v_j$, selanjutnya warnai K_n dengan cara sebagai berikut:

$w(v_i) = w_i$, $i = 1,2, \dots, n$

$w(v_{i+1} v_{i-1(mod\ n)}) = w(v_{i+2} v_{i-2(mod\ n)}) = \cdots$

$= w\left(v_{i+\frac{n-1}{2}} v_{i-\frac{n-1}{2}(mod\ n)}\right) = w_i$, $i = 1,2$

$w(v_i v_j) = w_0$, $i + j = n$

$w(v_i v_j) = w_{n+2}$, $i + j = n + 3$ untuk sisi K_n yang lain, warnai dengan warna $w(v_i v_j) = w_{i+j(mod\ n+2)}$

Perhatikan bahwa setiap titik K_n terdapat tepat tiga warna yang absen, dari warna-warna tersebut gunakan untuk mewarnai sisi yang menghubungkan titik G dengan titik K_n. Diperoleh sebuah pewarnaan-total pada $G \circ K_n$ dengan menggunakan $\Delta(G) + 1 + n$ warna. berdasarkan Definisi 2.11,

$$\chi_T(G \circ K_n) \leq \Delta(G) + 1 + n = \Delta(G \circ K_n) + 1 \quad \dots(1)$$

Berdasarkan Teorema 2.3,

$$\chi_T(G \circ K_n) \geq \Delta(G \circ K_n) + 1 \quad \dots(2)$$

Dari (1) dan (2), disimpulkan

$$\chi_T(G \circ K_n) = \Delta(G \circ K_n) + 1$$

Subkasus 1.2: n genap

Perhatikan n warna tersisa dari himpunan A, selanjtnya pilih tiga warna berbeda yang telah digunakan untuk mewarnai G namakan warna $w_0, w_1\ dan\ w_2$, dimana warna w_0 adalah warna titik G yang berhubungan langsung dengan titik K_n, sehingga tiga warna tersebut bersama n warna tersisa di A himpun namakan A_2, dimana

$$A_2 = \{w_0, w_1, w_2, w_3 = \Delta(G) + 2, w_4 = \Delta(G) + 3, \dots$$
$$w_{n+2} = \Delta(G) + n + 1\}$$

Selanjutnya gunakan $n + 3$ warna tersebut untuk mewarnai K_n. Langkah pertama definisikan $w(v_i)$ adalah warna titik v_i dan $w(v_i v_j)$ adalah warna sisi $v_i v_j$, selanjutnya warnai K_n dengan cara sebagai berikut:

$w(v_i) = w_i$, $i = 1,2, \dots, n$ kecuali $w(v_3) = w_{n+1}$

$w(v_{i+1} v_{i-1(mod\ n)}) = w(v_{i+2} v_{i-2(mod\ n)}) = \cdots$

$= w\left(v_{i+\frac{n-2}{2}} v_{i-\frac{n-2}{2}(mod\ n)}\right) = w_i$, $i = 1,2$

$w(v_i v_j) = w_0$, $i + j = n + 1$; $w(v_i v_j) = w_{n+2}$, $i + j = n + 3$ untuk sisi K_n yang lain, warnai dengan warna $w(v_i v_j) = w_{i+j(mod\ n+2)}$

Perhatikan bahwa setiap titik K_n terdapat tepat tiga warna yang absen, dari warna-warna tersebut gunakan untuk mewarnai sisi yang menghubungkan titik G dengan titik K_n. Diperoleh sebuah pewarnaan-total pada $G \circ K_n$ dengan menggunakan $\Delta(G) + 1 + n$ warna. Berdasarkan Definisi 2.11,

$$\chi_T(G \circ K_n) \leq \Delta(G) + 1 + n = \Delta(G \circ K_n) + 1 \quad \dots(3)$$

Berdasarkan Teorema 2.3,

$$\chi_T(G \circ K_n) \geq \Delta(G \circ K_n) + 1 \quad \dots(4)$$

Dari (3) dan (4), disimpulkan

$$\chi_T(G \circ K_n) = \Delta(G \circ K_n) + 1$$

Kasus 2: $\chi_T(G) = \Delta(G) + 2$

Kontruksi pewarnaan-total dari G dengan menggunakan $\Delta(G) + 2$ warna pertama pada A. Untuk mewarnai K_n dan sisi-sisi yang menghubungkan titik G dengan titik K_n tinjau menjadi dua subkasus.

