MATH*unesa*
Jurnal Ilmiah Matematika *Volume 8 No. 2 Tahun 2020*
ISSN 2716-506X

ANALISIS KESTABILAN SISTEM MANGSA PEMANGSA TIGA SPESIES DENGAN FUNGSI RESPON HOLLING TIPE II DAN FUNGSI RESPON BEDDINGTON-DEANGELIS

Farah Nabila Sajidah
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : farahsajidah16030214037@mhs.unesa.ac.id

Abstrak

Makhluk hidup pada dasarnya tidak dapat untuk hidup sendiri, tentunya interaksi dengan makhluk hidup lainnya sangat dibutuhkan untuk tetap bertahan hidup. Dalam kehidupan, bentuk interaksi yang terjadi salah satunya adalah interaksi mangsa dan pemangsa. Adanya interaksi antara mangsa dan pemangsa bertujuan untuk menciptakan keseimbangan jumlah populasi mangsa dan populasi pemangsa. Artikel ini membahas analisis kestabilan model mangsa pemangsa tiga spesies dengan fungsi respon Holling tipe II dan fungsi respon Beddington-DeAngelis. Dalam penelitian ini tahapan yang dilakukan yaitu merekonstruksi model, menentukan titik kesetimbangan, melakukan proses linearisasi, menganalisis kestabilan titik kesetimbangan berdasarkan nilai eigen yang dihasilkan dari matriks Jacobian hasil linearisasi, serta melakukan simulasi model mangsa pemangsa.
Kata kunci: mangsa pemangsa, Holling tipe II, Beddington-DeAngelis

Abstract

Living creatures are basically unable to live alone, of course, interactions with other living things are needed to survive. In life, one form of interaction that occurs is the interaction of prey and predator. Interaction between prey and predator aims to create a balance between the number of prey and predator populations. This article discusses the analysis of the stability of three species of predator prey models with the Holling type II response function and the Beddington-DeAngelis response function. In this research, the steps taken are reconstructing the model, determining the equilibrium point, conducting the process of linearization, analyzing the stability of the equilibrium point based on the eigenvalues generated from the Jacobian matrix resulting from the linearization, and simulating the predator prey model.
Keywords : predator prey, Holling type II, Beddington-DeAngelis

1. PENDAHULUAN

Interaksi antar makhluk hidup merupakan permasalahan yang menarik dalam bidang ekologi matematika. Salah satu interaksi yang sering terjadi adalah interaksi antara mangsa dan pemangsa. Hubungan interaksi keduanya saling terkait. Apabila tidak adanya mangsa, pemangsa tidak bisa mendapatkan makanannya sehingga dalam waktu tertentu mengakibatkan pemangsa mengalami kepunahan. Dan apabila tidak adanya pemangsa, menyebabkan terjadinya pertumbuhan populasi mangsa yang tak terbatas. Oleh karena itu, dengan adanya pemangsa, pertumbuhan populasi mangsa akan terkendali. Dengan adanya interaksi antara mangsa dan pemangsa, akan terciptanya keseimbangan antara jumlah populasi mangsa dan populasi pemangsa (Shonkwiler & Herod, 2009).

Dinamika populasi mangsa dan pemangsa dengan dua spesies atau tiga spesies menjadi penelitian yang telah banyak diteliti dan dibahas. Salah satunya penelitian model mangsa pemangsa yang melibatkan tiga spesies dengan fungsi respon campuran seperti Do, et al. (2011) telah meneliti model mangsa pemangsa yang melibatkan tiga spesies yaitu, terdiri dari satu populasi mangsa dan dua populasi pemangsa. Fungsi respon yang digunakan adalah fungsi respon Holling tipe II dan fungsi respon Beddington-DeAngelis. Madhusudanan & Vijaya (2016) telah meneliti model mangsa pemangsa yang melibatkan tiga spesies yaitu, terdiri dari dua populasi mangsa dan satu populasi pemangsa. Fungsi respon yang digunakan adalah fungsi respon Holling tipe I dan fungsi respon Holling tipe IV. Roy, et al. (2017) telah meneliti model mangsa pemangsa yang melibatkan tiga spesies yaitu, terdiri dari satu populasi mangsa dan dua populasi pemangsa. Fungsi respon yang digunakan adalah fungsi respon Holling tipe II dan fungsi respon Holling tipe III. Savitri & Abadi (2018) telah meneliti model mangsa pemangsa yang melibatkan tiga spesies yaitu, terdiri dari dua populasi mangsa dan satu populasi pemangsa. Fungsi respon yang digunakan adalah fungsi respon Holling tipe I dan fungsi respon Holling tipe II.

