

ANALISIS PENYELESAIAN SISTEM PEGAS MASSA DENGAN EKSITASI SENDIRI DAN EKSITASI PARAMETRIK MENGGUNAKAN METODE AVERAGING

Eli Kurniawati

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : elikurniawati16030214021@mhs.unesa.ac.id

Abstrak

Banyak permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yang dapat dinyatakan dengan model matematika. Salah satu contoh permasalahan di bidang mekanika yaitu vibrasi. Vibrasi yang dihasilkan oleh arus induksi pada suatu sistem mekanik dapat menyebabkan kerugian dan juga dapat membahayakan apabila frekuensinya intensif. Untuk meredam vibrasi atau eksitasi yg tak diinginkan dari sistem pegas massa dapat menggunakan eksitasi sendiri dan eksitasi parametrik. Sehingga, tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui bagaimana suatu vbrasi atau eksitasi yang tidak diinginkan dari sistem pegas massa dapat teredam. Metode averaging digunakan untuk menganalisis penyelesaian dari sistem. Hasil dari penelitian ini menunjukkan bahwa peredaman bergantung pada parameter peredam, yaitu θ_{11} dan θ_{22} . Ketika θ_{11} dan θ_{22} keduanya bernilai negatif, getaran tereksitasi sendiri tidak dapat teredam dan getaran tereksitasi parametrik dapat teredam. Ketika θ_{11} bernilai positif dan θ_{22} bernilai negatif, getaran tereksitasi sendiri dapat teredam dan getaran tereksitasi parametrik tidak dapat teredam. Ketika θ_{11} dan θ_{22} keduanya bernilai positif, getaran tereksitasi sendiri dan getaran tereksitasi parametrik dapat teredam.

Kata kunci: Sistem pegas massa, vibrasi, eksitasi sendiri, eksitasi parametrik, metode averaging.

Abstract

Many problems in everyday life can be expressed by mathematical models. One example of problems in the field of mechanics is vibration. Vibration generated by induced currents in a mechanical system can cause harm and can also be dangerous if the frequency of occurrence is intensive. To reduce the unwanted vibrations or excitation of the mass spring system, it can use its own excitation and parametric excitation. So, the purpose of this research is to find out how an undesirable vibration or excitation of the mass spring system can be suppressed. Averaging method is used to analyze the solution of the system. The results of this study indicate that the damping depends on the parameters θ_{11} and θ_{22} . When θ_{11} and θ_{22} are both negative, the self excited vibration is not damped and the parametric excited vibration is damped. When θ_{11} is positive and θ_{22} is negative, the self excited vibration is damped and the parametric excited vibration is not damped. When θ_{11} and θ_{22} are both positive, the self-excited vibration and the parametric excited vibration are damped.

Keywords : Mass spring system, vibration, self excited, parametrically excited, averaging method.

1. PENDAHULUAN

Banyak permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yang muncul dalam berbagai bidang ilmu. Salah satu contohnya adalah di bidang mekanika yang dapat dinyatakan dengan model matematika dalam bentuk persamaan diferensial (Thomson, 1981). Sebagai contoh permasalahan di bidang mekanik yaitu sistem mekanik yang bekerja seringkali menimbulkan suatu permasalahan yang sulit dihindari yaitu vibrasi (getaran) yang berlebihan (Tondl, 2000).

Vibrasi (getaran) yang dihasilkan oleh suatu sistem mekanik disebabkan oleh arus induksi yang dapat menyebabkan kerugian (Nayfeh & Mook, 1995).

Misalnya, arus induksi yang ditimbulkan oleh angin yang biasanya menerpa konstruksi-konstruksi seperti menara tinggi, kereta gantung, jembatan gantung, atau gedung-gedung pencakar langit. Arus semacam itu jika frekuensi kejadiannya intensif, maka hal tersebut akan mengakibatkan kerusakan pada konstruksi yang tidak hanya merugikan tetapi juga dapat membahayakan.

Pada penelitian yang telah dilakukan oleh Abadi (2003), yaitu tentang sistem autparametrik yang tereksitasi secara sendiri menunjukkan adanya dua kasus resonan, yaitu resonan eksak dan resonan tak eksak. Sedangkan, pada penelitian yang telah dilakukan oleh Fatimah (2000), yaitu tentang sistem autparametrik yang

ANALISIS PENYELESAIAN SISTEM PEGAS MASSA DENGAN EKSITASI SENDIRI DAN EKSITASI PARAMETRIK MENGGUNAKAN METODE AVERAGING

terekitasi secara parametrik menunjukkan bahwa eksitasi parametrik dapat menekan eksitasi sendiri.

Telah dilakukan penelitian untuk mencari cara yang paling efektif dan efisien dalam meredam atau mengurangi vibrasi yang ditimbulkan oleh arus induksi pada sistem mekanik. Untuk mengurangi pengaruh dari arus induksi pada suatu sistem mekanik telah banyak digunakan absorber, yaitu peredam yang menggunakan kombinasi pegas dan massa. Hasil penelitian Tondl (1976) dan Tondl & Ecker (2003) menunjukkan bahwa cara tersebut dapat mengurangi vibrasi dengan efektif.

Sistem pegas massa semakin dikembangkan oleh para peneliti. Penelitian yang telah dilakukan oleh Tondl & Nabergoj (2004) mengkaji tentang pengaruh eksitasi parametrik terhadap eksitasi sendiri pada sistem tiga massa. Hasil dari penelitian tersebut menunjukkan bahwa peredam dinamis dengan eksitasi parametrik dapat menekan getaran terekitasi sendiri dan memperluas daerah dimana penghapusan getaran secara penuh.

Pada penelitian ini akan mengkaji model sistem pegas massa dengan eksitasi sendiri dan eksitasi parametrik berdasarkan model yang telah dikaji oleh Fatimah (2012) namun dengan analisis penyelesaian kasus yang berbeda. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui bagaimana kombinasi dari eksitasi sendiri dan eksitasi parametrik dapat meredam vibrasi atau eksitasi yang tidak diinginkan dari suatu sistem. Metode yang digunakan adalah metode averaging.

2. KAJIAN TEORI

Vibrasi

Setiap gerak osilasi suatu sistem mekanik di sekitar posisi kesetimbangannya dinamakan vibrasi (getaran). Pada sistem mekanik, terdapat dua kelompok getaran yang umum, yaitu getaran bebas (*free vibration*) dan getaran yang disebabkan oleh gaya (*forced vibration*) (Krodkiwski, 2008).

Getaran yang disebabkan oleh gaya (*forced vibration*) dapat diklasifikasikan menjadi dua, yaitu getaran terekitasi sendiri (*self excited vibrations*) dan getaran terekitasi secara parametrik (*parametrically excited vibrations*).

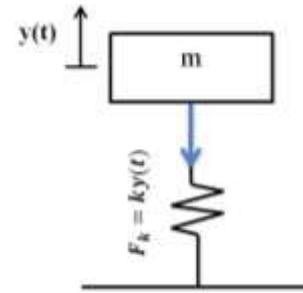
Getaran terekitasi sendiri dapat terjadi karena adanya medium yang mengalir. Misalnya, aliran air atau angin yang mengenai suatu struktur sehingga dapat menyebabkan suatu vibrasi yang dapat merusak struktur tersebut.

