MATH*unesa*

JurnalIlmiahMatematika *Volume 8 No.3 Tahun 2020*

ISSN 2716-506X

PEWARNAAN MODULAR PADA BEBERAPA SUBKELAS GRAF

Mela Audina Ajiji

Jurusan Matematika, Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya

e-mail : melaajiji16030214005@mhs.unesa.ac.id

Budi Rahadjeng

Jurusan Matematika, Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya

e-mail **:** budirahadjeng@unesa.ac.id

Abstrak

Misalkan G graf sederhana. Untuk titik v pada graf G , misal $N(v)$ merupakan persekitaran titik v. Jumlah label warna $\sigma(v)$ pada titik v di G didefinisikan sebagai jumlah label warna di $N(v)$, yaitu $\sigma(v) = \sum_{u\in N(v)} c(u)$. Pewarnaan modular pada G adalah sebuah pemetaan $c : V(G) \rightarrow \mathbb{Z}_k (k \geq 2)$ dimana dua titik yang berhubungan langsung boleh berwarna sama dan $\sigma(x) \neq \sigma(y)$untuk semua pasangan titik x, y yang berhubungan langsung pada G. Pewarnaan-k modular pada Gadalah sebuah pewarnaan modular G dengan menggunakan k warna. Minimum k warna yang digunakan disebut bilangan kromatik modular graf G dan dilambangkan dengan $mc(G)$. Pada artikel ini akan ditunjukkan bilangan kromatik modular dari Graf Sikel (C_n) , Graf Gear (G_n),dan Graf Persahabatan (F_n).

Kata kunci : Pewarnaan modular, Bilangan kromatik modular, Graf Gear, Graf Persahabatan

Abstract

Let G be a simple graph. For a vertex v of a graph G, let $N(v)$ denote the neighborhood of v. The color label sum $\sigma(v)$ of a vertex v of G is defined as the sum of the color labels in neighboring v, that is $\sigma(v) = \sum_{u\in N(v)} c(u)$. The modular coloring of G is a mapping of $c : V(G) \rightarrow \mathbb{Z}_k (k \geq 2)$ where the two adjacent vertex can be colored the same and $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ for all pairs x, y of adjacent vertex of G. Modular $k$coloring in G is a modular coloring G using k colors. Minimum k colors are used is called modular chromatic number of graph G and denote by $mc(G)$. In this article, the modular chromatic number will be obtained for Cycle Graph (C_n) , Gear Graph (G_n), and Friendship Graph (F_n).

Keywords : Modular coloring, Modular chromatic number, Gear Graph, Friendship Graph

1. PENDAHULUAN

Leohand Euler merupakan ahli matematika yang pertama kali memperkenalkan teori graf pada tahun 1736. Permasalahan Jembatan Konigsberg adalah kemungkinan melewati tujuh jembatan masing-masing tepat satu kali. Euler memodelkan permasalahan tersebut dalam graf, dimana pulau sebagai titik dan jembatan sebagai garis yang menghubungkan titik yang bersesuaian.

Sebuah graf G berisikan dua himpunan yaitu himpunan berhingga tak kosong $V(G)$ dari obyek-obyek yang disebut titik dan himpunan berhingga (mungkin kosong) $E(G)$ yang elemen-elemennya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen e dalam $E(G)$ merupakan pasangan tak berurutan dari titik-titik di $V(G)$ (Budayasa, 2007). Terdapat banyak pokok bahasan dalam teori graf, salah satunya adalah pewarnaan.

Pewarnaan graf merupakan pemberian warna pada sebuah graf yang terdiri dari pewarnaan titik dan sisi. Pewarnaan titik adalah memberi warna berbeda pada titik bertetangga sehingga tidak ada dua titik yang bertetangga mempunyai warna yang sama sedangkan pewarnaan sisi adalah memberikan warna berbeda pada sisi yang bertetangga sehingga tidak ada dua sisi yang bertetangga mempunyai warna yang sama. Pewarnaan titik maupun sisi merupakan salah satu dari topik yang terdapat dalam teori graf yang memiliki banyak aplikasi dalam kehidupan. Misalkan dalam penjadwalan kegiatan, pembagian tugas, dan penyimpanan barang yang efisien.

Pewarnaan modular pada graf berawal dari observasi permasalahan papan main dam oleh Futaba Okamoto, Ebrahim Salehi dan Ping Zhang. Pewarnaan modular pada Gadalah sebuah pemetaan $c : V(G) \rightarrow \mathbb{Z}_k (k \geq 2)$ dimana titik yang berhubungan langsung boleh berwarna sama dan $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ untuk semua pasangan titik x, y yang berhubungan langsung pada G. Jumlah label warna $\sigma(v)$ pada titik v di G didefinisikan sebagai jumlah label warna di $N(v)$, yaitu $\sigma(v) = \sum_{u\in N(v)} c(u)$. Pewarnaan- k modular pada G adalah sebuah pewarnaan modular G dengan menggunakan k warna. Bilangan kromatik modular G, dilambangkan dengan $mc(G)$, didefinisikan sebagai berikut:

$$mc(G) = \min\{k|ada\ pewarnaan - modular - k\ pada\ G\ \}$$

(Okamoto, Salehi, & Zhang, 2015).

