LOOP DAN LOOP SMARANDACHE BESERTA SIFAT-SIFATNYA

Ahmad Muzakki, Budi Rahadjeng, S.Si., M.Si.

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Negeri Surabaya

Jalan Ketintang Surabaya 60231

Email: zacky_4877@yahoo.co.id, rahajeng13@yahoo.com

ABSTRACT

Dalam skripsi ini akan dibahas tentang pengertian dan beberapa sifat dari loop dan loop smarandache. Sebelum membahas loop smarandache, akan dibahas terlebih dahulu mengenai pengertian dan beberapa sifat loop. Himpunan tak kosong L dengan operasi biner disebut loop jika setiap anggota L memenuhi sifat tertutup, mempunyai elemen identitas dan setiap (a,b) L L terdapat (x,y) L L berlaku a dioperasikan dengan x sama dengan b dan y dioperasikan a sama dengan b. Suatu loop (L,) disebut loop smarandache jika subset sejati A dari L merupakan subgrup dengan operasi yang sama pada L.

KATA KUNCI: ***LOOP, LOOP SMARANDACHE***

INTRODUCTION

Loop sudah lama dikenal dan sudah dipelajari oleh ilmuwan-ilmuwan dari berbagai negara di dunia. Sejak ditemukan hingga saat ini, sudah banyak sekali macam loop yang ditemukan, salah satunya adalah loop Smarandache yang akan dibahas dalam skripsi ini. Loop dan loop Smarandache diperkenalkan oleh W. B. Vasantha Kandasamy, pada tahun 2002 dan 2003, dalam tulisannya yang berjudul *"Bialgebraic Structures and Smarandache Bialgebraic Structures"* dan *"Smarandache Loops"*. Dalam tulisannya tersebut, W. B. Vasantha Kandasamy menjelaskan tentang pengertian loop dan loop Smarandache beserta sifat-sifatnya.

KAJIAN TEORI

Definisi 2.1

Himpunan tak kosong G dengan operasi biner "$*$" pada G disebut grup jika dan hanya jika:

i. $a * b \in G$, untuk setiap $a, b \in G$. (sifat tertutup)
ii. $(a * b) * c = a * (b * c)$, untuk setiap $a, b, c \in G$. (sifat asosiatif)
iii. terdapat $e \in G$ sedemikian hingga $a * e = e * a = a$, untuk setiap $a \in G$. (e disebut elemen identitas).
iv. untuk setiap $a \in G$, terdapat $a^{-1} \in G$ berlaku $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$. ($a^{-1}$ disebut invers dari a).

G dengan operasi $*$ membentuk grup, dinotasikan dengan $(G,*)$.

Definisi 2.2

Suatu himpunan bagian H yang tak kosong dari G dan membentuk grup dengan operasi yang sama pada G disebut subgrup dan dinotasikan dengan $H \leq) G$.

Definisi 2.3

Grup $(G,*)$ dikatakan grup siklik jika terdapat $a \in G$ sedemikian hingga $G = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\} = \langle a \rangle$, dengan a disebut dengan generator atau pembangun.

PEMBAHASAN

Definisi 3.1

Himpunan tak kosong L dengan operasi biner " $*$ " disebut *loop* jika memenuhi:

1. $a * b \in L$ untuk setiap $a, b \in L$.
2. Terdapat $e \in L$ sedemikian hingga $a * e = e\ * a = a$ untuk setiap $a \in L$.

Untuk setiap $(a, b) \in L \times L$, terdapat $(x, y) \in L \times L$ sedemikian hingga $a * x = b$ dan $y * a = b$.

Definisi 3.2

Diberikan loop L. Subset tak kosong H dari L disebut *subloop* dari L jika H merupakan loop dengan operasi yang sama pada L.

Definisi 3.3

Sebuah loop L dengan operasi " $*$ " dikatakan *loop komutatif* jika untuk setiap $a, b \in L$ berlaku $a * b = b * a$.

Definisi 3.4

Sebuah loop L dikatakan *loop tidak komutatif kuat* jika $xy \neq yx$ untuk setiap $x, y \in L$ ($x \neq y$, $x \neq e$, $y \neq e$, e adalah elemen identitas loop L).