Sedangkan getaran terekitasi secara parametrik terjadi karena perubahan parameter sistem osilasi secara periodik terhadap waktu. (Dohnal & Verhulst, 2008).

Persamaan Differensial Getaran

1. Getaran Bebas Tanpa Redaman

Pada model yang paling sederhana yaitu getaran bebas di mana tidak ada gaya luar yang mempengaruhi massa.



Gambar 1. Getaran Bebas Tanpa Redaman

Pada gambar 1 terdapat gaya yang berlaku pada pegas sebanding dengan panjang peregangannya $y(t)$, yang sesuai dengan hukum Hooke, bila dirumuskan secara matematis:

$$F_k = ky(t), \quad (1)$$

dengan $k \in \mathbb{R}$ adalah tetapan pegas.

Berdasarkan hukum Newton II, berlaku:

$$\Sigma F = ma = m\ddot{y}(t) = m \frac{d^2y}{dt^2}. \quad (2)$$

Karena $F = F_k$, didapatkan persamaan diferensial biasa berikut:

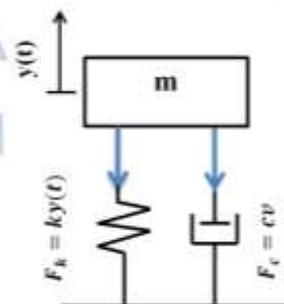
$$m\ddot{y}(t) + ky(t) = 0. \quad (3)$$

(Campbell & Haberman, 2008)

2. Getaran Bebas Dengan Redaman

Jika peredaman diperhitungkan, maka gaya peredam juga berlaku pada massa selain gaya yang disebabkan oleh peregangannya pegas. Sehingga berlaku gaya peredam sebagai berikut dengan $c \in \mathbb{R}$ dinamakan koefisien peredam.

$$F_d = cv = c\dot{y}(t) = c \frac{dy}{dt} \quad (4)$$



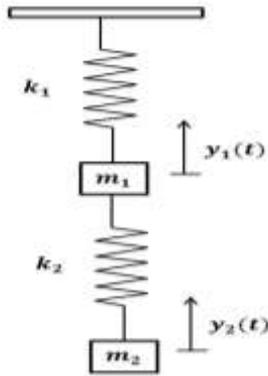
Gambar 2. Getaran Bebas Dengan Redaman

Dengan menjumlahkan semua gaya yang berlaku pada benda diperoleh persamaan:

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = 0. \quad (5)$$

(Campbell & Haberman, 2008)

Sistem Pegas Massa



Gambar 3. Sistem Pegas Dua Massa

Misalkan $y_1(t)$ menunjukkan perpindahan m_1 terhadap waktu dan $y_2(t)$ menunjukkan perpindahan m_2 terhadap waktu dari posisinya ketika sistem berada pada posisi ekuilibrium yang statis. Kemudian, dengan menggunakan hukum Hooke dan hukum Newton II dapat disimpulkan bahwa gerakan massa diatur oleh sistem persamaan diferensial berikut.

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2x}{dt^2} &= k_1 y_1(t) - k_2 (y_1(t) - y_2(t)), \\ m_2 \frac{d^2y}{dt^2} &= k_2 (y_1(t) - y_2(t)). \end{aligned} \tag{6}$$

(Goode & A. Annin, 2000)

Sistem Autoparametrik

Sistem autoparametrik merupakan suatu sistem getaran yang terdiri paling sedikit dua buah sub-sistem, yaitu sistem utama dan sistem sekunder (Tondl, 2000). Sistem utama pada sistem autoparametrik dapat memuat eksitasi eksternal, eksitasi sendiri, eksitasi parametrik, maupun kombinasi dari eksitasi-eksitasi tersebut.

Contoh dari sistem autoparametrik yang terdiri dari sistem utama yang tereksitasi eksternal:

$$\begin{aligned} x'' + \kappa_1 x' + x + \gamma_1 y^2 &= a\eta^2 \cos \tau, \\ y'' + \kappa_2 y' + q^2 y + \gamma_2 xy &= 0, \end{aligned} \tag{7}$$

di mana x, y adalah simpangan terhadap waktu, x', y' adalah kecepatan, x'', y'' adalah percepatan, $\kappa_1 > 0$ dan $\kappa_2 > 0$ adalah koefisien redaman, γ_1 dan γ_2 adalah koefisien coupling nonlinear, $q = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ adalah koefisien tuning yang menunjukkan rasio frekuensi alami dari subsistem tak teredam dan sistem primer, $a\eta^2$ menunjukkan amplitudo dari eksitasi eksternal, dan $\eta = \frac{\omega}{\omega_1}$ adalah frekuensi gaya luar. Sedangkan ω adalah frekuensi eksitasi dan ω_1, ω_2 adalah frekuensi alami masing-masing dari sistem primer dan sistem sekunder.

Contoh sistem autoparametrik yang terdiri dari sistem utama yang tereksitasi sendiri:

$$\begin{aligned} x'' - \beta(1 - \delta x'^2)x' + x + \gamma_1 y^2 &= 0, \\ y'' + \kappa y' + q^2 y + \gamma_2 xy &= 0, \end{aligned} \tag{8}$$

di mana $\kappa, \gamma_1, \gamma_2$, dan q mempunyai arti yang sama dengan kondisi sebelumnya dan $\beta > 0$ dan $\delta > 0$ adalah koefisien yang mewakili eksitasi sendiri tipe Rayleigh. Pada contoh sistem persamaan (7) dan (8), dipilih bentuk $\gamma_1 y^2$ sebagai istilah coupling nonlinear untuk sistem primer.

Contoh sistem autoparametrik yang terdiri dari sistem utama yang tereksitasi parametrik:

$$\begin{aligned} x'' + \kappa_1 x' + (1 + \alpha \cos 2\eta\tau)x + \gamma_1(x^2 + y^2)x &= 0, \\ y'' + \kappa_2 y' + q^2 y + \gamma_2 xy &= 0, \end{aligned} \tag{9}$$

di mana $\kappa_1, \kappa_2, \gamma_1, \gamma_2$ dan q adalah koefisien yang sama dengan sistem persamaan (7), η adalah frekuensi eksitasi, dan α adalah koefisien dari eksitasi parametrik.

(Tondl, 2000)

Metode Averaging

Prinsip dari metode averaging adalah dengan mengasumsikan adanya parameter ϵ pada sebuah persamaan osilator. Parameter ϵ merupakan parameter yang sangat kecil atau bisa dikatakan menuju nol dengan $\epsilon > 0$. Misalkan diketahui suatu sistem terperturbasi sebagai berikut:

$$\dot{x} = f(x, t) + \epsilon g(x, t, \epsilon), \quad x(t_0) = x_0, \tag{10}$$

di mana $\epsilon g(x, t, \epsilon)$ adalah suku perturbasi dari sistem (10), f dan g berperiode-T terhadap variabel t .