Terdapat beberapa hasil yang terkait dengan bilangan kromatik modular graf. Diantaranya adalah bilangan kromatik modular dari graf pohon dan graf ulat (Okamoto, Salehi, & Zhang, 2009), bilangan kromatik modular dari graf perkalian kartesian untuk graf sikel dan lintasan (Paramaguru & Sampathkumar, 2013). Selainitu, pada tahun 2014, Paramaguru dan Sampathkumar menentukan bilangan kromatik modularjoin dari dua buah graf khusus yaitu join dari dua graf bipartit, join dari dua lintasan dan graf komplit(Paramaguru & Sampathkumar, 2014), pada tahun 2017, Nicholas dan Sanma menentukan bilangan kromatik modular dari graf kipas, graf helm, graf persahabatan, dan graf gear (Nicholas & Sanma, 2017). Dalam artikel ini akan menentukan bilangan kromatik modular beberapa kelas graf yaitu graf sikel, graf gear, lintasan, dan graf persahabatan.

2. KAJIAN TEORI

Definisi 2.1 :

Graf G berisikan dua himpunan yaitu himpunan berhingga tak kosong $V(G)$ dari objek-objek yang disebut titik dan himpunan berhingga (mungkin kosong) $E(G)$ yang elemen-elemennya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen e dalam $E(G)$ merupakan pasangan tak berurutan dari titik-titik di $V(G)$. Himpunan$V(G)$ disebut himpunan titik G, dan himpunan $E(G)$ disebut himpunan sisi G.

(Budayasa, 2007)

Definisi 2.2 :

Misalkan u dan v dua titik di G dan $e = \{u, v\}$ adalah sisi G. Titik u dan v dikatakan berhubungan langsung (*adjacent)* di G ; sisi e menghubungkan (*joining)* titik u dan v di G ; u dan v titik-titik akhir sisi e ; sisi e terkait (*incident)* dengan titik u dan juga titik v.

(Budayasa, 2007)

Definisi 2.3

Graf sederhana adalah graf G yang tidak mempunyai sisi rangkap ($E(G)$ bukan multiset) dan tidak memiliki gelung $\big((u,u) \notin E(G), \forall u \in V(G)\big)$.

(Budayasa, 2007)

Definisi 2.4 :

Sikel adalah jalan dengan semua sisi dan semua titik internalnya berbeda, sedangkan titik awal dan titik akhirnya sama. Sikel dengan n titik dilambangkan C_n.

(Budayasa, 2007)

Definisi 2.5 :

Untuk $n \geq 3$, graf roda W_n merupakan graf yang diperoleh dengan cara menambahkan satu titik baru pada graf sikel C_n sedemikian hingga setiap titik pada graf sikel C_n berhubungan langsung dengan titik baru tersebut. Banyaknya titik graf roda adalah $n + 1$, sedangkan banyaknya sisi adalah $2n$.

(Rahmawati & Rahadjeng, 2014)

Definisi 2.6 :

Untuk $n \geq 3$, graf gear G_n merupakan graf yang diperoleh dari graf roda $W_n$dengan tambahan sebuah titik diantara tiap-tiap pasangan titik graf yang berhubungan langsung pada sikel luar. Banyaknya titik graf gear adalah $2n + 1$ sedangkan banyaknya sisi adalah $3n$.

(Rahmawati & Rahadjeng, 2014)

Definisi 2.7 :

Untuk $n \geq 3$, graf persahabatan F_n adalah graf yang diperoleh dari graf lengkap K_3 yang digandakan sebanyak n kali dengan menghubungkan sebuah titik dari masing-masing graf K_3 dengan suatu titik K_1 dimana titik K_1 disebut titik pusat x. Banyaknya titik graf persahabatan adalah $2n + 1$ sedangkan banyaknya sisi adalah $3n$.

(Liza, n.d.)

Definisi 2.8 :

Misalkan G graf. Pewarnaan- k dari G adalah pewarnaan semua titik G dengan menggunakan k warna sedemikian hingga dua titik G yang berhubungan langsung mendapat warna yang berbeda. Jika G memiliki sebuah pewarnaan-k maka G dikatakan dapat diwarnai dengan k warna. Pewarnaan- k dari graf G biasanya ditunjukkan dengan melabel titik-titik G dengan warna $1,2,3, \dots, k$. Bilangan kromatik (*chromatic number*) dari graf G, dilambangkan dengan $\chi(G)$, didefinisikan sebagai berikut :

$$\chi(G) = \min\{k|ada\ pewarnaan - k \text{ pada } G\ \}$$

(Budayasa, 2007)

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Kita awali pembahasan dengan konsep pewarnaan modular pada graf.

