MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115

Volume 09 No 01
Tahun 2021

EKUIVALENSI KEKONVERGENAN POINTWISE DAN SERAGAM PADA BARISAN FUNGSI DALAM RUANG METRIK $C[a, b]$

Khoirul Anwar
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : khoirul.17030214015@mhs.unesa.ac.id

Manuharawati
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : manuharawati@unesa.ac.id

Abstrak

Penelitian tentang kekonvergenan barisan fungsi (f_n) dalam ruang metrik $C[a, b]$ dengan menggunakan metrik biasa mungkin telah banyak dilakukan oleh ahli matematika, tetapi dalam tulisan ini dibahas mengenai hal yang lebih menarik lagi yaitu tentang ekuivalensi kekonvergenan *pointwise* dan seragam pada barisan fungsi (f_n) dalam ruang metrik $C[a, b]$. Namun untuk menuju kesana, pertama-tama akan dibahas sifat-sifat terkait kekonvergenan *pointwise* dan seragam barisan fungsi (f_n) dalam ruang metrik $C[a, b]$, yaitu tentang banyaknya nilai kekonvergenan, keterbatasan, kepemilikan supremum atau infimum, pembentukan ruang metrik lengkap, kemampuan dalam mempertahankan kekontinuan, dan operasi biasa pada barisan fungsi yang konvergen. Sehingga ekuivalensi dari barisan fungsi (f_n) yang konvergen *pointwise* dan seragam dalam ruang metrik $C[a, b]$ terjadi jika barisan fungsi (f_n) konvergen dan bersifat tidak turun (tidak naik) seragam.

Kata Kunci: ruang metrik $C[a, b]$, kekonvergenan *pointwise*, kekonvergenan seragam, ekuivalensi.

Abstract

Research on the convergence of sequence of function (f_n) in the $C[a, b]$ metric space using usual metrics may have been widely done by mathematicians, but in this paper it is discussed more interestingly about the equivalence from convergent pointwise and uniform of sequence of function (f_n) in the metric space $C[a, b]$. But before that, will discussed about several properties about convergent pointwise and uniform of sequence of function (f_n) is the many convergences of a function, bounded, ownership of supremum or infimum, complete metric space and the ability to maintain continence, and operation usual about addion and multiplication with scalar from sequence of function (f_n). So, equivalence from convergent pointwise and uniform of sequence of function (f_n) in the metric space $C[a, b]$ occurs if the sequence of function (f_n) is convergent and uniformly nondecreasing or uniformly nonincreasing.

Keywords: *Metric space $C[a, b]$; pointwise convergence; uniform convergence; equivalence.*

PENDAHULUAN

Dalam membahas barisan, kita perlu mengetahui tentang fungsi. Fungsi adalah suatu aturan korespondensi yang menghubungkan setiap objek di daerah asal (domain), dengan sebuah nilai tunggal di daerah kawan (Sulaiman, Firmansari, & Wahyuni, 2018, p. 58). Selanjutnya, barisan pada himpunan S adalah suatu fungsi dengan domain himpunan semua bilangan asli dengan daerah hasilnya termuat pada himpunan S (Bartle & Sherbert, 2000, p. 53). Pada umumnya, telah dikenal barisan bilangan real (dinotasikan $f: N \to \mathbb{R}$), yaitu fungsi dari himpunan semua bilangan asli ke himpunan semua bilangan real. Barisan sering ditulis sebagai $X = (x_n, n \in N)$ atau $X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$.

Suatu barisan elemennya tidaklah harus suatu bilangan akan tetapi boleh juga objek yang lain, salah satu contohnya yaitu fungsi. Barisan fungsi merupakan salah satu bentuk dari barisan yang elemen-elemennya berupa fungsi (Alwi & R, 2020, p. 58) atau jika $A \subset \mathbb{R}, \forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, f_n: A \to \mathbb{R}$. Barisan fungsi dinotasikan sebagai $(f_n) = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots)$. Salah satu contoh barisan fungsi yaitu $(f_n) = (\cos n\pi x) = (\cos \pi x\,, \cos 2\pi x, \dots, \cos n\pi x\,, \dots)$.

Kekonvergenan pada barisan fungsi juga dapat diteliti, seperti penelitian yang telah dilakukan oleh (Setiyawan & Hartono, 2017), (Alwi, et al., 2018), (Sulaiman, Firmansari, & Wahyuni, 2018), dan (Alwi & R, 2020), sedangkan barisan fungsi dalam ruang metrik $C[a,b]$ (himpunan semua fungsi f yang kontinu pada interval tutup dan terbatas $[a,b]$) pernah diteliti oleh (Ubaidillah, et al., 2013) dan (Faisal, Massalesse, & Nur, 2015), tetapi pada penelitian tersebut hanya menggunakan metrik biasa.

Kekonvergenan pada barisan fungsi terdapat dua jenis, yaitu kekonvergenan *pointwise* (titik demi titik) dan kekonvergenan seragam (Marsden, 1974, p. 102) (Bartle & R, 2010) (Shirali & L, 2006), sedangkan berdasarkan pengamatan di berbagai jurnal dan buku teks, belum ada yang membahas tentang tentang kekonvergenan *pointwise* (titik demi titik) dan seragam pada barisan fungsi dalam ruang metrik $C[a,b]$ dengan metrik yang selain metrik biasa.

Oleh karena itu, peneliti tertarik untuk membahas kekonvergenan *pointwise* dan seragam pada barisan fungsi dalam ruang metrik $C[a,b]$ dengan menggunakan metrik tertentu yang berbeda dengan metrik biasa pada $C[a,b]$, yaitu $d(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|\,dx$ dan $d(f,g)=\sup|f(x)-g(x)|$ sehingga penelitian ini berjudul "Ekuivalensi kekonvergenan *pointwise* dan seragam pada barisan fungsi dalam ruang metrik $C[a,b]$".

KAJIAN TEORI

RUANG METRIK

Definisi 2.1.1 (Kreyszig, 1989, p. 4)

Misalkan $X \neq \emptyset$. Fungsi $d{:}X \times X \to \mathbb{R}$ disebut metrik pada X jika untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku:

1. $d(x,y) \geq 0$,
2. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $d(x,y) = d(y,x)$
4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Himpunan X yang dilengkapi dengan metrik d disebut ruang metrik, dan dilambangkan dengan (X, d) (Kustiawan, 2013, p. 55).

Definisi 2.1.2 (Kreyszig, 1989, p. 18)

(X,d) adalah ruang metrik, $x_0 \in X, r \in \mathbb{R}, r > 0$ persekitaran titik x_0 (centroid) dengan jari-jari r ada 3 macam, yaitu:

$B(x_0;r) = \{x \in X \mid d(x,x_0) < r\}$ Bola terbuka
$\bar{B}(x_0;r) = \{x \in X \mid d(x,x_0) \leq r\}$ Bola tertutup
$S(x_0;r) = \{x \in X \mid d(x,x_0) = r\}$ Sphere

Untuk pembahasan selanjutnya, persekitaran titik x_0 dengan jari-jari r yang digunakan adalah bola terbuka

BARISAN PADA RUANG METRIK

Definisi 2.2.1 (Shirali & L, 2006, p. 38)

Barisan pada ruang metrik (X, d) adalah fungsi $f{:}\,\mathbb{N} \to X$ dengan domain $\mathbb{N}$ dan daerah hasilnya termuat dalam X. Barisan dinotasikan dengan $(x_n : n \in \mathbb{N})$.

Definisi 2.2.2 (Shirali & L, 2006, p. 38)

Misalkan (x_n) pada ruang metrik (X,d). Barisan (x_n) dikatakan konvergen ke $x \in X$ jika untuk setiap $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, ada $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap bilangan asli $n \geq n_0$, berlaku $d(x_n,x) < \varepsilon$.

Definisi 2.2.3 (Indriyani, Kiftiah, & Helmi, 2019, p. 716)

Diberikan ruang metrik (X,d), suatu barisan (x_n) dikatakan barisan cauchy jika dan hanya jika $\forall \varepsilon \in R$, $\varepsilon > 0, \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $m,n \in \mathbb{N}, m,n \geq N_\varepsilon \ni d(x_n,x_m) < \varepsilon$.

Definisi 2.2.4 (Rini, Sugiatno, & Prihandono, 2013, p. 102)

Ruang metrik (X,d) dikatakan lengkap jika setiap barisan cauchy itu konvergen ke suatu $x \in X$.

Definisi 2.2.5 (Manuharawati, 2013, p. 36)

Diberikan $A \subset \mathbb{R}$,

1. $u \in \mathbb{R}$ disebut batas atas A jika $\forall a \in$ A berlaku $a \leq u$
2. $t \in \mathbb{R}$ disebut batas bawah A jika $\forall a \in$ A berlaku $t \leq a$.