Persamaan averaged dari (10) adalah:

$$\dot{y} = \epsilon f^0(y) \quad y(t_0) = x_0 \quad \text{dengan} \quad f^0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, y) dt \tag{11}$$

Solusi $y(t)$ dari (11) adalah aproksimasi dari solusi $x(t)$ dari (10), dimana $x(t) - y(t) = O(\epsilon)$.

(Sanders & Verhulst, 1985)

Sebagai contoh, dimisalkan persamaan :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \epsilon F(x, \dot{x}, t), \tag{12}$$

Jika $\epsilon = 0$ maka solusinya adalah kombinasi linier $\cos t$ dan $\sin t$, atau dapat ditulis seperti berikut:

$$u \cos \omega t + v \sin \omega t, \tag{13}$$

atau dapat ditulis

$$R \cos(\omega t + \psi), \tag{14}$$

akan diuraikan (14), sehingga diperoleh

$$R \cos \omega t \cos \psi - R \sin \omega t \sin \psi,$$

dengan $u = R \cos \psi$ dan $v = -R \sin \psi$.

Sehingga bentuk lain dari (13) adalah (14),

di mana R adalah amplitudo dan ψ adalah fase di mana keduanya merupakan konstanta dan keduanya ditentukan oleh nilai awal.

Untuk mempelajari karakter dari solusi untuk setiap $\epsilon \neq 0$, Lagrange mengenalkan “variasi konstan/variasi parameter”. Ada sebuah asumsi, bahwa untuk setiap $\epsilon \neq 0$, maka solusinya berbentuk fungsi waktu, di mana amplitudonya adalah R dan fasenya adalah ψ .

ANALISIS PENYELESAIAN SISTEM PEGAS MASSA DENGAN EKSITASI SENDIRI DAN EKSITASI PARAMETRIK MENGGUNAKAN METODE AVERAGING

Untuk menentukan penyelesaian umum dari persamaan (12) dengan menggunakan persamaan karakteristik dimana diperoleh (13) atau (14).

Dari persamaan (13) dimisalkan penyelesaian khususnya,yaitu:

$$x(t) = u(t) \cos \omega t + v(t) \sin \omega t \quad (15)$$

Kemudian (15) diturunkan untuk mendapatkan $\dot{x}(t)$ sebagai berikut :

$$\dot{x}(t) = -u(t)\omega \sin \omega t + v(t)\omega \cos \omega t + \dot{u} \cos \omega t + \dot{v} \sin \omega t \quad (16)$$

Selanjutnya dipilih dua suku terakhir pada ruas kanan persamaan (16) sama dengan nol,

$$\dot{u} \cos \omega t + \dot{v} \sin \omega t = 0 \quad (17)$$

Sehingga, persamaan (11) menjadi

$$\dot{x}(t) = -u(t)\omega \sin \omega t + v(t)\omega \cos \omega t \quad (18)$$

Substitusi $x(t)$, $\dot{x}(t)$ atau (15) dan (18) pada persamaan (12) sehingga diperoleh :

$$-\dot{u}\omega \sin \omega t + \dot{v}\omega \cos \omega t = \varepsilon F(u \cos \omega t + v \sin \omega t, -u\omega \sin \omega t + v\omega \cos \omega t, t) \quad (19)$$

Persamaan (17) dan (19) dapat dianggap sebagai dua persamaan untuk \dot{u} dan \dot{v} , sebagai berikut:

$$\dot{u} = -\frac{\varepsilon}{\omega} \sin \omega t F(u \cos \omega t + v \sin \omega t, -u\omega \sin \omega t + v\omega \cos \omega t, t) \quad (20)$$

$$\dot{v} = \frac{\varepsilon}{\omega} \cos \omega t F(u \cos \omega t + v \sin \omega t, -u\omega \sin \omega t + v\omega \cos \omega t, t) \quad (21)$$

Sehingga dengan menggunakan pemisalan (15) diperoleh (20) dan (21)

Dari persamaan (14) dimisalkan penyelesaian khususnya,yaitu:

$$x(t) = R(t) \cos(\omega t + \psi(t)) \quad (22)$$

Dengan menurunkan (22), diperoleh:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -R(t) \sin(\omega t + \psi(t)) (\omega + \dot{\psi}) + \dot{R} \cos(\omega t + \psi(t)), \\ \dot{x}(t) &= -R(t)\omega \sin(\omega t + \psi(t)) - R(t)\dot{\psi} \sin(\omega t + \psi(t)) \\ &\quad + \dot{R} \cos(\omega t + \psi(t)). \end{aligned}$$

Berdasarkan (17) maka turunan dari (22) dipilih dua suku terakhir pada ruas kanan sama dengan nol

$$-R(t)\dot{\psi} \sin(\omega t + \psi(t)) + \dot{R} \cos(\omega t + \psi(t)) = 0$$

Sehingga diperoleh :

$$\dot{x}(t) = -R(t)\omega \sin(\omega t + \psi(t)) \quad (23)$$

Substitusi untuk setiap x dan \dot{x} atau (22) dan (23) ke persamaan (12) sehingga dihasilkan persamaan untuk setiap r dan ψ

$$\begin{aligned} -\dot{R} \omega \sin(\omega t + \psi) - R \omega \cos(\omega t + \psi) (\omega + \dot{\psi}) \\ + R \omega^2 \cos(\omega t + \psi) \\ = \varepsilon F(R \cos(\omega t + \psi), -R \omega \sin(\omega t + \psi)). \end{aligned}$$

Atau dapat ditulis :

$$-\dot{R} \omega \sin(\omega t + \psi) - R \omega \cos(\omega t + \psi) \dot{\psi} = \varepsilon F(R \cos(\omega t + \psi), -R \omega \sin(\omega t + \psi)). \quad (24)$$

Persyaratan yang lainnya yaitu penurunan pada sisi kanan persamaan (22) harus menghasilkan pernyataan yang sama dengan sisi kanan persamaan (23). Sehingga didapatkan:

$$\begin{aligned} \dot{R} \cos(\omega t + \psi) - R \sin(\omega t + \psi) (\omega + \dot{\psi}) \\ = -R \omega \sin(\omega t + \psi), \end{aligned}$$

atau dituliskan:

$$\dot{R} \cos(\omega t + \psi) - \dot{\psi} R \sin(\omega t + \psi) = 0. \quad (25)$$

Persamaan (24) dan (25) dapat dianggap sebagai dua persamaan untuk \dot{R} dan $\dot{\psi}$, sebagai berikut:

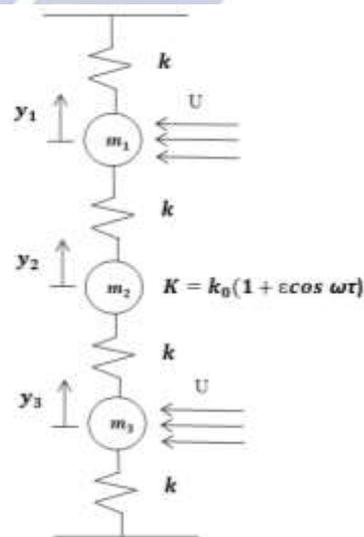
$$\dot{R} = -\frac{\varepsilon}{\omega} \sin(\omega t + \psi) F(R \cos(\omega t + \psi), -R \omega \sin(\omega t + \psi)) \quad (26)$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\varepsilon}{R \omega} \cos(\omega t + \psi) F(R \cos(\omega t + \psi), -R \omega \sin(\omega t + \psi)) \quad (27)$$

Sehingga dengan menggunakan pemisalan (22) diperoleh (26) dan (27)

2. PEMBAHASAN

Model Sistem Pegas Tiga Massa dengan Eksitasi Sendiri dan Eksitasi Parametrik



Gambar 4. Sistem Pegas Massa Yang Dibahas

Sistem ini terdiri dari tiga buah massa, yaitu massa pertama (m_1), massa kedua (m_2), dan massa ketiga (m_3) di mana ketiga massa tersebut dihubungkan dengan pegas yang mempunyai kelenturan k . Getaran yang diinduksi aliran bekerja pada massa pertama (m_1) dan massa ketiga (m_3) sehingga menyebabkan terjadinya

eksitasi sendiri. Gaya self-excited yang dihasilkan oleh arus bekerja pada massa pertama (m_1) dan massa ketiga (m_3) yang diwakili oleh kekuatan Rayleigh dalam bentuk $U^2(1 - \gamma_0 \dot{y}_i^2) \dot{y}_i, i = 1, 3$ dengan b dan γ_0 adalah koefisien positif dan U adalah kecepatan arus. Redaman linear dari massa kedua (m_2) memiliki koefisien b_0 . Sementara variabel kelenturan bervariasi secara periodik dalam waktu sebagai $k_0(1 + \varepsilon \cos \omega t)$ sehingga menyebabkan terjadinya eksitasi parametrik.

Sehingga, model dari sistem pegas massa tersebut adalah:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + k(2y_1 - y_2) - bU^2(1 - \gamma_0 \dot{y}_1^2) \dot{y}_1 &= 0, \\ m_2 \ddot{y}_2 + 2ky_2 - k(y_1 + y_3) + k_0(1 + \varepsilon \cos \omega t)y_2 + &+ b_0 \dot{y}_2 = 0, \\ m_3 \ddot{y}_3 + k(2y_3 - y_2) - bU^2(1 - \gamma_0 \dot{y}_3^2) \dot{y}_3 &= 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Di mana : m_i = massa setiap elemen, y_i = simpangan \ddot{y}_i = percepatan yang ditimbulkan oleh gaya yang bekerja pada setiap elemen, \dot{y}_i = kecepatan setiap elemen, dengan $i = 1, 2, 3$, k = kelenturan pegas, k_0 = kelenturan pegas, U = kecepatan arus.

Asumsi : massa pegas diabaikan, gerak pegas lurus vertical, massa elemen hanya bergerak dalam satu arah, massa elemen konstan.

Analisis Penyelesaian Sistem Pegas Massa

Kasus yang dibahas berbeda dengan kasus yang dibahas oleh Fatimah di mana $m_1 = m_2 = m_3 = m$. Pada penelitian ini akan dibahas kasus saat $m_1 = m_3 = m$. Menggunakan transformasi waktu $\omega_0 t \rightarrow \tau$, dimana

$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ adalah frekuensi alami massa m_1 dan m_3 , dan dengan menggunakan parameter yang sangat kecil, yaitu ε . Rescale $\bar{\beta} = \varepsilon \beta, \bar{\kappa} = \varepsilon \kappa$ pada sistem (33), diperoleh:

$$\begin{aligned} y_1'' + y_1 - \frac{1}{2}y_2 - \varepsilon \beta V^2(1 - \gamma y_1'^2)y_1' &= 0, \\ y_2'' + My_2 - \frac{1}{2}M(y_1 + y_3) + q^2(1 + \varepsilon \cos \eta \tau)y_2 + &+ \varepsilon \kappa y_2' = 0, \\ y_3'' + y_3 - \frac{1}{2}y_2 - \varepsilon \beta V^2(1 - \gamma y_3'^2)y_3' &= 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Di mana $V = \frac{U}{U_0}, \beta = \frac{bU^2}{m\omega_0^2}, \gamma = \gamma_0 \omega_0^2, \eta = \frac{\omega}{\omega_0}, \kappa = \frac{b_0}{m_2 \omega_0}, q^2 = \frac{k_2}{m_2 \omega_1^2}, M = \frac{m}{m_2}$ dengan U_0 merupakan nilai yang dipilih untuk kecepatan arus.

Transformasi persamaan (34) menjadi bentuk quasi-normal menggunakan transformasi linier berikut:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 + x_3, \\ y_2 &= a_1 x_1 + a_2 x_2, \\ y_3 &= x_1 + x_2 - x_3. \end{aligned} \quad (35)$$

Dengan mensubstitusikan (35) ke (34), diperoleh:

$$\begin{aligned} x_1'' + \Omega_1^2 x_1 &= \varepsilon [\theta_{11} x_1' + \theta_{12} x_2' \\ &+ (Q_{11} x_1 + Q_{12} x_2) \cos \eta \tau + f_{11} x_1'^3 \\ &+ f_{12} x_1'^2 x_2' + f_{21} x_1' x_2'^2 + f_{22} x_2'^3 \\ &+ f_{13} x_1' x_3'^2 + f_{23} x_2' x_3'^2], \\ x_2'' + \Omega_2^2 x_2 &= \varepsilon [\theta_{21} x_1' + \theta_{22} x_2' + (Q_{21} x_1 + \\ &+ Q_{22} x_2) \cos \eta \tau + f_{11} x_1'^3 + f_{12} x_1'^2 x_2' + f_{21} x_1' x_2'^2 + \\ &+ f_{22} x_2'^3 + f_{13} x_1' x_3'^2 + f_{23} x_2' x_3'^2], \\ x_3'' + \Omega_3^2 x_3 &= \varepsilon [\theta_{33} x_3' + f_{33} x_3'^3 + f_{31} x_1'^2 x_3' + f_{32} x_2'^2 x_3' \\ &+ f_{123} x_1' x_2' x_3']. \end{aligned} \quad (36)$$