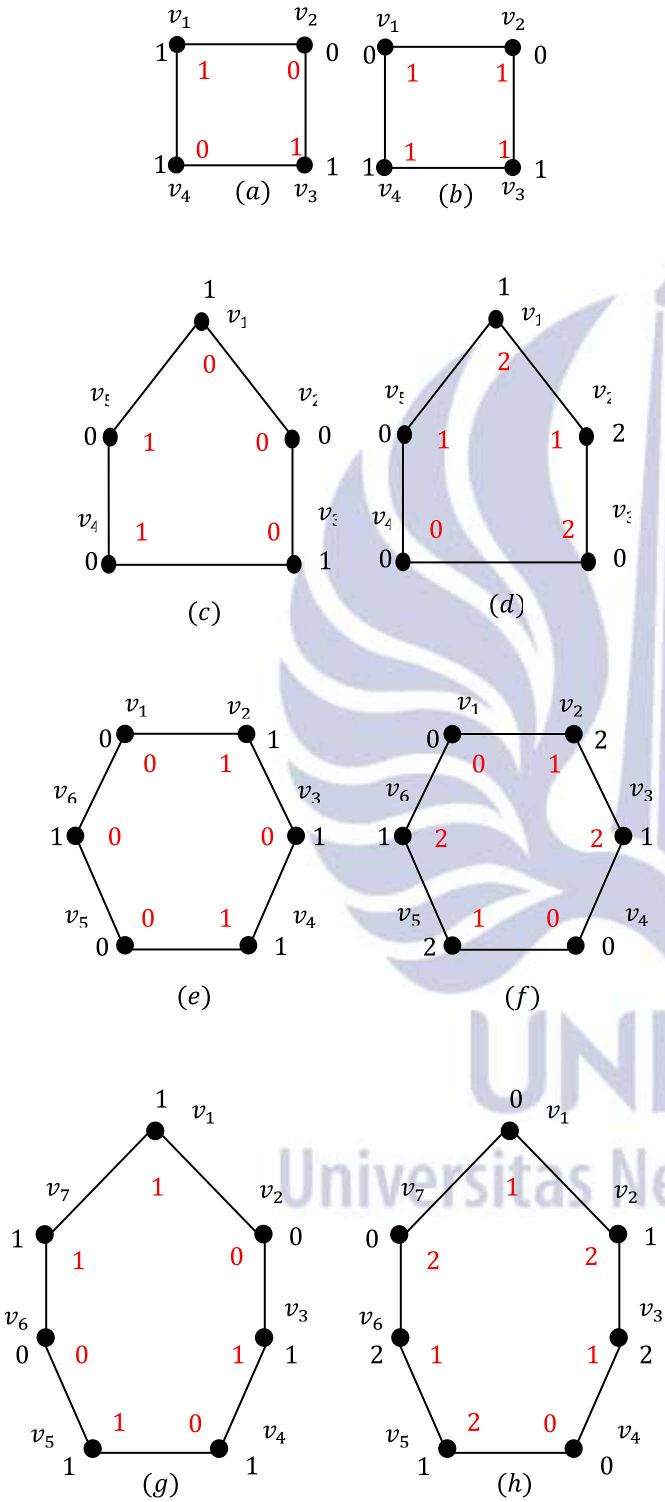
Definisi 3.1 :

Misalkan $N(v)$ merupakan persekitaran titik v. Jumlah label warna $\sigma(v)$ pada titik v di G didefinisikan sebagai jumlah label warna di $N(v)$, yaitu $\sigma(v) = \sum_{u \in N(v)} c(u)$. Pewarnaan modular pada Gadalah pemetaan $c : V(G) \to \mathbb{Z}_k (k \geq 2)$ dimana titik yang berhubungan langsung boleh diberikan warna yang sama dan $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ untuk semua pasangan titik x, y yang berhubungan langsung pada G. Pewarnaan- k modular pada G adalah sebuah pewarnaan modular G dengan menggunakan k warna. Bilangan kromatik modular G, dilambangkan dengan $mc(G)$, didefinisikan sebagai berikut:

$$mc(G) = \min\{k | ada\ pewarnaan - k - modular\ pada\ G\ \}.$$

(Okamoto et al., 2015)

Contoh 3.1:



Gambar 3.1 : (a) Pewarnaan-2 modular pada C_4
(b) Bukan Pewarnaan-2 modular pada C_4
(c) Bukan Pewarnaan-2 modular pada C_5
(d) Pewarnaan-3 modular pada C_5
(e) Bukan Pewarnaan-2 modular pada C_6
(f) Pewarnaan-3 modular pada C_6
(g) Bukan Pewarnaan-2 modular pada C_7
(h) Pewarnaan-3 modular pada C_7

Label angka berwarna hitam menunjukkan pewarnaan c sedangkan label angka berwarna merah menunjukkan jumlah label dari titik persekitaran v_i dimana $i = 1,2,3, \dots, n$.