Definisi 2.2.6 (Manuharawati, 2013, p. 37)

Diberikan $A \subset \mathbb{R}$,

1. Himpunan A dikatakan terbatas ke atas jika A mempunyai batas atas
2. Himpunan A dikatakan terbatas ke bawah jika A mempunyai batas bawah
3. Himpunan A dikatakan terbatas jika A mempunyai batas atas dan batas bawah

Definisi 2.2.7 (Manuharawati, 2013, p. 38)

Diberikan $A \subset \mathbb{R}$,

1. $\alpha \in \mathbb{R}$ disebut batas atas terkecil/Supremum A ($\sup A$) jika $\forall a \in$ A berlaku $a \leq \alpha$ dan jika u sebarang batas atas A maka $\alpha \leq u$
2. $\beta \in \mathbb{R}$ disebut batas bawah terbesar/Infimum A ($\inf A$) jika $\forall a \in$ A berlaku $\beta \leq a$ dan jika t sebarang batas bawah A maka $t \leq \beta$

Definisi 2.2.8 (Manuharawati, 2013, p. 95)

Barisan bilangan real $X = (x_n)$ dikatakan terbatas jika terdapat bilangan real M sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku $|x_n| \leq M$.

Definisi 2.2.9 (Manuharawati, 2013, p. 114)
Diberikan barisan bilangan real (x_n),

1. (x_n) dikatakan naik (*increasing*) jika memenuhi ketidaksamaan $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \cdots$.
2. (x_n) dikatakan turun (*decreasing*) jika memenuhi ketidaksamaan $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \cdots$.
3. (x_n) dikatakan monoton (*monotone*) jika X naik atau turun.

Definisi 2.2.10 (Ubaidillah, et al., 2013, p. 188)
Diberikan barisan fungsi (f_n) pada $C[a, b]$,

1. Barisan fungsi (f_n) dikatakan tidak turun seragam (*uniformly nondecreasing*) jika $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ ada $N_\varepsilon \in N$ sehingga $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N_\varepsilon$ berlaku $0 \leq f_{n+1} - f_n < \varepsilon$.
2. Barisan fungsi (f_n) dikatakan tidak naik seragam (*uniformly nonincreasing*) jika $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ ada $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sehingga $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N_\varepsilon$ berlaku $0 \leq f_n - f_{n+1} < \varepsilon$.

BARISAN FUNGSI KONVERGEN PADA RUANG METRIK

Barisan fungsi memiliki dua jenis kekonvergenan yaitu konvergen *pointwise* dan konvergen seragam (Marsden, 1974, p. 102) (Bartle & R, 2010, p. 241), (Shirali & L, 2006) yang dijelaskan dalam definisi berikut:

Definisi 2.3.1 (Shirali & L, 2006, p. 123)

Diberikan ruang metrik (X, d), $f: X \to \mathbb{R}$ dan $f_n: \mathbb{N} \to X$. Barisan fungsi (f_n) dikatakan konvergen *pointwise* ke suatu fungsi f jika dan hanya jika $\lim_{n\to\infty} d(f_n(x), f(x)) = 0$ atau $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ ada $N_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ sehingga $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N_{\varepsilon,x}$ berlaku $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

Dengan $d(f_n(x), f(x))$ merupakan jarak antara dua elemen pada X yaitu jarak antara $f_n(x)$ dengan $f(x)$.

Definisi 2.3.2 (Shirali & L, 2006, p. 125)

Diberikan ruang metrik (X, d), $f: X \to \mathbb{R}$ dan $f_n: \mathbb{N} \to X$. Barisan fungsi (f_n) dikatakan konvergen seragam ke suatu fungsi f pada X jika dan hanya jika $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ ada $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sehingga $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N_\varepsilon$ berlaku $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

Definisi 2.3.3 (Tarbiyyah & Manuharawati, 2019, p. 33)
Diberikan ruang metrik(X, d) dan$(\mathbb{R}, d^*)$, $T: X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$. Fungsi T kontinu di x_0 jika $\forall \varepsilon \in R$, $\varepsilon > 0, \exists\, \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \ni \forall x \in X$, $d(x, x_0) < \delta$, berlaku $d^*(T(x), T(x_0)) < \varepsilon$. Fungsi T dikatakan kontinu pada X jika T kontinu di setiap $x_0 \in X$.

Definisi 2.3.4 (Faisal, Massalesse, & Nur, 2015, p. 86)

Norm pada X adalah fungsi yang bernilai real pada X untuk setiap $x \in X$ yang dinotasikan dengan $\|x\|$ yang bersifat:
Untuk setiap $x, y \in X, a \in K$
(N1) $\|x\| \geq 0$
(N2) $\|x\| = 0 \leftrightarrow x = \bar{\mathbf{0}}$
(N3) $\|ax\| = |a|\|x\|$
(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Dengan $K = \mathbb{R}$ adalah *field* dengan operasi biasa pada $\mathbb{R}$, $\bar{\mathbf{0}}$ adalah vektor nol dan $d(x, y) = \|x - y\|, x, y \in X$.

d disebut metrik yang diinduksi oleh norm, ruang bernorma biasanya disimbolkan dengan $(X, \|\cdot\|)$ atau secara sederhana disimbolkan X.

PEMBAHASAN

HUBUNGAN KEKONVERGENAN *POINTWISE* DAN SERAGAM PADA BARISAN FUNGSI DALAM RUANG METRIK $C[a, b]$

Berdasarkan Definisi 2.3.1, Diberikan ruang metrik (X, d). Barisan fungsi (f_n) dikatakan konvergen *pointwise* ke suatu fungsi f pada X jika dan hanya jika $\lim_{n\to\infty} d\big(f_n(x), f(x)\big) = 0$ atau $\forall \varepsilon \in R$, $\varepsilon > 0$ ada $N_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ sehingga $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N_{\varepsilon,x}$ berlaku $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

Sedangkankan Definisi 2.3.2, Diberikan ruang metrik (X, d). Barisan fungsi (f_n) dikatakan konvergen seragam ke suatu fungsi f pada X jika dan hanya jika $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ ada $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sehingga $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N_\varepsilon$ berlaku $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

Eksistensi $N_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ pada Definisi 2.3.1, memperbolehkan bilangan tersebut terikat pada variabel ε dan x, sedangkan eksistensi $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ pada Definisi 2.3.2, memperbolehkan bilangan tersebut terikat pada ε saja. Maka dapat disimpulkan bahwa jika suatu barisan fungsi (f_n) konvergen seragam dalam ruang metrik $C[a, b]$, maka barisan fungsi (f_n) konvergen *pointwise* dalam ruang metrik $C[a, b]$, tapi tidak berlaku untuk sebaliknya (Alwi & R, 2020, p. 59).

SIFAT-SIFAT BARISAN FUNGSI YANG KONVERGEN *POINTWISE* DALAM RUANG METRIK $C[a, b]$

Adapun sifat yang dimiliki oleh barisan fungsi (f_n) yang konvergen *pointwise* dalam ruang metrik $C[a, b]$ yaitu:

Dapat kovergen ke lebih dari satu fungsi

Pada kekonvergenan *pointwise* , barisan fungsi dalam ruang metrik $C[a, b]$ dapat konvergen ke lebih dari satu fungsi, seperti contoh berikut:

Contoh 1:

Diberikan ruang metrik $(C[0,1], d)$ dengan metrik $d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$ untuk semua $f, g \in C[0,1]$. Barisan fungsi (f_n) dengan $f_n(x) = \begin{cases} nx, & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{n} < x \le 1 \end{cases}$ konvergen *pointwise* ke $f(x) = 1$ saat $x \in (0,1]$ dan konvergen ke $f(x) = 0$ saat $x = 0$.

Bukti:

Barisan (f_n) konvergen (ketika $0 < x \le 1$) karena ada $f(x) = 1 \in C[0,1]$ sehingga $\lim_{n\to\infty} d(f_n(x), f(x)) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(x) - 1|\, dx = \lim_{n\to\infty} \left[\int_0^{\frac{1}{n}} |nx - 1|\, dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 |1 - 1|\, dx\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0.$

Barisan (f_n) konvergen (ketika $x = 0$) karena ada $f(x) = 0 \in C[0,1]$ sehingga $\lim_{n\to\infty} d(f_n(x), f(x)) = \lim_{n\to\infty} \int_0^0 |f_n(x) - 0|\, dx = 0$

Jadi, Barisan (f_n) konvergen *pointwise* ke $f(x) = 1$ saat $x \in (0,1]$ dan konvergen ke $f(x) = 0$ saat $x = 0$.

Contoh 2:

Diberikan ruang metrik $(C[0,1], d)$ dengan metrik $d(f(x), g(x)) = \sup|f(x) - g(x)|$ untuk semua $f, g \in C[0,1]$. Barisan fungsi (f_n) dengan $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ konvergen ke $f(x) = 0$ saat $x \in [0,1]$

Bukti:

Barisan fungsi (f_n) konvergen untuk $x \in [0,1]$ karena ada $f(x) = 0 \in C[0,1]$ sehingga $\lim_{n\to\infty} d(f_n(x), f(x)) = \lim_{n\to\infty} \sup|f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup\left|\frac{x^n}{n}\right|$, karena $x \in [0,1]$ maka nilai $\sup\left|\frac{x^n}{n}\right|$ tercapai saat $x = 1$ sehingga $\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n}\right| = 0$.

Jadi, barisan fungsi (f_n) konvergen ke fungsi $f(x) = 0$ saat $x \in [0,1]$.

Teorema 3.2.1 Diberikan ruang metrik $(\boldsymbol{C[a,b], d})$. Jika barisan fungsi $(\boldsymbol{f_n})$ konvergen *pointwise* maka $(\boldsymbol{f_n})$ terbatas.