Dengan:

$$\begin{aligned} \Omega_1^2 &= \frac{1}{2} [(1 + M + q^2) \pm \sqrt{(1 - M - q^2)^2 + 2M}], \\ \Omega_2^2 &= \frac{1}{2} [(1 + M + q^2) \pm \sqrt{(1 - M - q^2)^2 + 2M}], \\ \Omega_3^2 &= 1, \\ a_{1,2} &= (1 - M - q^2) \pm \sqrt{(1 - M - q^2)^2 + 2M}, \\ \theta_{11} &= -\frac{1}{(a_1 - a_2)} (a_1 \kappa + a_2 \beta V^2), \\ \theta_{12} &= -\frac{a_2}{(a_1 - a_2)} (\kappa + \beta V^2), \\ Q_{11} &= -\frac{a_1}{(a_1 - a_2)} q^2, Q_{12} = -\frac{a_2}{(a_1 - a_2)} q^2, \\ \theta_{21} &= \frac{a_1}{(a_1 - a_2)} (\kappa + \beta V^2), \theta_{22} = \frac{1}{(a_1 - a_2)} (a_2 \kappa + a_1 \beta V^2), \\ Q_{21} &= \frac{a_1}{(a_1 - a_2)} q^2, Q_{22} = \frac{a_2}{(a_1 - a_2)} q^2, \\ \theta_{33} &= \beta V^2 \\ f_{11} &= f_{22} = \frac{a_2}{(a_1 - a_2)} \beta V^2 \gamma, \\ f_{12} &= f_{21} = f_{13} = f_{23} = \frac{a_2}{(a_1 - a_2)} \beta V^2 (\gamma - 2). \\ f_{33} &= -\beta V^2 \gamma, f_{31} = f_{32} = (-\gamma + 2) \beta V^2, f_{123} = \beta V^2. \end{aligned}$$

Dari sistem (36) dapat diperhatikan bahwa eksitasi parametrik hanya terjadi pada koordinat normal x_1, x_2 . Ada tiga frekuensi alami dari sistem (36), yaitu Ω_1, Ω_2 , dan $\Omega_3 = 1$.

Kasus yang dibahas adalah kasus kombinasi parametrik anti resonansi dengan munculnya detuning $\eta = \eta_0 + \varepsilon$, dimana $\eta_0 = \Omega_2 - \Omega_1$. Dengan menggunakan transformasi waktu $\eta \tau \rightarrow t$ sistem persamaan (36) menjadi:

$$\begin{aligned} x_1'' + \omega_1^2 x_1 &= \frac{\varepsilon}{\eta_0^2} F_1(x_1, x_1', x_2, x_2', x_3, x_3'), \\ x_2'' + \omega_2^2 x_2 &= \frac{\varepsilon}{\eta_0^2} F_2(x_1, x_1', x_2, x_2', x_3, x_3'), \\ x_3'' + \omega_3^2 x_3 &= \frac{\varepsilon}{\eta_0^2} F_3(x_1, x_1', x_2, x_2', x_3, x_3'), \end{aligned} \quad (37)$$

di mana $\omega_i = \frac{\Omega_i}{\eta_0}, i = 1, 2$ dan

ANALISIS PENYELESAIAN SISTEM PEGAS MASSA DENGAN EKSITASI SENDIRI DAN EKSITASI PARAMETRIK MENGGUNAKAN METODE AVERAGING

$$F_1(x_1, x_1', x_2, x_2', x_3, x_3') = 2\omega_1\Omega_1\sigma x_1 + \eta_0(\theta_{11}x_1' + \theta_{12}x_2') + (Q_{11}x_1 + Q_{12}x_2)\cos t + \eta_0^3(f_{11}x_1'^3 + f_{12}x_1'^2x_2' + f_{21}x_1'x_2'^2 + f_{22}x_2'^3 + f_{13}x_1'x_3'^2 + f_{23}x_2'x_3'^2)$$

$$F_2(x_1, x_1', x_2, x_2', x_3, x_3') = 2\omega_2\Omega_2\sigma x_2 + \eta_0(\theta_{21}x_1' + \theta_{22}x_2') + (Q_{21}x_1 + Q_{22}x_2)\cos t + \eta_0^3(f_{11}x_1'^3 + f_{12}x_1'^2x_2' + f_{21}x_1'x_2'^2 + f_{22}x_2'^3 + f_{13}x_1'x_3'^2 + f_{23}x_2'x_3'^2)$$

$$F_3(x_1, x_1', x_2, x_2', x_3, x_3') = 2\omega_3\Omega_3\sigma x_3 + \eta_0\theta_{33}x_3' + \eta_0^3(f_{33}x_3'^3 + f_{31}x_1'^2x_3' + f_{32}x_2'^2x_3' + f_{123}x_1'x_2'x_3')$$

Dengan menggunakan pemisalan

$$\begin{aligned} x_i &= u_i \cos \omega_i t + v_i \sin \omega_i t, \\ x_i' &= -\omega_i u_i \sin \omega_i t + \omega_i v_i \cos \omega_i t. \end{aligned} \quad (38)$$

Di mana $i = 1, 2, 3$.

Substitusi persamaan (38) ke (37). Berdasarkan (15) dengan menggunakan pemisalan (38) akan diperoleh

$$u_i' = -\frac{\varepsilon}{\omega_i} \sin \omega_i t F_i(u_i \cos \omega_i t + v_i \sin \omega_i t, -u_i \omega_i \sin \omega_i t + v_i \omega_i \cos \omega_i t) \quad (39)$$

$$v_i' = \frac{\varepsilon}{\omega_i} \cos \omega_i t F_i(u_i \cos \omega_i t + v_i \sin \omega_i t, -u_i \omega_i \sin \omega_i t + v_i \omega_i \cos \omega_i t) \quad (40)$$

Ruas kanan (39) dan (40) diaveraged sebesar $\frac{2\pi}{\omega}$. Sehingga menjadi :

$$u_i' = \frac{\omega_i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon}{\omega_i} \sin \omega_i t F_i(u_i \cos \omega_i t + v_i \sin \omega_i t, -u_i \omega_i \sin \omega_i t + v_i \omega_i \cos \omega_i t) dt \quad (41)$$

$$v_i' = \frac{\omega_i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon}{\omega_i} \cos \omega_i t F_i(u_i \cos \omega_i t + v_i \sin \omega_i t, -u_i \omega_i \sin \omega_i t + v_i \omega_i \cos \omega_i t) dt \quad (42)$$

Setelah menghilangkan faktor rescale $\frac{\varepsilon}{\eta_0^2}$, diperoleh:

$$\begin{aligned} u_1' &= -\Omega_1 \sigma v_1 - \frac{1}{2} \eta_0 \theta_{11} u_1 + \frac{1}{4} \frac{Q_{12}}{\omega_1} v_2 + g(u_1, v_1, u_2 v_2, u_3, v_3), \\ v_1' &= \Omega_1 \sigma u_1 - \frac{1}{2} \eta_0 \theta_{11} v_1 - \frac{1}{4} \frac{Q_{12}}{\omega_1} u_2 + h(u_1, v_1, u_2 v_2, u_3, v_3), \\ u_2' &= -\Omega_2 \sigma v_2 - \frac{1}{2} \eta_0 \theta_{22} u_2 + \frac{1}{4} \frac{Q_{21}}{\omega_2} v_1 + g(u_1, v_1, u_2 v_2, u_3, v_3), \\ v_2' &= \Omega_2 \sigma u_2 - \frac{1}{2} \eta_0 \theta_{22} v_2 - \frac{1}{4} \frac{Q_{21}}{\omega_2} u_1 + h(u_1, v_1, u_2 v_2, u_3, v_3), \\ u_3' &= -\Omega_3 \sigma v_3 - \frac{1}{2} \eta_0 \theta_{33} u_3 + j(u_1, v_1, u_2 v_2, u_3, v_3), \\ v_3' &= \Omega_3 \sigma u_3 - \frac{1}{2} \eta_0 \theta_{33} v_3 + k(u_1, v_1, u_2 v_2, u_3, v_3), \end{aligned} \quad (43)$$

di mana $g(u_1, v_1, u_2 v_2, u_3, v_3)$, $h(u_1, v_1, u_2 v_2, u_3, v_3)$, $j(u_1, v_1, u_2 v_2, u_3, v_3)$, $k(u_1, v_1, u_2 v_2, u_3, v_3)$ merupakan fungsi nonlinier dari sistem (43).