Berdasarkan latar belakang di atas, tujuan penelitian ini adalah merekonstruksi suatu model mangsa pemangsa yang melibatkan tiga spesies, yaitu dua populasi mangsa dan satu populasi pemangsa yang mengacu pada jurnal yang diteliti oleh Baek & Kim (2014). Spesies mangsa pertama berperan sebagai mangsa bagi spesies pemangsa, spesies mangsa kedua berperan sebagai mangsa bagi spesies pemangsa, sedangkan spesies pemangsa berperan sebagai pemangsa terhadap spesies mangsa pertama dan spesies mangsa kedua. Dalam model mangsa pemangsa tersebut akan diasumsikan populasi mangsa pertama dan mangsa kedua tumbuh secara logistik dan dipertimbangkan dua fungsi respon, yaitu fungsi respon Holling tipe II karena pemangsa memerlukan waktu untuk menangani mangsa pertama dan fungsi respon Beddington-DeAngelis karena adanya gangguan timbal balik oleh pemangsa saat menangani mangsa kedua sehingga pemangsaan tidak hanya bergantung pada populasi mangsa kedua tetapi juga pada populasi pemangsa.

2. KAJIAN TEORI

Model Mangsa Pemangsa

Pada tahun 1920-an, model interaksi mangsa dan pemangsa pertama kali dirumuskan oleh Alfred J. Lotka pada tahun 1925 dan Vito Volterra pada tahun 1926. Model ini dikenal dengan sebutan model *Lotka Volterra.* Model *Lotka Volterra* mempertimbangkan dua spesies yang terdiri dari populasi mangsa x dan populasi pemangsa y. Dalam merumuskan model *Lotka Volterra*, asumsi yang digunakan, yaitu sebagai berikut:

1) Ketika tidak ada pemangsa, mangsa tumbuh dengan laju yang sebanding dengan populasi saat ini. Ketika $y = 0$, jadi $x' = ax$ dengan $a > 0$.
2) Ketika tidak ada mangsa, pemangsa akan menurun dengan laju yang sebanding dengan populasi saat ini. Ketika $x = 0$, jadi $y' = -cy$ dengan $c > 0$.
3) Ketika ada pemangsa, mangsa akan menurun dengan laju yang sebanding dengan jumlah mangsa dan pemangsa yang saling bertemu. Pertemuan itu akan membuat pertumbuhan pemangsa meningkat dan menghambat pertumbuhan mangsa. Sehingga laju pertumbuhan pemangsa meningkat dalam bentuk dxy, sedangkan laju pertumbuhan mangsa berkurang dalam bentuk bxy, dengan b dan d adalah parameter positif.

Dengan demikian model *Lotka Volterra* yang telah disederhanakan menjadi sebagai berikut (Hirsch, et al 2004):

$$x' = ax - bxy = x(a - by)$$
$$y' = -cy + dxy = y(-c + dx), \qquad (1)$$

di mana parameter a, b, c, dan d semuanya diasumsikan positif, $x, y \geq 0$, a dan c masing-masing adalah laju pertumbuhan mangsa dan laju kematian alami pemangsa, dan b dan d masing-masing adalah laju pemangsaan mangsa oleh pemangsa dan rata-rata konversi biomassa.

Model Pertumbuhan Logistik

Laju pertumbuhan populasi secara eksponensial diasumsikan bahwa populasi akan tumbuh secara terus-menerus akibat adanya kelahiran dan kematian dalam setiap waktu. Laju pertumbuhan populasi akan sebanding dengan populasi pada saat ini. Secara matematis, dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = ax, \qquad (2)$$

di mana a merupakan laju pertumbuhan populasi dan $a > 0$.