Bukti:

Diketahui $\lim(f_n) = f$, maka berdasarkan Definisi 2.3.1 jika diambil $\varepsilon = 1$ ada $N_{\varepsilon,x}(1) \in N$ sehingga $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan $n \ge N_{\varepsilon,x}(1)$ berlaku $d(f_n(x), f(x)) < 1$. Untuk $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan $n \ge N_{\varepsilon,x}(1)$ berlaku ketaksamaan segitiga yaitu:

$d(f_n(x), 0) \le d(f_n(x), f(x)) + d(f(x), 0) < 1 + d(f(x), 0)$

Dipilih $M = \sup\{d(f_1(x), 0), \dots, d(f_{n-1}(x), 0), 1 + d(f_n(x), 0)\}$ maka $\forall n \in \mathbb{N}$, berlaku $d(f_n(x), 0) \le M$ sehingga berdasarkan Definisi 2.7 maka barisan fungsi (f_n) terbatas ■.

Contoh 3:

Diberikan ruang metrik $(C[0,1], d)$ dengan barisan fungsi (f_n) dengan $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$. Berdasarkan Contoh 2 (f_n) konvergen *pointwise* ke $f(x) = 0$ dan terbatas pada $C[0,1]$.

Bukti:

Karena (f_n) konvergen *pointwise* ke $f(x) = 0$ pada $C[0,1]$, artinya untuk setiap $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ ada $N_{\varepsilon,x}$ yaitu bilangan asli terkecil yang lebih dari $\frac{1}{\varepsilon}$ sehingga $\forall n \in N$ dengan $n \ge N_{\varepsilon,x}$ dan $\frac{1}{n} \le \frac{1}{N_{\varepsilon,x}} < \varepsilon$ berlaku $d(f_n(x), 0) = d(\frac{x^n}{n}, 0)$.

Karena pada [0,1] nilai $\frac{x^n}{n} \le \frac{1}{n} \le \frac{1}{N_{\varepsilon,x}} < \varepsilon$, maka $d(f_n(x), 0) < \varepsilon$. Kita tahu bahwa barisan fungsi $(f_n) = (\frac{x^n}{n})$, maka $d(f_1(x), 0) = d(x, 0)$, $d(f_2(x), 0) = d\left(\frac{x^2}{2}, 0\right), \dots, d(f_{n-1}(x), 0) = d\left(\frac{x^{n-1}}{n-1}, 0\right)$

Dipilih $M = \sup\{d(f_1(x), 0), \dots, d(f_n(x), 0)\}$ maka terbukti bahwa $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $d(f_n(x), 0) \le M$ sehingga (f_n) terbatas.

Belum tentu konvergen ke Supremum/Infimum

Diberikan ruang metrik $(C[a, b], d)$. Jika barisan fungsi (f_n) bersifat terbatas dan monoton naik (turun) dan konvergen *pointwise*, maka barisan (f_n) belum tentu memiliki supremum (infimum), dijelaskan dalam contoh berikut ini:

Contoh 4:

Diberikan ruang metrik $(C[0,1], d)$ dengan metrik $d(f, g) = \sup|f(x) - g(x)|$ untuk semua $f, g \in C[0,1]$. Barisan fungsi (f_n) dengan $f_n(x) = x^n$ yang

terbatas, monoton turun dan konvergen *pointwise* tetapi tidak memiliki infimum.
Bukti:

Barisan fungsi (f_n) terbatas saat $x \in [0,1]$ maka berdasarkan Definisi 2.2.8 ada $M = 1$ sehingga $d(f_n, 0) = \sup|x^n - 0| = \sup|x^n| = 1 \leq 1$. Barisan fungsi (f_n) monoton turun maka berdasarkan Definisi 2.2.9 untuk $\forall n \in \mathbb{N}$ berlaku $f_n \geq f_{n+1}$ dan konvergen *pointwise* ke fungsi $f(x) = 0$ saat $x \in [0,1)$ dan konvergen ke $f(x) = 1$ saat $x = 1$, tetapi $f(x) \notin C[0,1]$. Karena barisan fungsi (f_n) konvergen ke fungsi f dengan $f \notin C[0,1]$ maka barisan fungsi (f_n) tidak memiliki infimum.

Contoh 5:

Diberikan ruang metrik $(C[0,1], d)$ dengan metrik $d\big(f(x), g(x)\big) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$ untuk semua $f, g \in C[0,1]$. Barisan fungsi (f_n) dengan

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

yang terbatas, monoton naik dan konvergen *pointwise* tetapi tidak memiliki supremum.
Bukti:

Barisan fungsi (f_n) terbatas saat $x \in [0,1]$ maka berdasarkan Definisi 2.2.8 ada $M = 1$ sehingga $d(f_n(x), 0) = \int_0^1 |f_n(x) - 0|\, dx = \int_0^{\frac{1}{n}} |nx|\, dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 |1|\, dx = 1 - \frac{1}{n} \leq 1$. Barisan fungsi (f_n) monoton naik maka berdasarkan Definisi 2.2.9 untuk $\forall n \in \mathbb{N}$ belaku $f_n \leq f_{n+1}$ dan konvergen *pointwise* ke fungsi $f(x) = 1$ saat $x \in (0,1]$ dan konvergen ke fungsi $f(x) = 0$ saat $x = 0$, tetapi $f(x) \notin C[0,1]$. Karena barisan fungsi (f_n) konvergen ke fungsi f dengan $f \notin C[0,1]$ maka barisan fungsi (f_n) tidak memiliki supremum.

Contoh 6:

Diberikan ruang metrik $(C[0,1], d)$ dengan metrik $d\big(f(x), g(x)\big) = \sup|f(x) - g(x)|$ untuk semua $f, g \in C[0,1]$. Barisan fungsi (f_n) dengan $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ yang terbatas, monoton turun dan konvergen *pointwise* dan memiliki infimum.
Bukti:

Barisan fungsi (f_n) terbatas saat $x \in [0,1]$ maka berdasarkan Definisi 2.2.8 ada $M = 1$ sehingga $d(f_n(x), 0) = \sup\left|\frac{x^n}{n} - 0\right| = \sup\left|\frac{x^n}{n}\right| = \left|\frac{1}{n}\right| \leq 1$. Barisan fungsi (f_n) monoton turun maka berdasarkan Definisi 2.2.9 untuk $\forall n \in \mathbb{N}$ belaku $f_n \geq f_{n+1}$ dan konvergen *pointwise* ke fungsi $f(x) = 0$ saat $x \in [0,1]$, dan $f(x) \in C[0,1]$ sehingga barisan fungsi (f_n) memiliki infimum yaitu $f(x) = 0$.

Belum tentu ruang metrik lengkap

Diberikan ruang metrik $(C[a,b], d)$. Jika barisan fungsi (f_n) merupakan barisan Cauchy dan konvergen *pointwise*, maka berdasarkan definisi 2.2.4 $(C[a,b], d)$ belum tentu merupakan ruang metrik lengkap, ini dikarenakan barisan fungsi (f_n) yang konvergen *pointwise* dapat konvergen ke lebih dari satu fungsi yang mungkin berbeda, dijelaskan dalam contoh berikut ini:

Contoh 7:

Diberikan ruang metrik $(C[0,1], d)$ dengan $d\big(f(x), g(x)\big) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$ untuk semua $f, g \in C[0,1]$. Jika barisan fungsi (f_n) merupakan barisan Cauchy dan konvergen *pointwise* ke fungsi yang tak kontinu, maka $(C[0,1], d)$ tidak lengkap.
Bukti:

Ruang metrik $(C[0,1], d)$ dikatakan ruang metrik tidak lengkap jika ada barisan Cauchy yang tak konvergen pada $C[0,1]$. Karena diketahui barisan fungsi (f_n) adalah barisan Cauchy dan konvergen *pointwise*, maka dipilih barisan fungsi (f_n) dengan $f_n(x) = \begin{cases} nx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$ yang merupakan barisan Cauchy, karena $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, \exists\, N_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{2-\varepsilon} \right\rceil$ sehingga $\forall m, n \in \mathbb{N}$ dengan $n > \frac{1}{2-\varepsilon}$ dan $m > \frac{1}{2-\varepsilon}$ berlaku

$$\begin{aligned} d\big(f_n(x), f_m(x)\big) &= \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|\, dx \\ &< \int_0^1 |f_n(x)|\, dx + \int_0^1 |f_m(x)|\, dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{n}} |nx|\, dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 dx + \int_0^{\frac{1}{m}} |mx|\, dx + \int_{\frac{1}{m}}^1 dx \\ &= 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) < 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) = \varepsilon \end{aligned}$$

Berdasarkan Contoh 1 barisan fungsi (f_n) konvergen *pointwise* ke fungsi $f(x) = 1$ saat $x \in (0,1]$ dan konvergen ke $f(x) = 0$ saat $x = 0$, tetapi $f(x) \notin C[0,1]$ sehingga terbukti bahwa $(C[0,1], d)$ tidak lengkap.