Linearisasi persamaan (43) sehingga diperoleh matriks Jacobian

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\eta_0\theta_{11} & -\Omega_1\sigma & 0 & \frac{1}{4}\frac{Q_{12}}{\omega_1} & 0 & 0 \\ \Omega_1\sigma & -\frac{1}{2}\eta_0\theta_{11} & -\frac{1}{4}\frac{Q_{12}}{\omega_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\frac{Q_{21}}{\omega_2} & -\frac{1}{2}\eta_0\theta_{22} & -\Omega_2\sigma & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4}\frac{Q_{21}}{\omega_2} & 0 & \Omega_2\sigma & -\frac{1}{2}\eta_0\theta_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\eta_0\theta_{33} & -\Omega_3\sigma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega_3\sigma & -\frac{1}{2}\eta_0\theta_{33} \end{pmatrix}$$

Dengan persamaan karakteristik

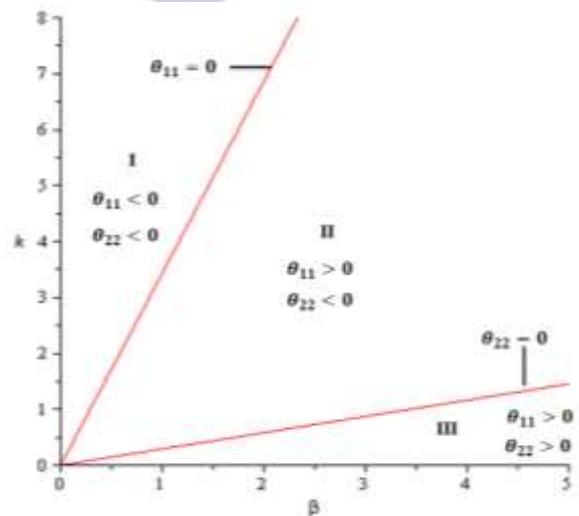
$$c_0\lambda^6 + c_1\lambda^5 + c_2\lambda^4 + c_3\lambda^3 + c_4\lambda^2 + c_5\lambda + c_6 = 0$$

dimana $c_i, i = 0..6$, bergantung pada parameter.

Untuk menentukan interval kestabilan pada persamaan karakteristik diterapkan kriteria Routh-Hurwitz

$$\begin{aligned} \text{rh-A} \quad & \theta_{11} + \theta_{22} > 0 \\ \text{rh-B} \quad & k_0\sigma^6 + k_1\sigma^4 + k_2\sigma^2 + k_3 > 0 \end{aligned}$$

di mana $k_j, j = 1, 2, 3$ tergantung pada q, M, κ, β dan nilai parameter-parameter lain ditetapkan. Dengan menyelesaikannya pada daerah batasnya, diperoleh daerah batas-batas untuk θ_{11} dan θ_{22} yang ditunjukkan pada gambar 5.



Gambar 5. Batas-batas untuk θ_{11} dan θ_{22} ketika $M = 1, q = 0.8$

Pada gambar 5 menunjukkan bahwa terdapat tiga daerah batas-batas untuk θ_{11} dan θ_{22} . Daerah I menunjukkan bahwa θ_{11} dan θ_{22} keduanya bernilai negatif. Daerah II menunjukkan bahwa θ_{11} bernilai positif dan θ_{22} bernilai negatif. Daerah III menunjukkan bahwa θ_{11} dan θ_{22} keduanya bernilai positif. Dari gambar 5 menunjukkan bahwa tidak ada kondisi saat θ_{11} bernilai negatif dan θ_{22} bernilai positif. Untuk mengetahui kondisi saat eksitasi dapat teredam atau tidak dapat teredam bergantung pada parameter-parameter damping θ_{11} dan θ_{22} . Untuk itu diperlukan analisis sistem tetap dengan menggunakan metode averaging namun dengan menggunakan pemisalan yang berbeda.

Untuk menganalisis penyelesaian dari sistem (37) tetap akan digunakan metode averaging. Untuk itu dibuat pemisalan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_i &= R_i \cos(\omega_i t + \psi_i), \\ x_i' &= -R_i \omega_i \sin(\omega_i t + \psi_i). \end{aligned} \quad (44)$$

Di mana R_i merupakan amplitudo dan ψ_i adalah fase dengan $i = 1, 2, 3$.

Substitusi persamaan (44) ke (37). Berdasarkan (22) dengan menggunakan pemisalan (44) akan diperoleh:

$$R_i' = -\frac{\varepsilon}{\omega_i} \sin(\omega_i t + \psi_i) F_i(R_i \cos(\omega_i t + \psi_i), -R_i \omega_i \sin(\omega_i t + \psi_i)) \quad (45)$$

$$\psi_i' = -\frac{\varepsilon}{R_i \omega_i} \cos(\omega_i t + \psi_i) F_i(R_i \cos(\omega_i t + \psi_i), -R_i \omega_i \sin(\omega_i t + \psi_i)) \quad (46)$$

Ruas kanan (45) dan (46) diaveraged sebesar $\frac{2\pi}{\omega}$.

Sehingga menjadi :

$$R_i' = \frac{\omega_i}{2\pi} \int_0^{2\pi} -\frac{\varepsilon}{\omega_i} \sin(\omega_i t + \psi_i) F_i(R_i \cos(\omega_i t + \psi_i), -R_i \omega_i \sin(\omega_i t + \psi_i)) \quad (47)$$

$$\psi_i' = \frac{\omega_i}{2\pi} \int_0^{2\pi} -\frac{\varepsilon}{R_i \omega_i} \cos(\omega_i t + \psi_i) F_i(R_i \cos(\omega_i t + \psi_i), -R_i \omega_i \sin(\omega_i t + \psi_i)) \quad (48)$$