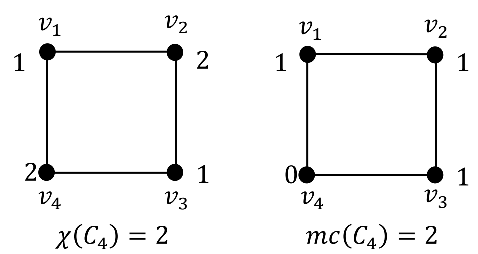
Perhatikan graf sikel C_4 pada Gambar 3.1 (a) diatas.
Misal $C_n: v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$.
Pewarnaan $c : V(C_n) \to \mathbb{Z}_2$ menjadi pewarnaan titik pada C_4 dimana titik yang berhubungan langsung boleh diwarnai sama (warna titik dilabeli dengan angka berwarna hitam). Karena $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ di $\mathbb{Z}_k$ untuk semua pasangan titik x, y yang berhubungan langsung pada C_4, yaitu $\sigma(v) = 1$ untuk $v = v_i$ dimana i ganjil, dan $\sigma(v) = 0$ untuk $v = v_i$ dimana i genap (jumlah warna dari persekitaran dilabeli dengan angka berwarna merah). Maka c adalah pewarnaan-2 modular pada C_4 karena anggota $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ sehingga $mc(C_n) = 2$.

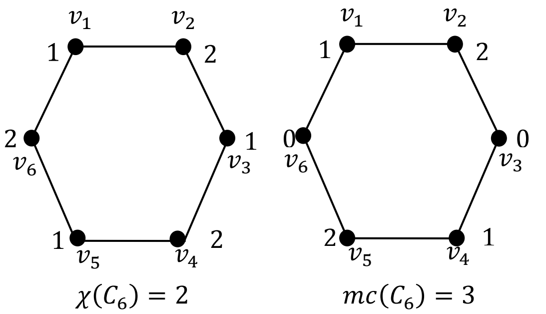
Sedangkan pada Gambar 3.1 (b) $\sigma(v) = 1$ disemua pasangan titik x, y yang berhubungan langsung. Sehingga C_4 bukan pewarnaan-2 modular karena $\sigma(x) = \sigma(y)$ di $\mathbb{Z}_k$ untuk semua pasangan titik x, y yang berhubungan langsung pada C_4.

Observasi 3.1 :
Untuk setiap graf G terhubung nontrivial, maka $mc(G) \geq \chi(G)$.

(Okamoto et al., 2015)

Bukti :
Berdasarkan definisi bilangan kromatik dari graf G yaitu minimum banyaknya warna yang diperlukan untuk mewarnai titik G, sehingga dua titik yang berhubungan langsung mendapatkan warna yang berbeda. Sedangkan untuk definisi bilangan kromatik modular G yaitu minimum banyaknya k-warna pada pewarnaan modular dimana titik yang berhubungan langsung boleh diberikan warna yang sama dan karena $\sigma(x) \in \mathbb{Z}_k$ dan $mc(G) = k$, dengan definisi $\chi(G)$ kita peroleh $mc(G) \geq \chi(G)$ dengan mewarnai setiap titik x dengan $\sigma(x)$ dari pewarnaan modular.





Gambar 3.2 Graf G dengan $mc(G) \geq \chi(G)$

Sehingga apabila dilihat dari ilustrasi selalu $mc(G) \geq \chi(G)$ tetapi tidak mungkin $mc(G) \leq \chi(G)$ karena pada pewarnaan modular terdapat elemen $\mathbb{Z}_k$ dimana anggota elemennya dimulai dari 0 sehingga tidak mungkin $mc(G) \leq \chi(G)$.

Teorema 3.1 :

Jika $n \geq 3$, maka $mc(C_n) = \begin{cases} 2 \; jika \; n \equiv 0 \; (mod \; 4) \\ 3 \; jika \; n \not\equiv 0 \; (mod \; 4) \end{cases}$

(Okamoto et al., 2015)

Bukti :

Misalkan $C_n: v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1$

Kasus 1 : $n \equiv 0 \; (mod \; 4)$.

Definisikan pewarnaan $c : V(C_n) \to \mathbb{Z}_2$ sebagai berikut:

$$c(v_i) = \begin{cases} 1 \text{ jika } i \equiv 0 \text{ (mod 4)} \\ 0 \text{ jika } i \not\equiv 0 \text{ (mod 4)} \end{cases}$$

Oleh karena itu,

$$\sigma(v_i) = \begin{cases} 1 \text{ jika } i \; ganjil \\ 0 \text{ jika } i \; genap \end{cases}$$

Kemudian didapatkan barisan jumlah warna dari titik persekitaran dengan pola berulang,

1,0,1,0

Karena jumlah label warna dari setiap titik persekitaran mempunyai nilai yang berbeda maka menurut Definisi 3.1 jika $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ di $\mathbb{Z}_k$ untuk semua pasangan titik x, y yang berhubungan langsung pada C_n, maka c adalah pewarnaan-2 modular.

Berdasarkan Definisi 3.1

$$mc(C_n) \leq 2$$

Karena n genap, maka C_n graf bipartisi, sehingga $\chi(C_n) = 2$

Berdasarkan Observasi 3.1,

$$mc(C_n) \geq 2$$

Sehingga dapat disimpulkan $mc(C_n) = 2$.

Kasus 2: $n \equiv 2 \; (mod \; 4)$. Berdasarkan definisi pewarnaan-k modular, $mc(C_n) \geq 2$.