Subkasus 2.1: n ganjil

Perhatikan $n - 1$ warna tersisa dari himpunan A. Karena derajat maksimum G adalah $\Delta(G)$, maka untuk setiap titik G terdapat tepat satu warna yang absen, namakan warna w_3. Pilih tiga warna berbeda yang telah digunakan untuk mewarnai G namakan warna $w_0, w_1\ dan\ w_2$, dimana warna w_0 adalah warna titik di G yang berhubungan langsung dengan titik K_n, sehingga empat warna tersebut bersama $n - 1$ warna tersisa di A himpun namakan A_3, dimana

$$A_3 = \{w_0, w_1, w_2, w_3, w_4 = \Delta(G) + 3, \dots$$
$$w_{n+2} = \Delta(G) + n + 1\}$$

Selanjutnya warnai K_n dan sisi yang menghubungkan titik G dengan titik K_n seperti cara ***Subkasus 1.1*** pada **Kasus 1**. Diperoleh sebuah pewarnaan-total pada $G \circ K_n$ dengan menggunakan $\Delta(G) + 1 + n$ warna. Berdasarkan Definisi 2.11,

$$\chi_T(G \circ K_n) \leq \Delta(G) + 1 + n = \Delta(G \circ K_n) + 1 \quad \dots(5)$$

Berdasarkan Teorema 2.3,

$$\chi_T(G \circ K_n) \geq \Delta(G \circ K_n) + 1 \quad \dots(6)$$

Dari (5) dan (6), disimpulkan

$$\chi_T(G \circ K_n) = \Delta(G \circ K_n) + 1$$

Subkasus 2.2: n genap

Perhatikan $n - 1$ warna tersisa dari himpunan A. Karena derajat maksimum G adalah $\Delta(G)$, maka untuk setiap titik G terdapat tepat satu warna yang absen, namakan warna w_3, selanjutnya pilih tiga warna berbeda yang telah digunakan untuk mewarnai G namakan warna $w_0, w_1\ dan\ w_2$, dimana warna w_0 adalah warna titik G yang berhubungan langsung dengan titik K_n, sehingga empat warna tersebut bersama $n - 1$ warna tersisa di A himpun namakan A_4, dimana

$$A_4 = \{w_0, w_1, w_2, w_3, w_4 = \Delta(G) + 3, \dots$$
$$w_{n+2} = \Delta(G) + n + 1\}$$

Selanjutnya warnai K_n dan sisi yang menghubungkan titik G dengan titik K_n seperti cara di ***Subkasus 1.2*** pada **Kasus 1**. Diperoleh sebuah pewarnaan-total pada $G \circ K_n$ dengan menggunakan $\Delta(G) + 1 + n$ warna. Berdasarkan Definisi 2.11,

$$\chi_T(G \circ K_n) \leq \Delta(G) + 1 + n = \Delta(G \circ K_n) + 1 \quad \dots(7)$$

Berdasarkan Teorema 2.3,

$$\chi_T(G \circ K_n) \geq \Delta(G \circ K_n) + 1 \quad \dots(8)$$

Dari (7) dan (8), disimpulkan

$$\chi_T(G \circ K_n) = \Delta(G \circ K_n) + 1$$

Dengan demikian teorema terbukti ■

Berikut akan ditunjukkan hasil kali korona sebarang graf dengan graf roda W_n menghasilkan graf kelas-1

Teorema 3.3:

Untuk setiap graf G dan graf roda W_n dengan $n \geq 5$, diperoleh

$$\chi_T(G \circ W_n) = \Delta(G \circ W_n) + 1 = \Delta(G) + n + 1$$

Bukti:

Berdasarkan Definisi 3.1, $\Delta(G \circ W_n) = \Delta(G) + n$

Misalkan $A = \{1, 2, 3, \dots, \Delta(G), \Delta(G) + 1, \dots, \Delta(G) + n + 1\}$ adalah himpunan warna dengan $\Delta(G) + n + 1$ warna. Tinjau menjadi dua kasus.