Contoh 8:

Diberikan ruang metrik $(C[0,1], d)$ dengan $d(f, g) = \sup|f(x) - g(x)|$ untuk semua $f, g \in C[0,1]$. Jika barisan fungsi (f_n) merupakan barisan

Cauchy dan konvergen *pointwise* ke fungsi yang kontinu, maka $(C[0,1], d)$ merupakan ruang metrik yang lengkap.
Bukti:

Diketahui bahwa barisan fungsi (f_n) merupakan barisan Cauchy pada $C[0,1]$, berarti berdasarkan Definisi 2.2.3 yaitu untuk $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, ada $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ dan untuk $\forall m, n \in \mathbb{N}$ dengan $m \geq N_\varepsilon$ dan $n \geq N_\varepsilon$ berlaku $d(f_n(x), f_m(x)) = \sup|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Kita mengenal kriteria kekonvergenan Cauchy yaitu barisan konvergen jika dan hanya jika barisan Cauchy dengan metrik biasa yaitu untuk $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, ada $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ dan untuk $\forall m, n \in \mathbb{N}$ dengan $m \geq N_\varepsilon$ dan $n \geq N_\varepsilon$ berlaku $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Misal $|f_n(x) - f_m(x)|$ memiliki supremum ketika nilai $x = x_0 \in [0,1]$, maka $d(f_n(x), f_m(x)) = \sup|f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon$ sehingga berdasarkan kriteria kekonvergenan Cauchy, barisan fungsi (f_n) konvergen.

Misal barisan (f_n) konvergen ke fungsi f dengan $f \in C[0,1] \ni \lim_{n\to\infty} d(f_n(x), f(x)) = 0$,karena fungsi $f \in C[0,1]$ berdasarkan Definisi 2.3.3 dengan metrik biasa maka berlaku untuk $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, ada $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ sehingga $\forall x \in [0,1], |x - x_0| < \delta$ berlaku $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Karena (f_n) konvergen ke fungsi f pada $[0,1]$ maka berdasarkan Definisi 2.3.1 $\forall \frac{\varepsilon}{3} \in \mathbb{R}, \frac{\varepsilon}{3} > 0$, ada $N_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ dan untuk $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N_{\varepsilon,x}$ berlaku $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ dan saat $x_0 \in [0,1]$ berlaku $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Karena $f_n \in C[0,1]$ berarti f_n kontinu pada $[a,b]$ sehingga untuk $\forall \frac{\varepsilon}{3} \in \mathbb{R}, \frac{\varepsilon}{3} > 0$, ada $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ sehingga $\forall x \in [0,1], |x - x_0| < \delta$ berlaku $|f_m(x) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Sehingga untuk $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, ada $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ sehingga $\forall x \in [0,1], |x - x_0| < \delta$ berlaku

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(x_0)| \\
&\quad + |f_m(x_0) - f(x_0)| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

Sehingga disimpulkan bahwa $(C[0,1], d)$ merupakan ruang metrik lengkap.

Kurang mampu dalam mempertahankan kekontinuan

Barisan fungsi (f_n) pada ruang metrik $(C[a,b], d)$, jika barisan fungsi (f_n) konvergen *pointwise* maka barisan fungsi tersebut kurang mampu dalam mempertahankan kekontinuan karena dalam kekonvergenan *pointwise*, terdapat barisan fungsi kontinu (f_n) pada $[a,b]$ yang konvergen *pointwise* pada fungsi f, namun fungsi f tersebut tidak kontinu pada $[a,b]$. Adapun untuk contohnya, dapat dilihat dari contoh sebelumnya yaitu Contoh 1, Contoh 4 dan Contoh 5.

Teorema 3.2.2 Diberikan barisan fungsi $(\boldsymbol{f_n})$ dan $(\boldsymbol{g_n})$ pada ruang metrik $(\boldsymbol{C[a,b], d})$. Jika barisan fungsi $(\boldsymbol{f_n})$ dan $(\boldsymbol{g_n})$ berturut-turut konvergen *pointwise* ke $\boldsymbol{f}$ dan $\boldsymbol{g}$ pada $\boldsymbol{C[a,b]}$, maka barisan fungsi $(\boldsymbol{f_n \pm g_n})$ dengan operasi penjumlahan biasa pada $\boldsymbol{C[a,b]}$ konvergen *pointwise* ke $\boldsymbol{f \pm g}$ pada $\boldsymbol{C[a,b]}$.
Bukti:

Diketahui barisan fungsi (f_n) dan (g_n) berturut-turut konvergen *pointwise* ke f dan g , maka berdasarkan Definisi 2.3.1, untuk $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ ada $N'_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ sehingga $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N'_{\varepsilon,x}$ berlaku $d(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$ dan ada $N''_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ sehingga $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N''_{\varepsilon,x}$ berlaku $d(g_n(x), g(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Dipilih $N_{\varepsilon,x} = \min\{N'_{\varepsilon,x}, N''_{\varepsilon,x}\}$, maka untuk $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N_{\varepsilon,x}$ menggunakan Definisi 2.3.4 tentang norm yaitu $d(f_n(x), f(x)) = \|f_n(x) - f(x)\|$ diperoleh

$$
\begin{aligned}
&d(f_n(x) + g_n(x), f(x) + g(x)) \\
&= \|f_n(x) + g_n(x) - f(x) - g(x)\| \\
&= \|(f_n(x) - f(x)) + (g_n(x) - g(x))\| \\
&\leq \|f_n(x) - f(x)\| + \|g_n(x) - g(x)\| \\
&= d(f_n(x), f(x)) + d(g_n(x), g(x)) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

Sehingga terbukti bahwa barisan fungsi $(f_n + g_n)$ konvergen *pointwise* ke $f + g$ pada $C[a,b]$ ■.

Contoh 9:

Diberikan barisan fungsi $(f_n) = (\frac{x}{2n})$ dan $(g_n) = (\frac{nx}{n+x})$ pada $(C[0,1], d)$. Jika barisan fungsi (f_n) dan (g_n) berturut-turut konvergen *pointwise* ke $f(x) = 0$ dan $g(x) = x$ dengan $f, g \in C[0,1]$ dengan metrik $d(k, l) = \sup|k(x) - l(x)|$ untuk semua $k, l \in X$. Maka barisan fungsi $(\frac{x}{2n} + \frac{nx}{n+x})$ dengan operasi penjumlahan biasa pada $C[0,1]$ konvergen *pointwise* ke fungsi $h(x) = x + 0 = x \in C[0,1]$.
Bukti :

Karena diketahui barisan fungsi $(\frac{x}{2n})$ dan $(\frac{nx}{n+x})$ berturut-turut konvergen *pointwise* ke $f(x) = 0$ dan

$g(x) = x$, maka berdasarkan Definisi 2.3.1, untuk $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ ada $N'_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ sehingga $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N'_{\varepsilon,x}$ berlaku $d(\frac{x}{2n}, 0) < \frac{\varepsilon}{2}$ dan ada $N''_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ sehingga $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N''_{\varepsilon,x}$ berlaku $d(\frac{nx}{n+x}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Dipilih $N_{\varepsilon,x} = \min\{N'_{\varepsilon,x}, N''_{\varepsilon,x}\}$, maka untuk $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N_{\varepsilon,x}$ menggunakan Definisi 2.3.4 tentang norm yaitu $d(f_n, f) = \|f_n - f\|$ maka diperoleh

$$d\left(\frac{x}{2n} + \frac{nx}{n+x}, x + 0\right) = \left\|\frac{x}{2n} + \frac{nx}{n+x} - 0 - x\right\|$$
$$= \left\|(\frac{x}{2n} - 0) + (\frac{nx}{n+x} - x)\right\|$$
$$\leq \left\|\frac{x}{2n} - 0\right\| + \left\|\frac{nx}{n+x} - x\right\|$$
$$= d\left(\frac{x}{2n}, 0\right) + d\left(\frac{nx}{n+x}, x\right)$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Sehingga terbukti bahwa barisan fungsi $(\frac{x}{2n} + \frac{nx}{n+x})$ konvergen *pointwise* ke fungsi $h(x) = x \in C[0,1]$.

Contoh 10:

Diberikan barisan fungsi $(f_n) = (x^n)$ dan $(g_n) = (2x^n)$ pada $(C[0,1], d)$. Jika barisan fungsi (f_n) dan (g_n) berturut-turut konvergen *pointwise* ke $f(x) = \begin{cases} 0, x \in [0,1) \\ 1 \ \ , x = 1 \end{cases}$ dan $g(x) = \begin{cases} 0, x \in [0,1) \\ 2 \ \ , x = 1 \end{cases}$ pada $C[0,1]$ dengan metrik $d(k(x), l(x)) = \sup|k(x) - l(x)|$ untuk semua $k, l \in X$. Maka barisan fungsi $(x^n + 2x^n)$ dengan operasi penjumlahan biasa pada $C[0,1]$ konvergen *pointwise* ke fungsi $h(x) = \begin{cases} 0, x \in [0,1) \\ 3 \ \ , x = 1 \end{cases}$.

Bukti :

Karena diketahui barisan fungsi (x^n) dan $(2x^n)$ berturut-turut konvergen *pointwise* ke $f(x) = \begin{cases} 0, x \in [0,1) \\ 1 \ \ , x = 1 \end{cases}$ dan $g(x) = \begin{cases} 0, x \in [0,1) \\ 2 \ \ , x = 1 \end{cases}$, maka berdasarkan Definisi 2.3.1, untuk $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ ada $N'_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ sehingga $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N'_{\varepsilon,x}$ berlaku $d(x^n, f) < \frac{\varepsilon}{2}$ dan ada $N''_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ sehingga $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N''_{\varepsilon,x}$ berlaku $d(2x^n, g) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Dipilih $N_{\varepsilon,x} = \min\{N'_{\varepsilon,x}, N''_{\varepsilon,x}\}$, maka untuk $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N_{\varepsilon,x}$ menggunakan Definisi 2.3.4 tentang norm yaitu $d(f_n(x), f(x)) = \|f_n(x) - f(x)\|$ maka diperoleh

$$d(x^n + 2x^n, f(x) + g(x))$$
$$= \|x^n + 2x^n - f(x) - g(x)\|$$
$$= \left\|(x^n - f(x)) + (2x^n - g(x))\right\|$$
$$\leq \|x^n - f(x)\| + \|2x^n - g(x)\|$$
$$= d(x^n, f(x)) + d(2x^n, g(x))$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Sehingga terbukti bahwa barisan fungsi $(x^n + 2x^n)$ konvergen *pointwise* ke fungsi $h(x) = \begin{cases} 0, x \in [0,1) \\ 3 \ \ , x = 1 \end{cases}$ pada $C[0,1]$.