Pada kenyataannya bahwa laju pertumbuhan akan bergantung pada populasi. Oleh karena itu, konstanta a dalam persamaan (2) akan diganti oleh fungsi $h(x)$ dan dengan demikian diperoleh persamaan yang dimodifikasi seperti berikut

$$\frac{dx}{dt} = h(x)x. \qquad (3)$$

Selanjutnya akan dipilih $h(x)$, dengan $h(x) \cong a > 0$ ketika x kecil, $h(x)$ berkurang ketika x tumbuh lebih besar, dan $h(x) < 0$ ketika x cukup besar. Fungsi paling sederhana yang memiliki sifat-sifat ini adalah $h(x) = a - mx$, di mana a konstanta positif. Dengan menggunakan fungsi ini dalam persamaan (3), maka diperoleh

$$\frac{dx}{dt} = (a - mx)x. \qquad (4)$$

Persamaan (4) dikenal sebagai persamaan Verhulst atau persamaan logistik. Seringkali persamaan logistik ditulis dalam bentuk

$$\frac{dx}{dt} = a\left(1 - \frac{x}{K}\right)x, \qquad (5)$$

di mana $K = \frac{a}{m}$. Konstanta a merupakan laju pertumbuhan intrinsik dengan $a > 0$. Jika pertumbuhan populasi mangsa diasumsikan tumbuh secara logistik, maka dengan mensubstitusikan persamaan logistik ke dalam model *Lotka Volterra* pada persamaan (1) diperoleh

$$x' = ax\left(1 - \frac{x}{K}\right) - bxy$$
$$y' = -cy + dxy. \qquad (6)$$

Dengan
x : kepadatan populasi mangsa,
y : kepadatan populasi pemangsa,
a : laju pertumbuhan intrinsik mangsa,
b : laju pemangsaan mangsa oleh pemangsa,
c : laju kematian alami pemangsa,
d : rata-rata konversi biomassa,
K : daya dukung lingkungan.

(Boyce & DiPrima, 2012)

Fungsi Respon

Fungsi respon adalah fungsi yang menunjukkan jumlah rata-rata mangsa yang terbunuh oleh setiap individu pemangsa tiap satuan waktu (Sarkar, Das, & Mukherjee, 2017). Berdasarkan Holling (1965), fungsi respon terbagi menjadi tiga jenis, yaitu fungsi respon Holling tipe I, fungsi respon Holling tipe II, dan fungsi respon Holling tipe III.

1. Fungsi Respon Holling Tipe I

Fungsi respon Holling tipe I menggambarkan bahwa laju pemangsa dalam memakan mangsa meningkat linear dengan kepadatan mangsa dan akan konstan saat pemangsa tidak memakan mangsa. Peningkatan linear menyebabkan fungsi respon Holling tipe I diasumsikan bahwa waktu pemangsa untuk menangkap dan mencerna makanannya dapat diabaikan. Jika $c(x)$ merupakan fungsi respon maka persamaan fungsi respon Holling tipe I diberikan seperti berikut (Wang, et al. 2003):

$$c(x) = mx, \quad (7)$$

dengan
m : laju pemangsaan mangsa oleh pemangsa,
x : kepadatan populasi mangsa.

2. Fungsi Respon Holling Tipe II

Fungsi respon Holling tipe II menggambarkan bahwa fungsi tersebut akan meningkat jika laju pemangsaan mangsa oleh pemangsa menurun dan akan konstan jika pemangsa mencapai titik kejenuhan dalam memangsa. Fungsi respon Holling tipe II diasumsikan bahwa pemangsa akan membutuhkan waktu untuk menangani mangsanya. Jika $c(x)$ merupakan fungsi respon maka persamaan fungsi respon Holling tipe II diberikan seperti berikut (Wang, et al. 2003):

$$c(x) = \frac{mx}{A+x}, \quad (8)$$

dengan
m : laju pemangsaan mangsa oleh pemangsa,
A : tingkat kejenuhan,
x : kepadatan populasi mangsa.
Persamaan (8) dapat di tulis dalam bentuk:

$$c(x) = \frac{kx}{1+hx}, \quad (9)$$

di mana $m = \frac{k}{h}$, $A = \frac{1}{h}$,
dengan
k : laju pemangsaan mangsa oleh pemangsa,
h : waktu penanganan mangsa oleh pemangsa,
x : kepadatan populasi mangsa.