Kasus 1: $\chi_T(G) = \Delta(G) + 1$

Kontruksi pewarnaan-total dari G dengan menggunakan $\Delta(G) + 1$ warna pertama pada A. Untuk mewarnai W_n dan sisi-sisi yang menghubungkan titik G dengan W_n, perhatikan n warna tersisa dari himpunan A, selanjutnya pilih dua warna berbeda yang telah digunakan untuk mewarnai G namakan warna w_0 dan w_1 dimana warna w_1 bukan warna titik G yang berhubungan langsung dengan titik W_n, sehingga warna tersebut bersama n warna tersisa di A himpun namakan A_1, dimana

$$A_1 = \{w_1, w_2 = \Delta(G) + 2, w_3 = \Delta(G) + 3, \dots,$$
$$w_{n+1} = \Delta(G) + n + 1\}$$

Selanjutnya gunakan warna-warna tersebut untuk mewarnai W_n. Langkah pertama definisikan $w(v_i)$ adalah warna dari titik v_i dan $w(v_i v_j)$ adalah warna sisi $v_i v_j$, dimana v_1 adalah titik pusat W_n. Warnai W_n seperti berikut,

untuk $n = 5$

$w(v_2 v_3) = w(v_4 v_5) = w_0$

$w(v_2 v_5) = w(v_3 v_4) = w(v_1) = w_1$

$w(v_1 v_2) = w(v_5) = w_2$

$w(v_1 v_3) = w(v_2) = w_3$

$w(v_1 v_4) = w(v_3) = w_4$

$w(v_1 v_5) = w(v_4) = w_5$

Untuk $n > 5$

$w(v_1) = w_1$

$w(v_1 v_i) = w_i, i = 2, \dots, n$

$w(v_n) = w(v_1 v_2)$

$w(v_i) = w(v_1 v_{i+1}), i = 2, \dots, n - 1$

$w(v_2 v_n) = w(v_3);\ w(v_{n-1} v_n) = w(v_2)$

$w(v_i v_{i+1}) = w(v_{i+2}), i = 2, \dots, n - 2$

Perhatikan bahwa terdapat satu warna A_1 yang absen pada titik v_1, sedangkan untuk titik W_n yang lain terdapat $n - 3$ warna A_1 yang absen. Dari warna-warna tersebut gunakan untuk mewarnai sisi-sisi yang menghubungkan titik G dengan titik W_n. Diperoleh sebuah pewarnaan-totl pada $G \circ W_n$ dengan menggunakan $\Delta(G) + 1 + n$ warna. Berdasarkan Definisi 2.11,

$$\chi_T(G \circ W_n) \leq \Delta(G) + 1 + n = \Delta(G \circ W_n) + 1 \quad \dots(1)$$

Berdasarkan Teorema 2.3,

$$\chi_T(G \circ W_n) \geq \Delta(G \circ W_n) + 1 \qquad \ldots(2)$$

Dari (1) dan (2), disimpulkan

$$\chi_T(G \circ W_n) = \Delta(G \circ W_n) + 1$$

Kasus 2: $\chi_T(G) = \Delta(G) + 2$

Kontruksi pewarnaan-total dari G dengan menggunakan $\Delta(G) + 2$ warna pertama pada A. Untuk mewarnai W_n dan sisi-sisi yang menghubungkan titik G dengan W_n perhatikan $n - 1$ warna tersisa dari himpunan A. Karena derajat maksimum G adalah $\Delta(G)$ maka untuk setiap titik G terdapat tepat satu warna yang absen, namakan w_2. Pilih dua warna berbeda yang telah digunakan untuk mewarnai G namakan warna w_0 dan w_1 dimana warna w_1 bukan warna titik G yang berhubungan langsung dengan titik W_n, sehingga dua warna tersebut bersama $n - 1$ warna tersisa di A himpun namakan A_1, dimana

$$W_1 = \{w_1, w_2, w_3 = \Delta(G) + 3, \ldots, \\ w_{n+2} = \Delta(G) + n + 1\}$$

Selanjutnya gunakan warna-warna tersebut untuk mewarnai W_n dan sisi-sisi yang menghubungkan titik G dengan titik W_n dengan cara seperti pada **Kasus 1.** Diperoleh sebuah pewarnaan-total pada $G \circ W_n$ dengan menggunakan $\Delta(G) + 1 + n$ warna.