Teorema 3.2.3 **Diberikan barisan fungsi (f_n) pada ruang metrik $(C[a,b], d)$. Jika barisan fungsi (f_n) konvergen *pointwise* ke f pada $C[a,b]$, maka barisan fungsi (αf_n) dengan operasi perkalian skalar biasa konvergen *pointwise* ke αf pada $C[a,b]$.**

Bukti:

Diketahui barisan fungsi (f_n) konvergen *pointwise* ke f maka berdasarkan Definisi 2.3.1, untuk $\forall \frac{\varepsilon}{|\alpha|} > 0$ ada $N_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ sehingga $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N_{\varepsilon,x}$ berlaku $d(f_n, f) < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$ maka dengan menggunakan Definisi 2.3.4 tentang norm yaitu $d(f_n(x), f(x)) = \|f_n(x) - f(x)\|$ diperoleh

$$d(\alpha f_n(x), \alpha f(x)) = \|\alpha f_n(x) - \alpha f(x)\|$$
$$= \|\alpha(f_n(x) - f(x))\|$$
$$= |\alpha| \|f_n(x) - f(x)\|$$
$$= |\alpha|\, d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

Sehingga terbukti bahwa barisan fungsi (αf_n) konvergen *pointwise* ke αf pada $C[a,b]$ ■.

Contoh 11:

Diberikan barisan fungsi $(f_n) = \left(\frac{nx}{n+x}\right)$ pada ruang metrik $(C[0,1], d)$. Jika barisan fungsi (f_n) konvergen *pointwise* ke $f(x) = x$ pada $C[0,1]$ dengan metrik $d(k(x), l(x)) = \sup|k(x) - l(x)|$ untuk semua $k, l \in X$. Maka barisan fungsi $(2f_n) = \left(\frac{2nx}{n+x}\right)$ dengan operasi perkalian skalar biasa konvergen *pointwise* ke fungsi $g(x) = 2x$ pada $C[0,1]$.

Bukti :

Diketahui barisan fungsi (f_n) konvergen *pointwise* ke f maka berdasarkan Definisi 2.3.1, untuk setiap $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ ada $N_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ sehingga $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N_{\varepsilon,x}$ berlaku $d(\frac{nx}{n+x}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ maka dengan menggunakan Definisi 2.3.4 tentang norm yaitu $d(f_n(x), f(x)) = \|f_n(x) - f(x)\|$ diperoleh

$$d\left(\frac{2nx}{n+x}, 2x\right) = \left\|\frac{2nx}{n+x} - 2x\right\|$$
$$= \left\|2\left(\frac{nx}{n+x} - x\right)\right\| |2| \left\|\frac{nx}{n+x} - x\right\|$$
$$= 2\, d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

Sehingga terbukti bahwa barisan fungsi $(\frac{2nx}{n+x})$ konvergen *pointwise* ke fungsi $g(x) = 2x$ pada $C[0,1]$.

Contoh 12:

Diberikan barisan fungsi $(f_n) = (x^n)$ pada ruang metrik $(C[0,1], d)$. Jika barisan fungsi (f_n) konvergen *pointwise* ke $f(x) = \begin{cases} 0, x \in [0,1) \\ 1 \ \ , x = 1 \end{cases}$ pada $C[0,1]$ dengan metrik $d\big(k(x), l(x)\big) = \sup|k(x) - l(x)|$ untuk semua $k, l \in X$. Maka barisan fungsi $(2f_n) = (2x^n)$ dengan operasi perkalian skalar biasa konvergen *pointwise* ke fungsi $2f(x) = \begin{cases} 2 \ \ , x = 1 \\ 0, x \in [0,1) \end{cases}$ pada $C[0,1]$.

Bukti :

Diketahui barisan fungsi (f_n) konvergen *pointwise* ke f maka berdasarkan Definisi 2.3.1, untuk setiap $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ ada $N_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ sehingga $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N_{\varepsilon,x}$ berlaku $d(x^n, f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$ maka dengan menggunakan Definisi 2.3.4 tentang norm yaitu $d\big(f_n(x), f(x)\big) = \|f_n(x) - f(x)\|$ diperoleh

$d\big(2x^n, 2f(x)\big) = \|2x^n - 2f(x)\| = \big\|2\big(x^n - f(x)\big)\big\|$

$= |2|\|x^n - f(x)\| = 2\, d\big(f_n(x), f(x)\big) < \varepsilon$

Sehingga terbukti bahwa barisan fungsi $(2x^n)$ konvergen *pointwise* ke fungsi $2f(x) =) = \begin{cases} 0, x \in [0,1) \\ 2 \ \ , x = 1 \end{cases}$ pada $C[0,1]$.

Sifat-sifat barisan fungsi yang konvergen seragam dalam ruang metrik $C[a,b]$

Adapun sifat yang dimiliki oleh barisan fungsi (f_n) yang konvergen seragam dalam ruang metrik $C[a,b]$ yaitu:

Teorema 3.3.1 Diberikan ruang metrik $(\boldsymbol{C[a,b], d})$. Jika barisan $(\boldsymbol{f_n})$ konvergen seragam maka nilai limit $(\boldsymbol{f_n})$ tunggal.

Bukti:

Barisan (f_n) konvergen seragam pada $C[a,b]$ yaitu $\lim(f_n) = f$ dan $\lim(f_n) = g$ dengan $f \neq g$. Maka berdasarkan Definisi 2.3.2, jika diambil $\varepsilon > 0$ ada $N'_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sehingga $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N'_\varepsilon$ berlaku $d(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$ dan ada $N''_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sehingga $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N''_\varepsilon$ berlaku $d(f_n(x), g(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Dipilih $N_\varepsilon = \max(N'_\varepsilon, N''_\varepsilon)$, untuk $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N_\varepsilon$ berlaku ketaksamaan segitiga yaitu:

$$d\big(f(x), g(x)\big) \leq d\big(f_n(x), f(x)\big) + d\big(f_n(x), g(x)\big) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Sehingga $\forall \varepsilon > 0$ berlaku $0 \leq d(f(x), g(x)) < \varepsilon$ berdasarkan Teorema pada bilangan real yaitu jika diberikan $a \in \mathbb{R}$, lalu $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ berlaku $0 \leq a < \varepsilon$ maka $a = 0$, maka diperoleh $d(f(x), g(x)) = 0$. Sehingga berdasarkan Definisi 2.1 tentang metrik, yaitu point (2), maka diperoleh $f = g$, kontradiksi dengan pengandaian bahwa $f \neq g$. Sehingga terbukti bahwa limit (f_n) tunggal ■.

Contoh 13:

Diberikan ruang metrik $(C[0,1], d)$ dengan metrik $d(f,g) = \sup|f(x) - g(x)|$ untuk semua $f, g \in X$. Barisan fungsi (f_n) dengan $f_n(x) = \frac{x}{2n}$ konvergen ke fungsi $f(x) = 0$ untuk $x \in [0,1]$.

Bukti:

Untuk setiap $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0, x \in [0,1]$ ada $N_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{2\varepsilon} \right\rceil$, sehingga $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N_\varepsilon$ dan $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_\varepsilon} < 2\varepsilon$ sehingga $d(f_n(x), 0) = \sup\left|\frac{x}{2n} - 0\right| = \sup\left|\frac{x}{2n}\right|$ lalu misal $\frac{x}{2n}$ mencapai nilai supremum saat $x_0 \in [0,1]$, maka $d(f_n(x), 0) = \left|\frac{x}{2n}\right|$. Karena pada $[0,1]$ nilai $\frac{x}{2n} \leq \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2N_{\varepsilon,x}} < \varepsilon$, maka $d(f_n(x), 0) = \left|\frac{x}{2n}\right| < \varepsilon$.

Terbukti bahwa barisan fungsi (f_n) pada $[0,1]$ dengan $f_n(x) = \frac{x}{2n}$ konvergen ke fungsi $f(x) = 0$.

Contoh 14:

Diberikan ruang metrik $(C[0,1], d)$ dengan metrik $d(f,g) = \sup|f(x) - g(x)|$ untuk semua $f, g \in X$. Barisan fungsi (f_n) pada $[0,1]$ dengan $f_n(x) = \frac{nx}{n+x}$ konvergen ke $f(x) = x$.

Bukti:

Barisan (f_n) konvergen saat $x \in [0,1]$ karena ada $f(x) = x \in C[0,1]$ sehingga berlaku $\lim_{n\to\infty} d\big(f_n(x), f(x)\big) = \lim_{n\to\infty} \sup|f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup\left|\frac{nx}{n+x} - x\right| = \lim_{n\to\infty} \sup\left|\frac{x^2}{n+x}\right|$, karena saat $x \in [0,1]$ nilai $\sup\left|\frac{x^2}{n+x}\right|$ tercapai saat $x = 1$ maka $\lim_{n\to\infty} d\big(f_n(x), f(x)\big) = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n+1}\right| = 0$.