Definisikan pewarnaan $c : V(C_n) \to \mathbb{Z}_3$ sebagai berikut:

$$c(v_i) = \begin{cases} 0 \; jika \; i \; ganjil \\ 1 \; jika \; i \; genap \end{cases}$$

Oleh karena itu,

$$\sigma(v_i) = \begin{cases} 2 \text{ jika } i \; ganjil \\ 0 \text{ jika } i \; genap \end{cases}$$

Didapatkan barisan jumlah label warna setiap titik persekitaran dengan pola berulang,

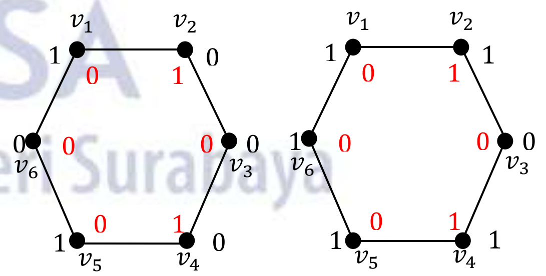
2,0,2,0

Karena $\sigma(x) \neq \sigma(y)$di $\mathbb{Z}_k$untuk semua pasangan titik x, y yang berhubungan langsung pada C_n, maka c adalah pewarnaan-3 modular, sehingga $mc(C_n) \leq 3$. Akan ditunjukkan bahwa $mc(C_n) \neq 2$. Diasumsikan sebaliknya, ada pewarnaan-2 modular $c' : V(C_n) \to \mathbb{Z}_2$. Maka asumsikan bahwa,

$$\sigma(v_i) = \begin{cases} 0 \text{ jika } i \; ganjil \\ 1 \text{ jika } i \; genap \end{cases}$$

Diasumsikan $c'(v_1) = 1$ untuk semua i dimana $1 \leq i \leq n$ untuk $i \equiv 1 \; (mod \; 4)$ dan $c'(v_3) = 0$, sehingga dari $c'(v_1)$ dan $c'(v_3)$didapatkan $1 + 0 = 1$ maka $\sigma(v_2) = 1$, dari $c'(v_3)$ dan $c'(v_5)$ didapatkan $0 + 1 = 1$ maka $\sigma(v_4) = 1$, dan dari $c'(v_1)$ dan $c'(v_5)$didapatkan $1 + 1 = 0$ maka $\sigma(v_6) = 0$.

Untuk mendapatkan $\sigma(v_1), \sigma(v_3),$ dan $\sigma(v_5)$ terdapat 2 kemungkinan seperti digambar,



Didapatkan barisan jumlah label warna setiap titik persekitaran dengan pola berulang ,

0,1,0,1,0,0

Karena barisan jumlah label warna dari setiap titik persekitaran mempunyai nilai yang sama $\sigma(x) = \sigma(y)$ yaitu $\sigma(v_1) = \sigma(v_5) = \sigma(v_6)$ yang mana hal ini bertentangan dengan Definisi 3.1, sehingga $mc(C_n) = 3$.

Kasus 3 : $n\ ganjil$.
Definisikan pewarnaan $c : V(C_n) \rightarrow \mathbb{Z}_3$ sebagai berikut:

$$c(v_i) = \begin{cases} 0 \text{ jika } i \not\equiv 0 \pmod 4 \text{ dan } i < n \\ 1, \text{jika } i \equiv 0 \pmod 4 \\ 2 \text{ jika } i = n \end{cases}$$

Didapatkan barisan jumlah label warna setiap titik persekitaran dengan pola berulang pada $n\ ganjil$ contohnya C_5 dan C_7,

$$2,0,1,2,1$$
$$2,0,1,0,1,2,0$$

Karena $\sigma(x) \neq \sigma(y)$di $\mathbb{Z}_k$untuk semua pasangan titik x, y yang berhubungan langsung pada C_n , maka c adalah pewarnaan-3 modular.
Berdasarkan Definisi 3.1

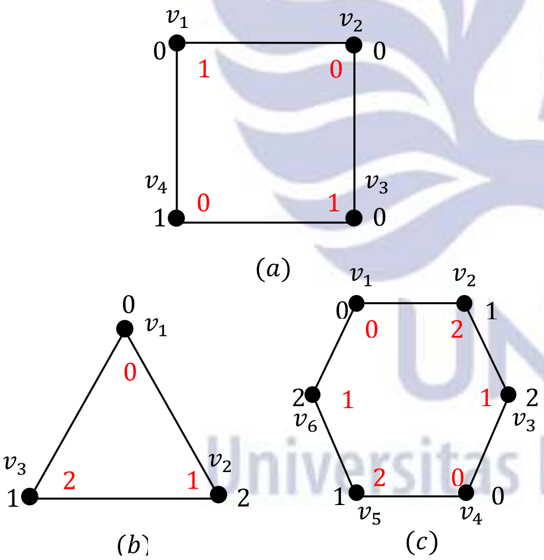
$$mc(C_n) \leq 3$$

Karena $n\ ganjil$, dan C_n bukan graf trivial, maka C_n bukan graf bipartisi. Sehingga $\chi(C_n) = 3$.
Berdasarkan Observasi 3.1,

$$mc(C_n) \geq 3$$

Sehingga dapat disimpulkan $mc(C_n) = 3$. ∎

Contoh 3.2 :



Gambar 3.3 : (a) Pewarnaan-2 modular pada C_4
(b) Pewarnaan-3 modular pada C_3
(c) Pewarnaan-3 modular pada C_6