3. Fungsi Respon Holling Tipe III

Fungsi respon Holling tipe III menggambarkan bahwa laju pemangsa akan menurun ketika kepadatan mangsa rendah. Fungsi respon Holling tipe III diasumsikan bahwa pemangsa akan mencari mangsa yang lain ketika mangsa yang dimakan mulai berkurang. Jika $c(x)$ merupakan fungsi respon maka persamaan fungsi respon Holling tipe III diberikan seperti berikut (Wang, et al. 2003):

$$c(x) = \frac{mx^2}{A+x^2}, \quad (10)$$

dengan
m : laju pemangsaan mangsa oleh pemangsa,
A : tingkat kejenuhan,
x : kepadatan populasi mangsa.

Pada tahun 1975 Beddington-DeAngelis mengusulkan fungsi respon, yaitu fungsi respon Beddington-DeAngelis. Fungsi tersebut menjelaskan bahwa adanya gangguan timbal balik oleh pemangsa dalam proses mencari makanannya. Oleh karena itu, pemangsaan tidak hanya bergantung pada populasi mangsa tetapi juga pada populasi pemangsa. Jika $c(x, y)$ merupakan fungsi respon maka persamaan fungsi respon Beddington-DeAngelis diberikan seperti berikut (Haque, 2011):

$$c(x, y) = \frac{mx}{Ax+By+C}, \quad (11)$$

dengan
m : laju pemangsaan mangsa oleh pemangsa,
A : laju waktu penanganan mangsa,
B :dampak gangguan timbal balik oleh pemangsa saat memangsa mangsa,
C : tingkat kejenuhan,
x : kepadatan populasi mangsa,
y : kepadatan populasi pemangsa.

3. METODE

Jenis penelitian yang digunakan yaitu studi literatur dengan mengkaji konsep dan teori melalui berbagai sumber pustaka berupa buku ataupun hasil penelitian orang lain, kemudian dari kajian-kajian tersebut penulis dapat membuat model mangsa pemangsa yang dapat mendukung penelitian ini. Penelitian ini memfokuskan pada rekonstruksi model mangsa pemangsa tiga spesies dengan fungsi respon Holling tipe II dan fungsi respon Beddington De-Angelis. Selain merekonstruksi model, penelitian ini juga memfokuskan pada analisis kestabilan dan simulasi dari sistem mangsa pemangsa.

Adapun batasan masalah penelitian ini, yaitu:

1. Model mangsa pemangsa yang digunakan penelitian ini adalah model mangsa pemangsa yang melibatkan tiga spesies, yaitu dua populasi mangsa dan satu populasi pemangsa dengan fungsi respon Holling tipe II untuk mangsa pertama dan fungsi respon Beddington-DeAngelis untuk mangsa kedua.
2. Data nilai parameter yang digunakan penelitian ini adalah data sekunder yang diperoleh dari jurnal ilmiah.

4. PEMBAHASAN

Rekonstruksi Model Mangsa Pemangsa dengan Fungsi Respon Holling Tipe II dan Fungsi Respon Beddington-DeAngelis

a. Laju Perubahan Populasi Mangsa Pertama $\left(\frac{dx}{dt}\right)$

Ketika pemangsa (z) tidak ada, mangsa pertama (x) tumbuh secara alamiah sebesar $r_1 x$. Laju perubahan mangsa pertama berkurang sebesar $\frac{r_1}{K_1}$ seiring dengan bertambahnya satu individu mangsa pertama karena adanya daya dukung lingkungan K_1 yang membatasi pertumbuhan populasi mangsa pertama. Sehingga diasumsikan mangsa pertama tumbuh berdasarkan model pertumbuhan logistik. Ketika mangsa pertama bertemu dengan pemangsa, terjadinya pemangsaan mangsa pertama oleh pemangsa yang diasumsikan menurut fungsi respon Holling tipe II dengan laju pemangsaan sebesar δ, rata-rata kejenuhan pemangsa sebesar c, dan rata-rata waktu penanganan sebesar v.