Definisi 3.5

Himpunan L merupakan loop, himpunan L dikatakan *loop Bol* jika $\big((xy)z\big)y = x\big((yz)y\big)$ untuk setiap $x, y, z \in L$.

Definisi 3.6

Diberikan loop L. Loop L dikatakan *loop asosiatif kuat* jika setiap anggota L membangun sebuah subgrup.

Definisi 3.7

Himpunan L merupakan loop, loop L dikatakan *loop* diasosiatif jika setiap dua elemen dari L membangun sebuah subgrup.

Definisi 3.8

Diberikan loop L. Loop L dikatakan *loop komutatif semikanan* jika untuk setiap $a, b \in L$ terdapat $c \in L$ sedemikian hingga $ab = c(ba)$ atau $(cb)a$.

Definisi 3.9

Diberikan loop L, jika untuk setiap $x, y, z \in L$ paling sedikit memenuhi salah satu dari pernyataan berikut:

i. $xy = z(yx)$ atau $(zy)x$
ii. $yz = x(zy)$ atau $(xz)y$
iii. $zx = y(xz)$ atau $(yx)z$

maka loop L merupakan *loop komutatif semikanan kuat*.

Teorema 3.1

Setiap loop komutatif semikanan kuat merupakan loop komutatif.

Teorema 3.2

Setiap loop komutatif L, secara umum bukan loop komutatif semikanan kuat.

Teorema 3.3

Setiap loop komutatif merupakan loop komutatif semikanan.

Bukti:

Diberikan loop L merupakan loop komutatif, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} ab &= ba \\ &= eba \\ &= e(ba) \text{ atau } (eb)a \end{aligned}$$

Berdasarkan definisi loop komutatif semikanan, terdapat $c \in L$ sedemikian hingga $ab = c(ba)$atau $(cb)a$, untuk setiap $a, b \in L$, sehingga dapat diambil $e = c$ maka diperoleh:

$$ab = e(ba) \text{ atau } (eb)a$$
$$ab = c(ba) \text{ atau } (cb)a$$

Jadi terbukti bahwa setiap loop komutatif merupakan loop komutatif semikanan.■

Teorema 3.4

Setiap loop komutatif semikanan tidak selalu loop komutatif semikanan kuat.

Definisi 3.10

Diberikan himpunan tak kosong $L_n(m) = \{e, 1,2,3, \cdots, n\}$, ($e$ adalah elemen identitas pada $L_n(m)$) dengan $n > 3$, n ganjil dan m bilangan bulat positif sedemikian hingga $(m, n) = 1$ dan $(m - 1, n) = 1$, $m < n$. Didefinisikan operasi biner "$\bullet$" pada $L_n(m)$ dengan:

i. $e \bullet i = i \bullet e = i$ untuk setiap $i \in L_n(m)$;
ii. $i \bullet i = i^2 = e$ untuk setiap $i \in L_n(m)$;
iii. $i \bullet j = t$ dengan $t = (mj - (m - 1)i)(\text{mod } n)$ untuk setiap $i, j \in L_n(m)$, $i \neq j$, $i \neq e$, dan $j \neq e$;

maka $L_n(m)$ merupakan loop.

Definisi 3.11

Diberikan loop $(L, \bullet)$. Loop *Smarandache* (S-loop) merupakan loop L sedemikian hingga subset sejati A dari L merupakan subgrup dengan operasi yang sama pada L, $\emptyset \neq A \subset L$.