Setelah dilakukan rescale ε , diperoleh:

$$\begin{aligned} R_1' &= -\frac{1}{2} \theta_{11} \eta_0 R_1 + \frac{1}{4} \frac{Q_{12}}{\omega_1} R_2 \sin(\psi_2 - \psi_1) \\ &\quad + \frac{3}{4} \eta_0^3 R_1 \left(\frac{1}{2} \omega_1^2 R_1^2 + \omega_2^2 R_2^2 \right) \\ R_2' &= -\frac{1}{2} \theta_{22} \eta_0 R_2 - \frac{1}{4} \frac{Q_{21}}{\omega_2} R_1 \sin(\psi_2 - \psi_1) \\ &\quad - \frac{3}{4} \eta_0^3 R_2 \left(\omega_1^2 R_1^2 + \frac{1}{2} \omega_2^2 R_2^2 \right) \\ \psi_1' &= \frac{1}{4} \frac{Q_{12} R_2}{\omega_1 R_1} \cos(\psi_2 - \psi_1) \\ \psi_2' &= \sigma + \frac{1}{4} \frac{Q_{21} R_1}{\omega_2 R_2} \cos(\psi_2 - \psi_1) \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} R_3' &= -\frac{1}{2} \theta_{33} \eta_0 R_3 + \frac{3}{8} \eta_0^3 \omega_3^2 R_3^2 \\ \psi_3' &= -\omega_3 \sigma \end{aligned}$$

Persamaan (49) dapat disederhanakan dengan menggunakan pemisalan $\phi = \psi_2 - \psi_1$, diperoleh:

$$\begin{aligned} R_1' &= -\frac{1}{2} \theta_{11} \eta_0 R_1 + \frac{1}{4} \frac{Q_{12}}{\omega_1} R_2 \sin \phi \\ &\quad + \frac{3}{4} \eta_0^3 R_1 \left(\frac{1}{2} \omega_1^2 R_1^2 + \omega_2^2 R_2^2 \right) \\ R_2' &= -\frac{1}{2} \theta_{22} \eta_0 R_2 - \frac{1}{4} \frac{Q_{21}}{\omega_2} R_1 \sin \phi \\ &\quad - \frac{3}{4} \eta_0^3 R_2 \left(\omega_1^2 R_1^2 + \frac{1}{2} \omega_2^2 R_2^2 \right) \\ \phi' &= \sigma + \frac{1}{4} \left(\frac{Q_{21} R_1}{\omega_2 R_2} - \frac{Q_{12} R_2}{\omega_1 R_1} \right) \cos \phi \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} R_3' &= -\frac{1}{2} \theta_{33} \eta_0 R_3 + \frac{3}{8} \eta_0^3 \omega_3^2 R_3^2 \\ \psi_3' &= -\omega_3 \sigma \end{aligned}$$

Karena R_3 tidak bergantung pada R_1 dan R_2 (*decoupled*), analisis kestabilan sistem cukup melalui analisis tiga persamaan awal dari sistem (50).

$$\begin{aligned} R_1' &= -\frac{1}{2} \theta_{11} \eta_0 R_1 + \frac{1}{4} \frac{Q_{12}}{\omega_1} R_2 \sin \phi \\ &\quad + \frac{3}{4} \eta_0^3 R_1 \left(\frac{1}{2} \omega_1^2 R_1^2 + \omega_2^2 R_2^2 \right) \\ R_2' &= -\frac{1}{2} \theta_{22} \eta_0 R_2 - \frac{1}{4} \frac{Q_{21}}{\omega_2} R_1 \sin \phi - \frac{3}{4} \eta_0^3 R_2 \left(\omega_1^2 R_1^2 + \frac{1}{2} \omega_2^2 R_2^2 \right) \\ \phi' &= \sigma + \frac{1}{4} \left(\frac{Q_{21} R_1}{\omega_2 R_2} - \frac{Q_{12} R_2}{\omega_1 R_1} \right) \cos \phi \end{aligned} \quad (51)$$

Untuk menganalisis sistem (51), akan dibahas resonansi eksak ($\sigma = 0$). Diasumsikan bahwa R_1', R_2', ϕ' adalah konstan. Sehingga (51) menjadi

$$\begin{aligned} R_1' &= -\frac{1}{2} \theta_{11} \eta_0 R_1 + \frac{1}{4} \frac{Q_{12}}{\omega_1} R_2 \sin \phi \\ &\quad + \frac{3}{4} \eta_0^3 R_1 \left(\frac{1}{2} \omega_1^2 R_1^2 + \omega_2^2 R_2^2 \right) \\ R_2' &= -\frac{1}{2} \theta_{22} \eta_0 R_2 - \frac{1}{4} \frac{Q_{21}}{\omega_2} R_1 \sin \phi - \frac{3}{4} \eta_0^3 R_2 \left(\omega_1^2 R_1^2 + \frac{1}{2} \omega_2^2 R_2^2 \right) \\ \phi' &= \frac{1}{4} \left(\frac{Q_{21} R_1}{\omega_2 R_2} - \frac{Q_{12} R_2}{\omega_1 R_1} \right) \cos \phi \end{aligned} \quad (52)$$

Dengan mengambil $R_1' = 0, R_2' = 0$ dan $\phi' = 0$, dengan menggunakan bantuan software Maple diperoleh titik tetap sistem (52), yaitu

$$\begin{aligned} E_1 &= (R_1^*, R_2^*, \phi^*) \\ E_2 &= (R_1^{**}, R_2^{**}, \frac{1}{2} \pi) \\ E_3 &= (R_1^{***}, R_2^{***}, -\frac{1}{2} \pi) \end{aligned}$$

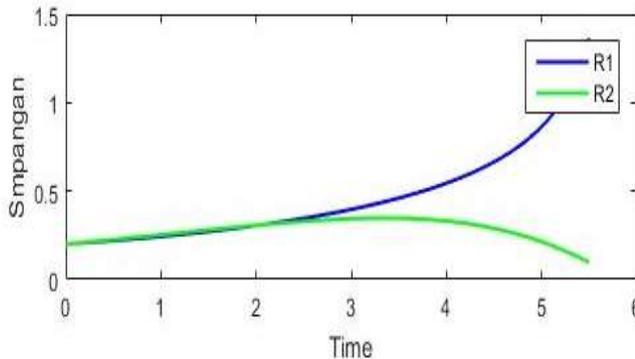
ANALISIS PENYELESAIAN SISTEM PEGAS MASSA DENGAN EKSITASI SENDIRI DAN EKSITASI PARAMETRIK MENGGUNAKAN METODE AVERAGING

Karena titik tetap sistem (52) terlalu panjang sehingga tidak dicantumkan secara lengkap.

Simulasi

Simulasi dilakukan dengan menggunakan Matlab R2015b. Simulasi pada penelitian ini bertujuan untuk mengetahui perubahan pergerakan simpangan dari R_1 dan R_2 terhadap waktu untuk setiap batas-batas dari θ_{11} dan θ_{22} pada sistem (52).