Maka laju perubahan populasi mangsa pertama pada penelitian ini dapat dimodelkan sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = r_1 x\left(1 - \frac{x}{K_1}\right) - \frac{\delta xz}{c+vx}. \tag{12}$$

b. Laju Perubahan Mangsa Kedua $\left(\frac{dy}{dt}\right)$

Ketika pemangsa (z) tidak ada, mangsa kedua (y) tumbuh secara alamiah sebesar $r_2 y$. Laju perubahan mangsa kedua berkurang sebesar $\frac{r_2}{K_2}$ seiring dengan bertambahnya satu individu mangsa kedua karena adanya daya dukung lingkungan K_2 yang membatasi pertumbuhan populasi mangsa kedua. Sehingga diasumsikan mangsa kedua tumbuh berdasarkan model pertumbuhan logistik. Ketika mangsa kedua bertemu dengan pemangsa, terjadinya pemangsaan mangsa kedua oleh pemangsa yang diasumsikan menurut fungsi respon Beddington-DeAngelis dengan laju pemangsaan sebesar μ, rata-rata kejenuhan pemangsa sebesar γ, rata-rata waktu penanganan sebesar α , dan pemangsaan tidak hanya bergantung pada populasi mangsa kedua tetapi juga pada populasi pemangsa sehingga adanya gangguan timbal balik oleh pemangsa saat memangsa mangsa kedua sebesar β.

Maka laju perubahan populasi mangsa kedua pada penelitian ini dapat dimodelkan sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dt} = r_2 y\left(1 - \frac{y}{K_2}\right) - \frac{\mu yz}{\gamma+\alpha y+\beta z}. \tag{13}$$

c. Laju Perubahan Populasi Pemangsa $\left(\frac{dz}{dt}\right)$

Ketika mangsa pertama (x) dan mangsa kedua (y) tidak ada, pemangsa (z) berkurang karena mengalami kematian alami akibat tidak mendapatkan makanannya, yaitu sebesar d. Ketika pemangsa bertemu dengan mangsa pertama, populasi pemangsa bertambah akibat konversi biomassa dengan rata-rata e_1 . Sehingga populasi pemangsa bertambah sebesar $\frac{e_1\delta x}{c+vx}z$. Ketika pemangsa bertemu dengan mangsa kedua, populasi pemangsa bertambah akibat konversi biomassa dengan rata-rata e_2. Sehingga populasi pemangsa bertambah sebesar $\frac{e_2\mu y}{\gamma+\alpha y+\beta z}z$.

Maka laju perubahan populasi pemangsa pada penelitian ini dapat dimodelkan sebagai berikut:

$$\frac{dz}{dt} = -dz + \frac{\delta e_1 xz}{c+vx} + \frac{\mu e_2 yz}{\gamma+\alpha y+\beta z}. \tag{14}$$

Dengan demikian, model mangsa pemangsa tiga spesies dengan fungsi respon Holling tipe II dan fungsi respon Beddington-DeAngelis dalam penelitian ini dapat dinyatakan dalam sistem sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= r_1 x\left(1 - \frac{x}{K_1}\right) - \frac{\delta xz}{c+vx},\\ \frac{dy}{dt} &= r_2 y\left(1 - \frac{y}{K_2}\right) - \frac{\mu yz}{\gamma+\alpha y+\beta z},\\ \frac{dz}{dt} &= -dz + \frac{\delta e_1 xz}{c+vx} + \frac{\mu e_2 yz}{\gamma+\alpha y+\beta z},\end{aligned} \tag{15}$$

di mana:

$\frac{dx}{dt}$: laju perubahan populasi mangsa pertama pada saat t,
$\frac{dy}{dt}$: laju perubahan populasi mangsa kedua pada saat t,
$\frac{dz}{dt}$: laju perubahan populasi pemangsa pada saat t,
x : kepadatan populasi mangsa pertama,
y : kepadatan populasi mangsa kedua,
z : kepadatan populasi pemangsa,
r_1 : rata-rata pertumbuhan intrinsik mangsa pertama,
r_2 : rata-rata pertumbuhan intrinsik mangsa kedua,
K_1: daya dukung lingkungan mangsa pertama,
K_2:daya dukung lingkungan mangsa kedua,
δ : rata-rata pemangsaan mangsa pertama oleh pemangsa,
c : tingkat kejenuhan pemangsa saat memangsa mangsa pertama,
v : waktu penanganan mangsa pertama oleh pemangsa,
μ : rata-rata pemangsaan mangsa kedua oleh pemangsa,
α : waktu penanganan mangsa kedua oleh pemangsa,
β :dampak gangguan timbal balik oleh pemangsa saat memangsa mangsa kedua,
γ :tingkat kejenuhan pemangsa saat memangsa mangsa kedua,
d : laju kematian alami pemangsa,
e_1 :rata-rata konversi biomassa dari mangsa pertama menjadi pemangsa,
e_2 :rata-rata konversi biomassa dari mangsa kedua menjadi pemangsa.

5. PENUTUP

Kesimpulan

Rekonstruksi model mangsa pemangsa tiga spesies dengan fungsi respon Holling tipe II dan fungsi respon Beddington-DeAngelis, yaitu sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = r_1 x\left(1-\frac{x}{K_1}\right) - \frac{\delta xz}{c+vx},$$
$$\frac{dy}{dt} = r_2 y\left(1-\frac{y}{K_2}\right) - \frac{\mu yz}{\gamma+\alpha y+\beta z},$$
$$\frac{dz}{dt} = -dz + \frac{\delta e_1 xz}{c+vx} + \frac{\mu e_2 yz}{\gamma+\alpha y+\beta z}.$$

Saran

Artikel ini hanya memfokuskan pada pengkajian model mangsa pemangsa tiga spesies dengan dua fungsi respon, yaitu fungsi respon Holling tipe II dan fungsi respon Beddington-Deangelis beserta analisis kestabilannya. Untuk peneliti selanjutnya dapat melanjutkan penelitian ini dengan menambahkan adanya pemanenan atau memodifikasi model mangsa pemangsa tiga spesies dengan menambah fungsi respon yang lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Baek, H., & Kim, D. (2014). Dynamics of a Predator-Prey System with Mixed Functional Responses. *Journal of Applied Mathematics*, 2014(1), 1-10.

Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2012). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, Tenth Edition*. New York: John Wiley & Sons Inc.

Do, Y., Baek, H., Lim, Y., & Lim, D. (2011). A three-species food chain system with two types of functional responses. *Abstract and Applied Analysis*, 2011, 1–16.

Haque, M. (2011). A detailed study of the Beddington-DeAngelis predator-prey model. *Mathematical Biosciences*, 234(1), 1–16.

Hirsch, M. W., Smale, S., & Devaney, R. L. (2004). *Differential Equations, Dynamical Systems & An Introduction to Chaos, Second Edition*. USA: Elsevier.

Holling, C. S. (1965). The Functional Response of Predators to Prey Density and its Role in Mimicry and Population Regulation. *Memoirs of the Entomological Society of Canada*, *97*, 5–60.

Madhusudanan, V., & Vijaya, S. (2016). Stability analysis in prey-predator system with mixed functional response. *World Journal of Engineering*, 13(4), 364–369.

Roy, B., Roy, S. K., & Biswas, M. H. A. (2017). Effects on prey-predator with different functional responses. *International Journal of Biomathematics*, 10(8), 1-22.

Sarkar, M., Das, T., & Mukherjee, R. N. (2017). *Bifurcation and Stability of Prey-Predator Model with Beddington- DeAngelis Functional Response*. 12(1), 350–366.

Savitri, D., & Abadi. (2018). Numerical Simulation in Prey-Predator Model with a Stage-Structure for Prey. *Atlantis Highlights in Engineering (AHE)*, 1, 825–830.

Shonkwiler, R. W., & Herod, J. (2009). *Mathematical Biology: An Introduction with Maple and Matlab, Second Edition*. New York: Springer.

Wang, Q., Fan, M., & Wang, K. (2003). Dynamics of a class of nonautonomous semi-ratio-dependent predator-prey systems with functional responses. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 278(2), 443–471.