Berdasarkan Definisi 2.11,

$$\chi_T(G \circ W_n) \leq \Delta(G) + 1 + n = \Delta(G \circ W_n) + 1 \quad \ldots(3)$$

Berdasarkan Teorema 2.3,

$$\chi_T(G \circ W_n) \geq \Delta(G \circ W_n) + 1 \qquad \ldots(4)$$

Dari (3) dan (4), disimpulkan

$$\chi_T(G \circ W_n) = \Delta(G \circ W_n) + 1$$

Dengan demikian teorema terbukti ■

Berikut akan ditunjukkan hasil kali korona sebarang graf dengan graf komplet $K_{m,n}$ menghasilkan graf kelas-1.

Teorema 3.4:

Untuk setiap graf G dan graf bipartit komplet $K_{m,n}$, diperoleh

$$\chi_T(G \circ K_{m,n}) = \Delta(G \circ K_{m,n}) + 1 = \Delta(G) + n + m + 1$$

(Mohan dkk., 2017)

Bukti:

Misalkan graf bipartit komplet $K_{m,n}$ adalah graf dengan partisi $X = \{u_1, u_2, \ldots u_m\}$ dan $Y = \{v_1, v_2, \ldots v_n\}$.

Berdasarkan Definisi 3.1,

$$\Delta(G \circ K_{m,n}) = \Delta(G) + m + n$$

Misalkan $A = \{1,2,3, \ldots, \Delta(G) + 1, \Delta(G) + 2, \ldots \Delta(G) + m + n + 1\}$ adalah himpunan $\Delta(G) + m + n + 1$ warna. Tinjau menjadi dua kasus

Kasus 1: $\chi_T(G) = \Delta(G) + 1$

Konstruksi pewarnaan-total pada G dengan menggunakan $\Delta(G) + 1$ warna pertama pada A. Sebanyak $m + n$ warna tersisa di A, selanjutnya pilih tiga warna berbeda yang telah digunakan untuk mewarnai G namakan warna w_1, w_2 dan w_3, sehingga tiga warna tersebut bersama $m + n$ warna tersisa di A himpun namakan A_1, dimana

$$A_1 = \{w_1, w_2, w_3, w_4 = \Delta(G) + 2, \ldots \\ w_{m+n+3} = \Delta(G) + m + n + 1\}$$

Selanjutnya gunakan warna-warna tersebut untuk mewarnai $K_{m,n}$. Langkah pertama definisikan $w(u_i v_j)$ adalah warna dari sisi $u_i v_j$. Selanjutnya warnai graf bipartit komplet $K_{m,n}$ sedemikian hingga untuk setiap $1 \leq j \leq n$,

$$w(u_1 v_j) = w_j, w(u_2 v_j) = w_{j+1}, \ldots, w(u_m v_j) = w_{j+m-1}$$

Selanjutnya terdapat empat warna dari A_1 yang belum digunakan untuk mewarnai sisi $K_{m,n}$, dari empat warna tersebut gunakan dua warna untuk mewarnai titik X dan Y. Perhatikan bahwa setiap titik $K_{m,n}$ terdapat $m + 2$ dan $n + 2$ warna yang absen, dari warna yang absen tersebut gunakan untuk mewarnai sisi yang menghubungkan titik G dengan titik $K_{m,n}$. Diperoleh sebuah pewarnaan-total pada $G \circ K_{m,n}$ dengan menggunakan $\Delta(G) + m + n + 1$ warna. Berdasarkan Definisi 2.11,

$$\chi_T(G \circ K_{m,n}) \leq \Delta(G) + 1 + m + n \\ = \Delta(G \circ K_{m,n}) + 1 \qquad \ldots(1)$$