Teorema 3.2:
Jika graf gear G_n, maka $mc(G_n) = 2$
(Nicholas & Sanma, 2017)

Bukti :

Misalkan x titik pusat graf gear, titik yang berhubungan langsung dengan x yaitu v_i dan y_i adalah titik diantara v_i dan $v_i + 1$ dimana $i = 1,2,3, \ldots, n$ searah dengan jarum jam.
Definisikan pewarnaan $c : V(G_n) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ sebagai berikut:

$$c(v) = \begin{cases} 1 \text{ jika } v = x \\ 0 \text{ jika } v \neq x \end{cases}$$

Karena jumlah label warna dari titik persekitaran x adalah 0 yang diperoleh dari $0 + 0 = 0$ di $\mathbb{Z}_2$, maka $\sigma(x) = 0$
Sehingga $\sigma(v_i) = 1$ dan $\sigma(y_i) = 0$
Kemudian didapatkan barisan jumlah label warna setiap titik persekitaran pada sikel luar dengan pola berulang,

$$1,0,1,0, \ldots, 1,0$$

Karena $\sigma(x) \neq \sigma(y)$di $\mathbb{Z}_k$untuk semua pasangan titik x, y yang berhubungan langsung pada G_n , maka c adalah pewarnaan-2 modular.
Berdasarkan Definisi 3.1

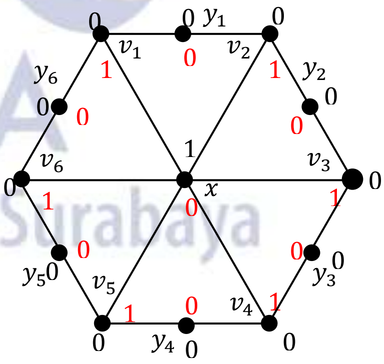
$$mc(G_n) \leq 2$$

Selanjutnya, berdasarkan Observasi 3.1,

$$mc(G_n) \geq 2.$$

Sehingga dapat disimpulkan $mc(G_n) = 2$. ∎

Sebagai illustrasi pada Gambar 3.3 pewarnaan $c : V(G_6) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ menjadi pewarnaan titik pada G_6 . Dapat dilihat, untuk semua pasangan x, y dari titik-titik yang berhubungan langsung berlaku $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ dalam $\mathbb{Z}_2$. Maka c adalah pewarnaan-2 modular. Dengan demikian $mc(G_6) \leq 2$. Jadi $mc(G_6) = 2$.



Gambar 3.4 Pewarnaan-2 modular pada G_6

Teorema 3.3 :
Jika graf persahabatan F_n, maka $mc(F_n) = 3$
(Nicholas & Sanma, 2017)

Bukti :
Misalkan x adalah sebuah titik pusat yang berupa K_1 . Misalkan v_i menjadi titik dari sikel C_3 untuk $i = 1,2, \ldots, n$ yang berhubungan langsung dengan x searah jarum jam.

Definisikan pewarnaan $c : V(F_n) \to \mathbb{Z}_3$ sebagai berikut :

$$c(v) = \begin{cases} 0 \text{ jika } v = x \\ 1 \text{ jika } v = v_i \; untuk\; i = ganjil \\ 2, yang\; lainnya \end{cases}$$

Oleh karena itu,

$$\sigma(v) = \begin{cases} 0 \text{ jika } v = x \\ 2 \text{ jika } v = v_i \; untuk\; i = ganjil \\ 1, yang\; lainnya \end{cases}$$

Kemudian didapatkan barisan jumlah label warna setiap titik persekitaran dengan pola berulang pada v_i ,

$$2,1,2,1, \ldots ,2,1$$

Karena $\sigma(x) \neq \sigma(y)$di $\mathbb{Z}_k$untuk semua pasangan titik x, y yang berhubungan langsung pada F_n , maka c adalah pewarnaan-3 modular.

Berdasarkan Definisi 3.1

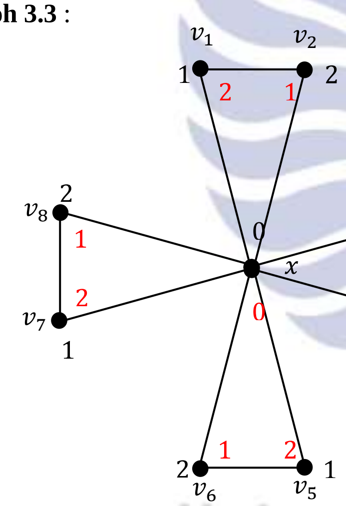
$$mc(F_n) \leq 3$$

Berdasarkan Observasi 3.1,

$$mc(F_n) \geq 3$$

Sehingga dapat disimpulkan $mc(F_n) = 3$. ■

Contoh 3.3 :



Gambar 3.5 Pewarnaan-3 modular pada F_4

Teorema 3.4 :

Jika lintasan P_n, maka $mc(P_n) = 2$

Bukti :

Misalkan $P_n = v_1, v_2, \ldots , v_n$

Untuk $\boldsymbol{n\; genap}$:

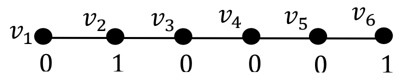
Definisikan pewarnaan $c : V(C_n) \to \mathbb{Z}_2$ sebagai berikut:

$$c(v_i) = \begin{cases} 1 \text{ jika } i \equiv 2 \pmod 4 \\ 0 \text{ jika } i \not\equiv 2 \pmod 4 \end{cases}$$

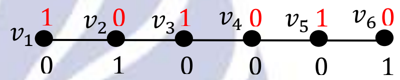
Oleh karena itu,

$$\sigma(v_i) = \begin{cases} 1 \text{ jika } i\; ganjil \\ 0 \text{ jika } i\; genap \end{cases}$$

Misalkan pada P_6 :

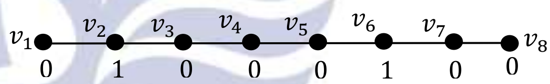


Untuk mendapatkan warna label dari $c(v_1)$ dan $c(v_3)$ didapatkan $0 + 0 = 0$ maka $\sigma(v_2) = 0$, dari $c(v_2)$ dan $c(v_4)$ didapatkan $1 + 0 = 1$ maka $\sigma(v_3) = 1$, dari $c(v_3)$ dan $c(v_5)$ didapatkan $0 + 0 = 0$ maka $\sigma(v_4) = 0$, dari $c(v_4)$ dan $c(v_6)$ didapatkan $0 + 1 = 1$ maka $\sigma(v_5) = 1$, untuk $\sigma(v_1) = 1$ dan $\sigma(v_6) = 0$ karena setiap titik yang hanya mempunyai satu tetangga untuk mendapatkan label warna dilihat dari nilai $c(v_2)$ untuk $\sigma(v_1)$ dan $c(v_{n-1})$ untuk $\sigma(v_n)$.

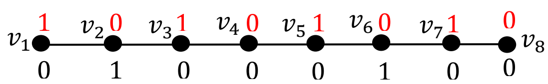


Gambar 3.6 $mc(P_6) = 2$

Misalkan pada P_8 :



Untuk mendapatkan warna label dari $c(v_1)$ dan $c(v_3)$ didapatkan $0 + 0 = 0$ maka $\sigma(v_2) = 0$, dari $c(v_2)$ dan $c(v_4)$ didapatkan $1 + 0 = 1$ maka $\sigma(v_3) = 1$, dari $c(v_3)$ dan $c(v_5)$ didapatkan $0 + 0 = 0$ maka $\sigma(v_4) = 0$, dari $c(v_4)$ dan $c(v_6)$ didapatkan $0 + 1 = 1$ maka $\sigma(v_5) = 1$, dari $c(v_5)$ dan $c(v_7)$ didapatkan $0 + 0 = 0$ maka $\sigma(v_6) = 0$, dari $c(v_6)$ dan $c(v_8)$ didapatkan $1 + 0 = 1$ maka $\sigma(v_7) = 1$, untuk $\sigma(v_1) = 1$ dan $\sigma(v_8) = 0$ karena setiap titik yang hanya mempunyai satu tetangga untuk mendapatkan label warna dilihat dari nilai $c(v_2)$ untuk $\sigma(v_1)$ dan $c(v_{n-1})$ untuk $\sigma(v_n)$.



Gambar 3.7 $mc(P_8) = 2$

Kemudian didapatkan barisan jumlah warna dari titik persekitaran dengan pola berulang,

$$1,0,1,0,\ldots,1,0$$

Karena $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ di $\mathbb{Z}_2$ untuk semua pasangan titik x, y yang berhubungan langsung pada P_n , maka c adalah pewarnaan-2 modular.

Berdasarkan Definisi 3.1

$$mc(P_n) \leq 2$$

Berdasarkan Observasi 3.1,

$$mc(P_n) \geq 2$$

Sehingga dapat disimpulkan $mc(P_n) = 2$.

Untuk $\boldsymbol{n}$ ***ganjil***:

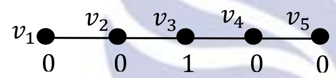
Definisikan pewarnaan $c : V(C_n) \to \mathbb{Z}_2$ sebagai berikut:

$$c(v_i) = \begin{cases} 1, i \equiv 3 \ (mod\ 4) \\ 0, i \not\equiv 3 \ (mod\ 4) \end{cases}$$

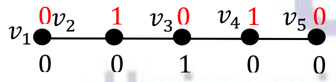
Oleh karena itu,

$$\sigma(v_i) = \begin{cases} 1, \text{jika } i \ genap \\ 0, \text{jika } i \ ganjil \end{cases}$$

Misalkan pada P_5 :

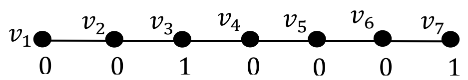


Untuk mendapatkan warna label dari $c(v_1)$ dan $c(v_3)$ didapatkan $0 + 1 = 1$ maka $\sigma(v_2) = 1$, dari $c(v_2)$ dan $c(v_4)$ didapatkan $0 + 0 = 0$ maka $\sigma(v_3) = 0$, dari $c(v_3)$ dan $c(v_5)$ didapatkan $1 + 0 = 1$ maka $\sigma(v_4) = 1$, untuk $\sigma(v_1) = 0$ dan $\sigma(v_5) = 0$ karena setiap titik yang hanya mempunyai satu tetangga untuk mendapatkan label warna dilihat dari nilai $c(v_2)$ untuk $\sigma(v_1)$ dan $c(v_{n-1})$ untuk $\sigma(v_n)$.