Teorema 3.5
Setiap loop asosiatif kuat merupakan loop *Smarandache* (S-loop).
Bukti:
Diambil sebarang loop asosiatif kuat L, sehingga untuk setiap $a \in L$ himpunan yang dibangun oleh a merupakan subgrup (berdasarkan definisi loop asosiatif kuat).
Diambil sebarang $a \in L$, sehingga himpunan yang dibangun oleh a pada L adalah subset.
Karena himpunan yang dibangun oleh a membentuk subgrup, maka setiap subset dari L adalah subgrup.
Jadi setiap subset sejati dari L juga merupakan subgrup dengan operasi yang sama pada L, sehingga berdasarkan definisi S-loop maka untuk setiap loop asosiatif kuat merupakan S-loop. ■
Teorema 3.6
Setiap loop diasosiatif merupakan loop *Smarandache*.
Bukti:
Diberikan sebarang loop diasosiatif L, maka untuk setiap dua elemen dari L membangun sebuah subgrup. Diambil sebarang $a, b \in L$ sehingga himpunan yang dibangun oleh a dan b adalah subgrup. Sehingga memenuhi:

1. Himpunan yang dibangun oleh a pada L akan membentuk subset dari L.
2. Himpunan yang dibangun oleh b pada L akan membentuk subset dari L.

Oleh karena itu, ada subset sejati yang dibangun oleh a atau b pada L yang membentuk subgrup dengan operasi yang sama pada L.
Jadi terbukti bahwa setiap loop diasosiatif merupakan S-loop. ■

Teorema 3.7
Setiap loop $L_n(m)$ untuk $n > 3$, n ganjil, $(n,m) = (n,m-1) = 1$ dengan $m < n$ merupakan loop *Smarandache*.
Bukti:
Diberikan sebarang loop $L_n(m)$ untuk $n > 3$, n ganjil, $(n,m) = (n,m-1) = 1$ dengan $m < n$ yang memenuhi ketiga sifat.
Diambil sebarang $a \in L_n(m)$ sehingga diperoleh:
$$a \cdot a = e$$
$$a \cdot a \cdot a = a$$
Maka a membangun $\{e, a\}$ yang merupakan subgrup.
Jadi setiap loop $L_n(m)$ merupakan asosiatif kuat dan berdasarkan teorema 3.5 maka loop $L_n(m)$ merupakan S-loop.
Teorema 3.8
Setiap loop Bol merupakan loop Smarandache (S-loop).
Bukti:
Diberikan sebarang loop Bol L.
Diambil sebarang $a \in L$, maka himpunan yang dibangun oleh a akan membentuk subgrup dengan operasi yang sama pada L.
Karena sebarang $a \in L$ membentuk subgrup dan berdasarkan definisi loop asosiatif kuat, maka L merupakan loop asosiatif kuat.
Karena L merupakan loop asosiatif kuat, maka berdasarkan teorema 3.5 L merupakan S-loop. ■

SIMPULAN

Dari uraian pada Bab III, dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Loop bukan merupakan sebuah grup tetapi grup pasti merupakan sebuah loop.
2. Loop komutatif semikanan kuat merupakan loop komutatif dan juga merupakan loop komutatif semi kanan.
3. Loop komutatif merupakan loop komutatif semikanan tetapi belum tentu merupakan loop komutatif semikanan kuat.
4. Loop komutatif semikanan merupakan loop komutatif tetapi bukan merupakan loop komutatif semikanan kuat.
5. Loop asosiatif kuat merupakan loop Smarandache dan juga merupakan loop diasosiatif.
6. Loop $L_n(m)$ merupakan loop Smarandache karena subset sejatinya memnbentuk subgrup.
7. Loop Bol merupakan loop Smarandache.

REFERENCES

[1] Vasantha, Kandasamy W.B. 2002. *SMARANDACHE LOOPS*. Department of Mathematics, Indian Institute of Technology, Madras, Chennai – 600036, India. (di download dari

http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/eBooks-Book4.pdf pada tanggal 24 November 2010 pukul 00.34)

[2] Vasantha, Kandasamy W.B. 2003. *Bialgebraic Structures and Smarandache Bialgebraic Structures*. Department of Mathematics, Indian Institute of Technology, Madras, Chennai – 600036, India. (di download pada tanggal 23 November 2010 pukul 23.48)

[3] Vasantha, Kandasamy W.B. *Smarandache Loops*. Department of Mathematics, Indian Institute of Technology, Madras, Chennai – 600036, India. (di download pada tanggal 23 November 2010 pukul 23.15)

[4] Gallian, Joseph A. 1990. *Contemporary Abstract Algebra*. New York: Addison-Wesley Publishing Company.