Berdasarkan Teorema 2.3,

$$\chi_T(G \circ K_{m,n}) \geq \Delta(G \circ K_{m,n}) + 1 \qquad \ldots(2)$$

Dari (1) dan (2), disimpulkan

$$\chi_T(G \circ C_n) = \Delta(G \circ K_{m,n}) + 1$$

Kasus 2: $\chi_T(G) = \Delta(G) + 2$

Konstruksi pewarnaan-total pada G dengan menggunakan $\Delta(G) + 2$ warna pertama pada A. Sebanyak $m + n - 1$ warna tersisa di A. Karena derajat maksimum G adalah $\Delta(G)$, maka untuk setiap titik G terdapat tepat satu warna yang absen namakan warna w_4. Pilih tiga warna berbeda yang telah digunakan untuk mewarnai G namakan warna $w_1, w_2\ dan\ w_3$, sehingga empat warna tersebut bersama $m + n - 1$ warna tersisa A himpun namakan A_2, dimana

$$A_2 = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 = \Delta(G) + 3, \ldots \\ w_{m+n+3} = \Delta(G) + m + n + 1\}$$

Selanjutnya gunakan warna-warna tersebut untuk mewarnai $K_{m,n}$ dan sisi-sisi yang menghubungkan titik G dengan titik $K_{m,n}$ dengan cara seperti pada **Kasus 1**. Diperoleh sebuah pewarnaan-total pada $G \circ K_{m,n}$ dengan menggunakan $\Delta(G) + 1 + m + n$ warna.

Berdasarkan Definisi 2.11,

$$\chi_T(G \circ K_{m,n}) \leq \Delta(G) + 1 + m + n \\ = \Delta(G \circ K_{m,n}) + 1 \qquad \ldots(3)$$

Berdasarkan Teorema 2.3,

$$\chi_T(G \circ K_{m,n}) \geq \Delta(G \circ K_{m,n}) + 1 \qquad \ldots(4)$$

Dari (3) dan (4), disimpulkan

$$\chi_T(G \circ K_{m,n}) = \Delta(G \circ K_{m,n}) + 1$$

Dengan demikian teorema terbukti ■

Berikut akan ditunjukkan hasil kali korona sebarang graf dengan graf bipartit menghasilkan graf klas-1.

Teorema 3.5:

Untuk setiap graf G dan graf bipartit H, diperoleh

$$\chi_T(G \circ H) = \Delta(G \circ H) + 1$$

(Mohan dkk., 2017)

Bukti:

Misalkan $A = \{x_1, x_2, \dots x_m\}$ dan $B = \{y_1, y_2, \dots y_n\}$ adalah sebuah bipartisi dari $V(H)$. Pikirkan $\Delta(G \circ H) = \Delta(G) + m + n$. Berdasarkan Definisi 3.1

$$\chi_T(G \circ K_{m,n}) = \Delta(G \circ K_{m,n}) + 1 = \Delta(G) + m + n + 1$$

Ini berarti ada sebuah pewarnaan-total pada $G \circ K_{m,n}$ menggunakan $\Delta(G) + m + n + 1$ wana. Perhatikan bahwa $G \circ H \subseteq G \circ K_{m,n}$. Diperoleh,

$$\chi_T(G \circ H) \leq \chi_T(G \circ K_{m,n}) = \Delta(G) + m + n + 1$$

Sehingga,

$$\chi_T(G \circ H) \leq \Delta(G) + m + n + 1 = \Delta(G \circ H) + 1 \quad \dots(1)$$

Berdasarkan Teorema 2.3,

$$\chi_T(G \circ H) \geq \Delta(G \circ H) + 1 \quad \dots(2)$$

Dari (1) dan (2), disimpulkan

$$\chi_T(G \circ H) = \Delta(G \circ H) + 1$$

Dengan demikian teorema terbukti ■

Berikut akan ditunjukkan hasil kali korona sebarang graf dengan pohon T_n menghasiklan graf kelas-1.