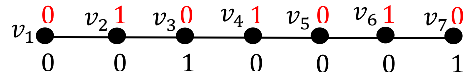


Gambar 3.8 $mc(P_5) = 2$

Misalkan pada P_7 :



Untuk mendapatkan warna label dari $c(v_1)$ dan $c(v_3)$ didapatkan $0 + 1 = 1$ maka $\sigma(v_2) = 1$, dari $c(v_2)$ dan $c(v_4)$ didapatkan $0 + 0 = 0$ maka $\sigma(v_3) = 0$, dari $c(v_3)$ dan $c(v_5)$ didapatkan $1 + 0 = 1$ maka $\sigma(v_4) = 1$, dari $c(v_4)$ dan $c(v_6)$ didapatkan $0 + 0 = 0$ maka $\sigma(v_5) = 0$, dari $c(v_5)$ dan $c(v_7)$ didapatkan $0 + 1 = 1$ maka $\sigma(v_6) = 1$, untuk $\sigma(v_1) = 0$ dan $\sigma(v_7) = 0$ karena setiap titik yang hanya mempunyai satu tetangga untuk mendapatkan label warna dilihat dari nilai $c(v_2)$ untuk $\sigma(v_1)$ dan $c(v_{n-1})$ untuk $\sigma(v_n)$.



Gambar 3.9 $mc(P_7) = 2$

Kemudian didapatkan barisan jumlah warna dari titik persekitaran dengan pola berulang,

$$0,1,0,\ldots,1,0$$

Karena $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ di $\mathbb{Z}_k$ untuk semua pasangan titik x, y yang berhubungan langsung pada P_n , maka c adalah pewarnaan-2 modular.

Berdasarkan Definisi 3.1

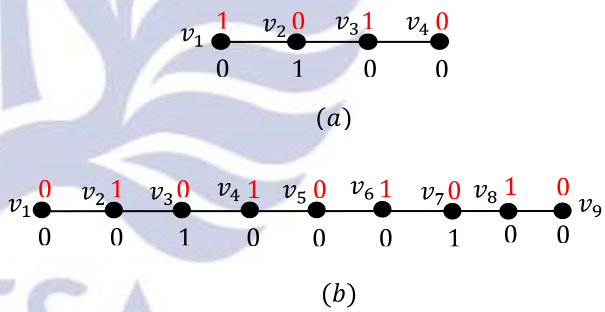
$$mc(P_n) \leq 2$$

Berdasarkan Observasi 3.1,

$$mc(P_n) \geq 2$$

Sehingga dapat disimpulkan $mc(P_n) = 2$. ■

Contoh 3.4 :



Gambar 3.10 : (a) Pewarnaan-2 modular pada P_4
(b) Pewarnaan-2 modular pada P_9

4. PENUTUP

Simpulan

Berdasarkan pembahasan pada artikel ini, maka dapat disimpulkan sebagai berikut :

1. Jika C_n merupakan sikel dengan $n \geq 3$, maka :
$$mc(C_n) = \begin{cases} 2, n \equiv 0 \ (mod\ 4) \\ 3, n \not\equiv 0 \ (mod\ 4) \end{cases}$$
2. Jika G_n merupakan graf gear, maka $mc(G_n) = 2$
3. Jika F_n merupakan graf persahabatan, maka
$$mc(F_n) = 3$$
4. Jika P_n merupakan lintasan, maka
$$mc(P_n) = 2$$

Saran

Pada artikel ini hanya fokus pada pewarnaan modular beberapa graf seperti graf sikel, graf gear, lintasan dan graf persahabatan. Bagi pembaca yang tertarik mengembangkan tulisan ini dapat membahas pewarnaan modular pada jenis-jenis graf lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Budayasa, I. K. (2007). *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press.

Liza, G. A. (n.d.). *Dimensi partisi dari graf persahabatan*. *VII*(2), 70–75.

Nicholas, T., & Sanma, G. R. (2017). *Modular Colorings of Cycle Related Graphs*. *13*(7), 3779–3788.

Okamoto, F., Salehi, E., & Zhang, P. (2009). *On Modular Colorings of Caterpillars*. 1–8.

Okamoto, F., Salehi, E., & Zhang, P. (2015). *A checkerboard problem and modular colorings of graphs A Checkerboard Problem and Modular Colorings of Graphs*. (January 2010).

Paramaguru, N., & Sampathkumar, R. (2013). *Modular chromatic number of c*. *2*(2), 47–72.

Paramaguru, N., & Sampathkumar, R. (2014). *Modular colorings of join of two special graphs*. *2*(June 2013), 139–149.

Rahmawati, N., & Rahadjeng, B. (2014). *Dekomposisi Graf Sikel, Graf Roda, Graf Gir dan Graf Persahabatan*. *3*(3), 64–71.