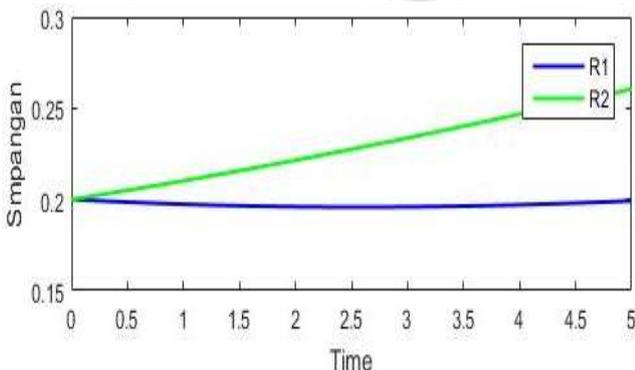
1. Simulasi pada daerah I



Gambar 6. Plot R_1 dan R_2 terhadap waktu pada daerah I dengan $\kappa = 0.9, \beta = 0.1$

Pada gambar 6 menunjukkan perubahan pergerakan R_1 dan R_2 ketika $\theta_{11} < 0, \theta_{22} < 0$ atau pada daerah I. Dari perubahan pergerakan nilai R_1 yang semakin besar menunjukkan bahwa getaran tekesitasi sendiri tidak dapat teredam sedangkan nilai R_2 yang semakin kecil dan mendekati nol menunjukkan bahwa getaran tereksitasi parametrik dapat teredam.

2. Simulasi pada daerah II

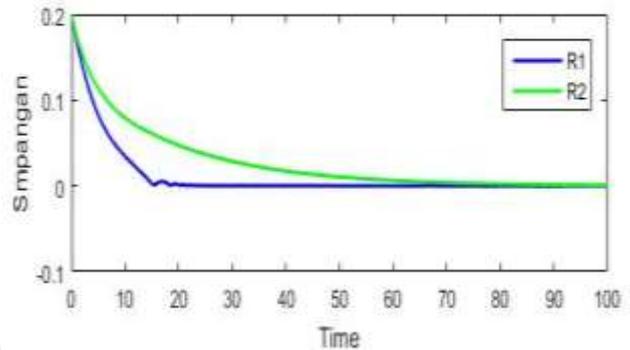


Gambar 7. Plot R_1 dan R_2 terhadap waktu pada daerah II dengan $\kappa = 0.6, \beta = 0.6$

Pada gambar 7 menunjukkan perubahan pergerakan R_1 dan R_2 ketika $\theta_{11} > 0, \theta_{22} < 0$ atau pada daerah II. Dari perubahan pergerakan nilai R_1 yang konstan dan stabil menunjukkan bahwa getaran tereksitasi sendiri dapat teredam sedangkan nilai R_2 semakin besar

menunjukkan bahwa getaran tereksitasi parametrik tidak dapat teredam.

3. Simulasi pada daerah III



Gambar 8. Plot R_1 dan R_2 terhadap waktu pada daerah III dengan $\kappa = 0.1, \beta = 0.8$

Pada gambar 8 perubahan pergerakan R_1 dan R_2 ketika $\theta_{11} > 0, \theta_{22} > 0$ atau pada daerah III. Dari perubahan pergerakan nilai R_1 dan R_2 yang semakin kecil dan menuju ke nol menunjukkan bahwa getaran tereksitasi sendiri dan getaran tereksitasi parametrik keduanya dapat teredam.

Berdasarkan gambar 5 tidak ada kasus untuk $\theta_{11} < 0, \theta_{22} > 0$. Dari hasil dan simulasi yang telah diperoleh menunjukkan bahwa ketika θ_{11} dan θ_{22} bernilai positif maka getaran atau eksitasi yang tidak diinginkan dari sistem dapat teredam. Jika dibandingkan dengan hasil dari penelitian yang dilakukan oleh Fatimah (2012) juga menunjukkan bahwa ketika θ_{11} dan θ_{22} bernilai positif maka dapat memperluas daerah penghapusan getaran secara penuh.

4. PENUTUP

Simpulan

Berdasarkan hasil dan analisis menunjukkan bahwa peredaman bergantung pada parameter θ_{11} dan θ_{22} . Ketika θ_{11} dan θ_{22} keduanya bernilai negatif, getaran tereksitasi sendiri tidak dapat teredam dan getaran tereksitasi parametrik dapat teredam. Ketika θ_{11} bernilai positif dan θ_{22} bernilai negatif, getaran tereksitasi sendiri dapat teredam dan getaran tereksitasi parametrik tidak dapat teredam. Ketika θ_{11} dan θ_{22} keduanya bernilai positif, getaran tereksitasi sendiri dan getaran tereksitasi parametrik keduanya dapat teredam.

Saran

Untuk penelitian selanjutnya, dapat dikembangkan model ini dengan kasus yang berbeda dimana setiap massa elemen tidak sama antara satu sama lain.

DAFTAR PUSTAKA

- Abadi. (2003). Nonlinear Dynamics of Self-excitation in Autoparametric Systems
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2012). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* (Tenth). Grafton, New York: Laurie Rosatone.
- Brauer, F., & Castillo-Chavez, C. (2001). *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology* (J. E. Marsden, L. Sirovich, & M. Golubitsky, eds.). New York: Springer-Verlag New York, Inc.
- Campbell, S., & Haberman, R. (2008). *Introduction To Differential Equations with Dynamical Equations*. United Kingdom: Princeton University Press.
- Dohnal, F., & Verhulst, F. (2008). Averaging in vibration suppression by parametric stiffness excitation. *Nonlinear Dynamics*, 54(3), 231–248.
- Fatimah, S. (2012). Parametric Excitation in a Self-Excited Three-Degrees of Freedom Problem. *Journal of the Indonesian Mathematical Society*, 15(2), 97–104.
- Fatimah, S. (2000). *Bifurcations in dynamical systems with parametric excitation Siti Fatimah*.
- Goode, S. W., & A. Annin, S. (2000). *Introduction to differential equations and linear algebra* (fourth). California State University, Fullerton.
- Krodkiewski, J. M. (2008). *Mechanical Vibration*.
- N.V.Tu, P. (1994). *Dynamical Systems : An Introduction with Applications in Economics and Biology* (Second). New York: Springer-Verlag New York Heidelberg.
- Nayfeh, A. H., & Mook, D. T. (1995). (*Wiley Classics Library*) *Ali H. Nayfeh, Dean T. Mook - Nonlinear oscillations-Wiley-VCH (1995).pdf*. Black: John Wiley&Sons,Inc.
- Sanders, J. A., & Verhulst, F. (1985). *Sanders, Verhulst. Averaging methods in nonlinear dynamical systems.pdf*. New York: Springer-Verlag New York, Inc.
- Thomson, W. T. (1981). Theory of vibration with applications, fourth edition. In *Theory of Vibration with Applications, Fourth Edition* (Second).
- Tondl, A. (1976). Quenching of self-excited vibrations: effect of dry friction. *Journal of Sound and Vibration*, 45(2), 285–294.
- Tondl, A. (2000). *Autoparametric Resonance in Mechanical Systems*.
- Tondl, A., & Ecker, H. (2003). On the problem of self-excited vibration quenching by means of parametric excitation. *Archive of Applied Mechanics*, 72(11–12), 923–932.
- Tondl, A., & Nabergoj, R. (2004). The effect of parametric excitation on a self-excited three-mass system. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 39(5), 821–832.