Terbukti bahwa barisan fungsi (f_n) pada $[0,1]$ dengan $f_n(x) = \frac{nx}{n+x}$ konvergen ke fungsi $f(x) = x$.

Teorema 3.3.2 Diberikan ruang metrik $(\boldsymbol{C}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],\boldsymbol{d})$. Jika barisan fungsi $(\boldsymbol{f_n})$ konvergen seragam maka $(\boldsymbol{f_n})$ terbatas.

Bukti:

Diketahui $\lim(f_n) = f$, maka berdasarkan Definisi 2.3.2 jika diambil $\varepsilon = 1$ ada $N_\varepsilon(1) \in N$, sehingga $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N_\varepsilon(1)$ berlaku $d(f_n(x), f(x)) < 1$. Untuk $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N_\varepsilon(1)$ berlaku ketaksamaan segitiga yaitu:

$$d(f_n(x),0) \leq d\big(f_n(x), f(x)\big) + d(f(x),0)$$
$$< 1 + d(f,0)$$

Dipilih $M = \sup\{d(f_1(x),0), \ldots, d(f_{n-1}(x),0), 1 + d(f_n(x),0)\}$ maka $\forall n \in \mathbb{N}$, berlaku $d(f_n(x),0) \leq M$ sehingga berdasarkan Definisi 2.7 maka barisan fungsi (f_n) terbatas ∎.

Contoh 15:

Diberikan ruang metrik $(C[0,1], d)$ dengan barisan fungsi $(f_n) = \left(\frac{x^n}{n}\right)$. Berdasarkan Contoh 13 (f_n) konvergen seragam ke $f(x) = 0$ pada $C[0,1]$. Akan ditunjukkan bahwa (f_n) terbatas, yaitu

Karena (f_n) konvergen seragam ke $f(x) = 0$ artinya untuk setiap $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $\forall x \in [0,1]$ ada $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sehingga $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N_\varepsilon$ dan $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_\varepsilon} < 2\varepsilon$ berlaku $d(f_n(x),0) < \varepsilon$. Kita tahu bahwa barisan fungsi $(f_n) = (\frac{x}{2n})$, maka $d(f_1(x),0) = d\left(\frac{x}{2},0\right)$, $d(f_2(x),0) = d\left(\frac{x}{4},0\right), \ldots,$ $d(f_{n-1}(x),0) = d\left(\frac{x}{2(n-1)},0\right)$

Dipilih $M = \sup\{d(f_1(x),0), \ldots, d(f_n(x),0)\}$ maka terbukti bahwa $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $d(f_n(x),0) \leq M$ sehingga barisan fungsi (f_n) terbatas.

Teorema 3.3.3 Diberikan ruang metrik $(\boldsymbol{C}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],\boldsymbol{d})$. Jika barisan fungsi $(\boldsymbol{f_n})$ bersifat terbatas dan monoton naik (turun) dan konvergen seragam, maka barisan $(\boldsymbol{f_n})$ memiliki supremum (infimum).

Bukti:

Barisan fungsi (f_n) terbatas dan monoton naik maka berdasarkan Definisi 2.2.8 dan Definisi 2.2.9 ada M sehingga $d(f_n(x),0) \leq M$ dengan $f_n \leq f_{n+1}$ dan juga barisan fungsi (f_n) konvergen seragam, maka berdasarkan Definisi 2.3.2, jika diambil $\varepsilon > 0$ ada $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sehingga $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N_\varepsilon$ berlaku $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

Karena (f_n) terbatas dengan $f_n \leq f_{n+1}$ dan konvergen ke f maka untuk $\forall n \in \mathbb{N}$ berlaku $f_n \leq f_{n+1} \leq f$, sehingga diperoleh bahwa $f = \sup\{f_n, n \in N\}$ ∎.

Bukti untuk infimum serupa∎

Contoh 16:

Diberikan ruang metrik $(C[0,1], d)$ dengan metrik $d(f,g) = \sup|f(x) - g(x)|$ untuk semua $f, g \in X$. Barisan fungsi (f_n) dengan $f_n(x) = \frac{nx}{n+x}$ yang terbatas, monoton naik dan konvergen seragam dan memiliki supremum.

Bukti:

Barisan fungsi (f_n) terbatas saat $x \in [0,1]$ maka berdasarkan Definisi 2.2.8 ada $M = 1$ sehingga $d(f_n(x),0) = \sup\left|\frac{nx}{n+x} - 0\right| = \sup\left|\frac{nx}{n+x}\right| = \left|\frac{n}{n+1}\right| \leq 1$. Barisan fungsi (f_n) monoton naik maka berdasarkan Definisi 2.2.9 untuk $\forall n \in \mathbb{N}$ belaku $f_n \leq f_{n+1}$ dan konvergen seragam ke fungsi $f(x) = x$ saat $x \in [0,1]$, dan $f(x) = x \in C[0,1]$ sehingga (f_n) memiliki supremum yaitu $f(x) = x$.

Contoh 17:

Diberikan ruang metrik $(C[0,1], d)$ dengan metrik $d\big(f(x), g(x)\big) = \sup|f(x) - g(x)|$ untuk semua $f, g \in X$. Barisan fungsi (f_n) dengan $f_n(x) = \frac{x}{2n}$ yang terbatas, monoton turun dan konvergen seragam dan memiliki infimum.

Bukti:

Barisan fungsi (f_n) terbatas saat $x \in [0,1]$ maka berdasarkan Definisi 2.2.8 ada $M = 1$ sehingga $d(f_n(x),0) = \sup\left|\frac{x}{2n} - 0\right| = \sup\left|\frac{x}{2n}\right| = \left|\frac{1}{2n}\right| \leq 1$. Barisan fungsi (f_n) monoton turun maka berdasarkan Definisi 2.2.9 untuk $\forall n \in \mathbb{N}$ belaku $f_n \geq f_{n+1}$ dan konvergen seragam ke fungsi $f(x) = 0$ saat $x \in [0,1]$ dan $f(x) = 0 \in C[0,1]$ sehingga (f_n) memiliki infimum yaitu $f(x) = 0$.

Teorema 3.3.4 Diberikan ruang metrik $(\boldsymbol{C}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],\boldsymbol{d})$. Jika barisan fungsi $(\boldsymbol{f_n})$ merupakan barisan Cauchy dan konvergen seragam, maka $(\boldsymbol{C}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],\boldsymbol{d})$ merupakan ruang metrik lengkap.

Bukti:

Diketahui barisan fungsi (f_n) merupakan barisan Cauchy dan barisan fungsi (f_n) konvergen seragam. Berdasarkan Sifat barisan fungsi (f_n) yang konvergen seragam bersifat konvergen ke satu fungsi $f \in C[a,b]$. Jadi, untuk setiap barisan Cauchy (f_n) konvergen ke satu fungsi yaitu $f \in C[a,b]$, sehingga terbukti bahwa $(C[a,b],d)$ merupakan ruang metrik lengkap ■.

Contoh 18:

Diberikan ruang metrik $(C[0,1],d)$ dengan $d(f,g)=\sup|f(x)-g(x)|$ untuk semua $f,g \in C[0,1]$. Jika barisan fungsi (f_n) merupakan barisan Cauchy dan konvergen *pointwise* yang kontinu, maka $(C[0,1],d)$ merupakan ruang metrik yang lengkap.

Bukti:

Diketahui bahwa barisan fungsi (f_n) merupakan barisan Cauchy pada $C[0,1]$, berarti berdasarkan Definisi 2.2.3 yaitu untuk $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon>0$, ada $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ dan untuk $\forall m,n \in \mathbb{N}$ dengan $m \geq N_\varepsilon$ dan $n \geq N_\varepsilon$ berlaku $d\big(f_n(x),f_m(x)\big)=\sup|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$.

Kita mengenal kriteria kekonvergenan Cauchy yaitu barisan konvergen jika dan hanya jika barisan Cauchy dengan metrik biasa yaitu $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon>0$, ada $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ dan untuk $\forall m,n \in \mathbb{N}$ dengan $m \geq N_\varepsilon$ dan $n \geq N_\varepsilon$ berlaku $|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$.

Misal $|f_n(x)-f_m(x)|$ memiliki supremum ketika nilai $x=x_0 \in [0,1]$, maka $d\big(f_n(x),f_m(x)\big)=\sup|f_n(x)-f_m(x)|=|f_n(x_0)-f_m(x_0)|<\varepsilon$ sehingga berdasarkan kriteria kekonvergenan Cauchy, barisan fungsi (f_n) konvergen.

Misal barisan (f_n) konvergen ke fungsi f dengan $f \in C[0,1] \ni \lim_{n\to\infty} d(f_n(x),f(x))=0$. Karena $f \in C[0,1]$ berdasarkan Definisi 2.3.3 dengan metrik biasa maka berlaku untuk setiap $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon>0, \exists\delta \in \mathbb{R}, \delta>0 \ni \forall x \in [0,1], |x-x_0|<\delta \ni |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Karena (f_n) konvergen ke fungsi f pada $[0,1]$ maka berdasarkan Definisi 2.3.2 $\forall\frac{\varepsilon}{3} \in \mathbb{R}, \frac{\varepsilon}{3}>0$, ada bilangan asli N_ε dan untuk setiap bilangan asli n dengan $n \geq N_\varepsilon$ berlaku $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$ dan $|f_n(x_0)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}, x_0 \in [0,1]$.