Teorema 3.6:

Untuk setiap graf G dan pohon T_n,

$$\chi_T(G \circ T_n) = \Delta(G \circ T_n) + 1 = \Delta(G) + n + 1$$

Bukti:

Berdasarkan Lemma 2.2 pohon T_n adalah graf bipartit. Berdasarkan Teorema 3.5

$$\chi_T(G \circ T_n) = \Delta(G) + n + 1 = \Delta(G \circ T_n) + 1$$

Dengan demikian teorema terbukti ■

Karena lintasan (P_n) dan graf bintang (S_n) masing-masing adalah pohon, berdasarkan Teorema 3.6 diperoleh hasil berikut:

Akibat 3.7:

Untuk setiap graf G dan lintasan P_n,

$$\chi_T(G \circ P_n) = \Delta(G) + n + 1 = \Delta(G \circ P_n) + 1 \quad ■$$

Akibat 3.8:

Untuk setiap graf G dan graf bintang S_n,

$$\chi_T(G \circ S_n) = \Delta(G) + n + 1 = \Delta(G \circ S_n) + 1 \quad ■$$

4. PENUTUP

Simpulan

Berdasarkan pembahasan pada tulisan ini, maka dapat disimpulkan bahwa bilangan kromatik-total hasil kali korona dua graf adalah sebagai berikut:

1. Untuk setiap graf G dan sikel C_n dengan $n \geq 3$, diperoleh
   $$\chi_T(G \circ C_n) = \Delta(G) + n + 1 = \Delta(G \circ C_n) + 1$$
2. Untuk setiap graf G dan graf komplet K_n dengan $n \geq 4$, diperoleh
   $$\chi_T(G \circ K_n) = \Delta(G) + n + 1 = \Delta(G \circ K_n) + 1$$
3. Untuk setiap graf G dan graf roda W_n dengan $n \geq 5$, diperoleh
   $$\chi_T(G \circ W_n) = \Delta(G) + n + 1 = \Delta(G \circ W_n) + 1$$
4. Untuk setiap graf G dan graf bipartit komplet $K_{m,n}$, diperoleh
   $$\chi_T(G \circ K_{m,n}) = \Delta(G) + m + n + 1 = \Delta(G \circ K_{m,n}) + 1$$
5. Untuk setiap graf G dan graf bipartit H, diperoleh
   $$\chi_T(G \circ H) = \Delta(G \circ H) + 1$$
6. Untuk setiap graf G dan pohon T_n, diperoleh
   $$\chi_T(G \circ T_n) = \Delta(G) + n + 1 = \Delta(G \circ T_n) + 1$$
7. Untuk setiap graf G dan lintasan P_n, diperoleh
   $$\chi_T(G \circ P_n) = \Delta(G) + n + 1 = \Delta(G \circ P_n) + 1$$
8. Untuk setiap graf G dan graf bintang S_n, diperoleh
   $$\chi_T(G \circ S_n) = \Delta(G) + n + 1 = \Delta(G \circ S_n) + 1$$

Saran

Dalam tulisan ini telah dibahas mengenai bilangan kromatik-total hasil kali korona dua graf. Secara umum bilangan kromatik-total operasi graf yang lain belum ditemukan nilai eksaknya. Oleh karena itu, penulis menyarankan kepada pembaca yang memiliki minat akademis yang sama, dapat lebih mendalami dan mengembangkan teori-teori yang beraitan dengan bilangan kromatik-total yang belum dibahas dalam tulisan ini.

DAFTAR PUSTAKA

Behzad, M. (1965). *Graphs and their chromatic number*. Michigan State University.

Budayasa, I. K. (2007). *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Unipress.

Harary, F. dan R. F. (1970). On the Corona of Two Graph. *Aequationes Math.*, *4*, 322–325.

Manikandan, K. dan S. Sudha. (2014). Total Coloring of S(n, m)-graph. *International Journal of Scientific and Innovative Mathematical Research (IJSIMR)*, *2*(1), 16–22.

Mohan, S. dkk. (2017). Total coloring of the corona product of two graphs. *Australasian Journal of Combinatorics*, *68*(1), 15–22.

Rahmawati, A. dkk. (2014). Kajian Bilangan Clique Graf Gear dan Graf Barbel. *Gamatika*, *5*(1).

Roza, I. dkk. (2014). Graf Garis (Line Graph) dari Graf Siklus, Graf Lengkap dan Graf Bintang. *Jurnal Matematika UNAND*, *3*, 1–4.

Sulistya, D. A. (2019). Bilangan Kromatik Total Beberapa Kelas Graf. *MATH Unesa*, *7*(2).