Karena $f_n \in C[0,1]$ berarti f_n kontinu pada $[a,b]$ sehingga untuk $\forall\frac{\varepsilon}{3} \in \mathbb{R}, \frac{\varepsilon}{3}>0$, ada $\delta \in \mathbb{R}, \delta>0$ sehingga $\forall x \in [0,1], |x-x_0|<\delta$ berlaku $|f_m(x)-f_m(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$.

Sehingga untuk $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon>0$, ada $\delta \in \mathbb{R}, \delta>0$ sehingga $\forall x \in [0,1], |x-x_0|<\delta$ berlaku

$|f(x)-f(x_0)| \leq |f(x)-f_m(x)|+|f_m(x)-f_m(x_0)|+|f_m(x_0)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$

Sehingga disimpulkan bahwa $(C[0,1],d)$ merupakan ruang metrik lengkap.

Teorema 3.3.5 Diberikan barisan fungsi $(\boldsymbol{f_n})$ pada ruang metrik $(\boldsymbol{C[a,b],d})$. Jika barisan fungsi $(\boldsymbol{f_n})$ konvergen seragam maka barisan fungsi $(\boldsymbol{f_n})$ mampu dalam mempertahankan kekontinuan.

Bukti:

Diketahui barisan fungsi (f_n) pada ruang metrik $(C[a,b],d)$, artinya barisan fungsi (f_n) kontinu pada $[a,b]$. Barisan fungsi (f_n) konvergen seragam maka berdasarkan Sifat 3.3.1 maka barisan fungsi (f_n) konvergen ke satu fungsi yaitu $f \in [a,b]$, dengan f merupakan fungsi yang kontinu pada $[a,b]$. Sehingga terbukti bahwa barisan fungsi (f_n) kuat dalam mempertahankan kekontinuan ■.

Adapun untuk contoh nya, dapat dilihat dari contoh-contoh sebelumnya yaitu Contoh 13, Contoh 14, Contoh 15, Contoh 16 dan Contoh 17.

Teorema 3.3.6 Diberikan barisan fungsi $(\boldsymbol{f_n})$ dan $(\boldsymbol{g_n})$ pada ruang metrik $(\boldsymbol{C[a,b],d})$. Jika barisan fungsi $(\boldsymbol{f_n})$ dan $(\boldsymbol{g_n})$ berturut-turut konvergen seragam ke $\boldsymbol{f}$ dan $\boldsymbol{g}$ dengan $\boldsymbol{f,g \in C[a,b]}$, maka barisan fungsi $(\boldsymbol{f_n \pm g_n})$ dengan operasi penjumlahan biasa pada $\boldsymbol{C[a,b]}$ konvergen seragam ke $\boldsymbol{f \pm g \in C[a,b]}$.

Bukti:

Diketahui barisan fungsi (f_n) dan (g_n) berturut-turut konvergen seragam ke f dan g, maka berdasarkan Definisi 2.3.2, untuk $\forall\varepsilon>0$ ada $N'_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sehingga $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N'_\varepsilon$ berlaku $d(f_n(x),f(x))<\frac{\varepsilon}{2}$ dan ada $N''_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sehingga $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N''_\varepsilon$ berlaku $d(g_n(x),g(x))<\frac{\varepsilon}{2}$. Dipilih $N_\varepsilon=\min\{N'_\varepsilon,N''_\varepsilon\}$, maka untuk $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan menggunakan Definisi 2.3.4 tentang norm yaitu $d\big(f_n(x),f(x)\big)=\|f_n(x)-f(x)\|$ diperoleh

$$\begin{aligned} d\big(f_n(x)+g_n(x),f(x)+g(x)\big) &= \|f_n(x)+g_n(x)-f(x)-g(x)\| \\ &= \big\|\big(f_n(x)-f(x)\big) \\ &\quad+\big(g_n(x)-g(x)\big)\big\| \\ &\leq \|f_n(x)-f(x)\|+\|g_n(x)-g(x)\| \\ &= d\big(f_n(x),f(x)\big)+d\big(g_n(x),g(x)\big) \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \end{aligned}$$

Sehingga terbukti bahwa barisan fungsi (f_n+g_n) konvergen seragam ke $f+g \in C[a,b]$■.

Contoh 19:

Diberikan barisan fungsi $(f_n)=(\frac{x}{2n})$ dan $(g_n)=(\frac{nx}{n+x})$ pada ruang metrik $(C[0,1],d)$. Jika barisan fungsi (f_n) dan (g_n) berturut-turut konvergen seragam ke $f(x) = 0$ dan $g(x) = x$ dengan $f, g \in C[0,1]$ dengan metrik $d\big(k(x), l(x)\big) = \sup|k(x) - l(x)|$ untuk semua $k, l \in X$. Maka barisan fungsi $(\frac{x}{2n} + \frac{nx}{n+x})$ dengan operasi penjumlahan biasa pada $C[0,1]$ konvergen seragam ke fungsi $h(x) = x + 0 = x \in C[0,1]$.

Bukti :

Karena diketahui barisan fungsi $(\frac{x}{2n})$ dan $(\frac{nx}{n+x})$ berturut-turut konvergen seragam ke $f(x) = 0$ dan $g(x) = x$, maka berdasarkan Definisi 2.3.2, untuk $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ ada $N'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sehingga $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N'_\varepsilon$ berlaku $d(\frac{x}{2n}, 0) < \frac{\varepsilon}{2}$ dan ada $N''_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sehingga $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N''_\varepsilon$ berlaku $d(\frac{nx}{n+x}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Dipilih $N_{\varepsilon,x} = \min\{N'_\varepsilon, N''_\varepsilon\}$, maka untuk $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N_{\varepsilon,x}$ menggunakan Definisi 2.3.4 tentang norm yaitu $d\big(f_n(x), f(x)\big) = \|f_n(x) - f(x)\|$ maka diperoleh

$$d\left(\frac{x}{2n} + \frac{nx}{n+x}, x + 0\right) = \left\|\frac{x}{2n} + \frac{nx}{n+x} - x\right\| = \left\|\left(\frac{x}{2n} - 0\right) + \left(\frac{nx}{n+x} - x\right)\right\|$$

$$\leq \left\|\frac{x}{2n} - 0\right\| + \left\|\frac{nx}{n+x} - x\right\|$$

$$= d\left(\frac{x}{2n}, 0\right) + d\left(\frac{nx}{n+x}, x\right)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Sehingga terbukti bahwa barisan fungsi $\left(\frac{x}{2n} + \frac{nx}{n+x}\right)$ konvergen seragam ke fungsi $h(x) = x \in C[0,1]$.

Teorema 3.3.7 Diberikan barisan fungsi $(\boldsymbol{f_n})$ pada ruang metrik $(\boldsymbol{C[a,b]}, \boldsymbol{d})$. Jika barisan fungsi $(\boldsymbol{f_n})$ konvergen seragam ke $\boldsymbol{f \in C[a,b]}$, maka barisan fungsi $(\boldsymbol{\alpha f_n})$ dengan operasi perkalian skalar biasa pada $\boldsymbol{C[a,b]}$ konvergen seragam ke $\boldsymbol{\alpha f \in C[a,b]}$.

Bukti:

Diketahui barisan fungsi (f_n) konvergen seragam ke f maka berdasarkan Definisi 2.3.2, untuk setiap $\frac{\varepsilon}{|\alpha|} > 0$ ada $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sehingga $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N_\varepsilon$ berlaku $d(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$ maka menggunakan Definisi 2.3.4 tentang norm yaitu $d\big(f_n(x), f(x)\big) = \|f_n(x) - f(x)\|$ diperoleh

$$d\big(\alpha f_n(x), \alpha f(x)\big) = \|\alpha f_n(x) - \alpha f(x)\|$$

$$= \left\|\alpha\big(f_n(x) - f(x)\big)\right\|$$

$$= |\alpha|\|f_n(x) - f(x)\|$$

$$= |\alpha|\, d\big(f_n(x), f(x)\big) < \varepsilon$$

Sehingga terbukti bahwa barisan fungsi (αf_n) konvergen seragam ke $\alpha f \in C[a,b]$ ■.

Contoh 20:

Diberikan barisan fungsi $(f_n) = (\frac{nx}{n+x})$ pada ruang metrik $(C[0,1], d)$. Jika barisan fungsi (f_n) konvergen seragam ke $f(x) = x$ dengan $f \in C[0,1]$ dengan metrik $d\big(k(x), l(x)\big) = \sup|k(x) - l(x)|$ untuk semua $k, l \in X$. Maka barisan fungsi $(2f_n) = (\frac{2nx}{n+x})$ dengan operasi perkalian skalar biasa pada $C[0,1]$ konvergen seragam ke fungsi $g(x) = 2x \in C[0,1]$.

Bukti :

Diketahui barisan fungsi (f_n) konvergen seragam ke f maka berdasarkan Definisi 2.3.2, untuk setiap $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ ada $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sehingga $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N_\varepsilon$ berlaku $d(\frac{nx}{n+x}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ maka menggunakan Definisi 2.3.4 tentang norm yaitu $d\big(f_n(x), f(x)\big) = \|f_n(x) - f(x)\|$ diperoleh

$$d\left(\frac{2nx}{n+x}, 2x\right) = \left\|\frac{2nx}{n+x} - 2x\right\| = \left\|2\left(\frac{nx}{n+x} - x\right)\right\|$$

$$= |2|\left\|\frac{nx}{n+x} - x\right\| = 2\, d\big(f_n(x), f(x)\big) < \varepsilon$$

Sehingga terbukti bahwa barisan fungsi $\left(\frac{2nx}{n+x}\right)$ konvergen seragam ke fungsi $g(x) = 2x \in C[0,1]$.

Karakteristik barisan fungsi (f_n) sehingga terjadi ekuivalensi antara kekonvergenan *pointwise* dengan seragam dalam ruang metrik $C[a,b]$

Berdasarkan sifat-sifat yang telah dibahas dan dimiliki oleh barisan fungsi (f_n) yang konvergen *pointwise* dan seragam dalam ruang metrik $C[a,b]$ tentang banyak nilai kekonvergenan terhadap suatu fungsi pada $C[a,b]$, keterbatasan, kepemilikan supremum atau infimum, ruang metrik lengkap, kemampuan dalam mempertahankan kekontinuan, operasi penjumlahan dan perkalian skalar biasa terhadap barisan fungsi (f_n), terdapat indikasi bahwa ekuivalensi antara barisan fungsi (f_n) yang konvergen *pointwise* dan seragam dalam ruang metrik $C[a,b]$ tercapai saat barisan fungsi (f_n) konvergen ke tepat satu fungsi $f \in C[a,b]$ atau dengan kata lain barisan fungsi (f_n) memiliki supremum (infimum).

Berdasarkan sifat dan teorema tentang kepemilikan supremum atau infimum terhadap barisan fungsi (f_n) diperoleh bahwa barisan fungsi (f_n) yang konvergen seragam meiliki supremum atau infimum, sedangkan barisan fungsi (f_n) yang konvergen *pointwise* belum tentu memiliki supremum atau infimum. Sehingga diperlukan sifat yang menjamin bahwa barisan fungsi (f_n) yang konvergen *pointwise* memiliki supremum atau infimum. Akan ditunjukkan bahwa barisan fungsi (f_n) yang konvergen *pointwise* dan naik (turun) seragam pasti memiliki supremum (infimum) berdasarkan teorema berikut.

Teorema 3.4.1 Jika barisan fungsi $(\boldsymbol{f_n})$ itu konvergen *pointwise* dalam ruang metrik $\boldsymbol{C[a,b]}$ dan bersifat tidak turun (tidak naik) seragam maka barisan fungsi $(\boldsymbol{f_n})$ konvergen seragam dalam ruang metrik $\boldsymbol{C[a,b]}$.
Bukti:

Berdasarkan Definisi 2.3.1 yaitu barisan fungsi (f_n) dikatakan konvergen *pointwise* ke suatu fungsi f pada X jika dan hanya jika $\lim_{n\to\infty} d(f_n(x), f(x)) = 0$ atau $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ ada $N_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ sehingga $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N_{\varepsilon,x}$ berlaku $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$. Serta Definisi 2.2.10 barisan fungsi (f_n) dikatakan tidak turun seragam (*uniformly nondecreasing*) jika $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ ada $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sehingga $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N_\varepsilon$ berlaku $0 \leq f_{n+1} - f_n < \varepsilon$.

Karena berlaku $0 \leq f_{n+1} - f_n < \varepsilon$ maka $f_n \leq f_{n+1} < f_n + \varepsilon$ sehingga untuk setiap $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ ada $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ yang hanya bergantung pada ε sehingga $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N_\varepsilon \ni d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$, dan memenuhi Definisi 2.3.2 sehingga merupakan barisan fungsi (f_n) yang konvergen seragam ■.

Teorema 3.4.2 Jika barisan fungsi $(\boldsymbol{f_n})$ itu konvergen *pointwise* dalam ruang metrik $\boldsymbol{C[a,b]}$ dan bersifat tidak turun (tidak naik) seragam maka barisan fungsi $(\boldsymbol{f_n})$ memiliki supremum (infimum).
Bukti:

Berdasarkan Teorema 3.4.1, barisan fungsi (f_n) yang konvergen *pointwise* dan tidak turun seragam merupakan barisan yang konvergen seragam sehingga berdasarkan Teorema 3.3.3 barisan fungsi (f_n) memiliki supremum ■.

Untuk bukti kepemilikan infimum serupa■.

Teorema 3.4.3 Jika barisan fungsi $(\boldsymbol{f_n})$ itu konvergen *pointwise* dalam ruang metrik $\boldsymbol{C[a,b]}$ dan bersifat tidak turun (tidak naik) seragam maka ekuivalensi kekonvergenan *pointwise* dan seragam pada barisan fungsi $(\boldsymbol{f_n})$ dalam ruang metrik $\boldsymbol{C[a,b]}$ terjadi.
Bukti:

Berdasarkan Teorema 3.4.1, barisan fungsi (f_n) yang konvergen *pointwise* dan tidak turun seragam merupakan barisan yang konvergen seragam, dan berdasarkan Teorema 3.4.2 maka barisan fungsi (f_n) memiliki supremum (infimum).

Karena barisan fungsi (f_n) memiliki supremum (infimum) maka barisan fungsi (f_n) konvergen ke satu fungsi, sehingga semua sifat yang dimiliki barisan fungsi (f_n) yang konvergen seragam, juga dimiliki oleh barisan fungsi (f_n) yang konvergen *pointwise.* Sehingga terjadi ekuivalensi kekonvergenan *pointwise* dan seragam pada barisan fungsi (f_n) dalam ruang metrik $C[a,b]$■.

PENUTUP

SIMPULAN

Berdasarkan penjelasan tentang barisan fungsi (f_n) yang konvergen *pointwise* dan seragam dalam ruang metrik $C[a,b]$ dapat disimpulkan bahwa:

Sifat barisan fungsi (f_n) yang konvergen *pointwise* dalam ruang metrik $C[a,b]$ yaitu dapat konvergen ke lebih dari satu fungsi pada $C[a,b]$, terbatas, belum tentu memiliki supremum atau infimum, belum tentu ruang metrik lengkap, kurang mampu dalam mempertahankan kekontinuan, dengan operasi penjumlahan dan perkalian scalar biasa $(f_n + g_n)$ konvergen ke $f + g$, dan (αf_n) konvergen ke αf pada $C[a,b]$.

Sifat barisan fungsi (f_n) yang konvergen seragam dalam ruang metrik $C[a,b]$ yaitu konvergen ke tepat satu fungsi, terbatas, memiliki supremum atau infimum, merupakan ruang metrik lengkap, mampu dalam mempertahankan kekontinuan, dengan operasi penjumlahan dan perkalian scalar biasa $(f_n + g_n)$ konvergen ke $f + g$, dan (αf_n) konvergen ke αf pada $C[a,b]$.

Ekuivalensi antara barisan fungsi (f_n) yang konvergen *pointwise* dan seragam dalam ruang metrik $C[a,b]$ tercapai saat barisan fungsi (f_n) itu konvergen dan bersifat tidak turun (tidak naik) seragam.

SARAN

Pada artikel ini hanya dibahas mengenai karakteristik barisan fungsi (f_n) pada $C[a,b]$ sehingga terjadi ekuivalensi antara barisan fungsi (f_n) yang konvergen *pointwise* dengan yang konvergen seragam. Oleh karena itu, dapat dilakukan penelitian lebih lanjut dengan mengganti metriknya yaitu menjadi sebarang metrik pada barisan fungsi (f_n) dalam ruang metrik $C[a,b]$.

DAFTAR PUSTAKA

Alwi, W., & R, I., 2020. *Analisis Kekontinuan Fungsi* *pada Barisan Fungsi Konvergen.* Jurnal Matematika dan Statistika serta Aplikasinya, pp. 56-63.

Alwi, W., Irwan, M. & R, I., 2018. *Ekivalensi kekonvergenan pointwise dan kekonvergenan seragam pada barisan fungsi*. Jurnal Msa, pp. 15-23.

Bartle, R. G. & R, S. D., 2010. *Introduction to Real Analysis fourth edition*. Urbana-Campaign: John Wiley and Sons.

Bartle, R. G. & Sherbert, D. R., 2000. *Introduction to Real Analysis third edition*. New York: John Wiley and Son.

Faisal, Massalesse, J., & Nur, m., 2015. *Kelengkapan Ruang pada Ruang Norm-2*. JMSK (Jurnal Matematika, Statistika,dan Komputasi), pp. 84-92.

Indriyani, D., Kiftiah, m., & Helmi., 2019. *Kekonvergenan Barisan Pada Ruang Metrik Modular*. Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster), pp. 715-720.

Kreyszig, E., 1989. *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: John Wiley and Sons.

Kustiawan, c., 2013. *Kekontinuan Fungsi Pada Ruang Metrik*. Infinity, pp. 55-64.

Manuharawati, 2013. *Analisis Real 1*. Surabaya: Zifatama Publisher.

Marsden, J. E., 1974. *Elementary Claasical Analysis*. San Francisco: W. H. Freeman and Company.

Rini, A., Sugiatno, & Prihandono, B., 2013. *Completion Dari Ruang Metrik*. Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster), pp. 101-106.

Setiyawan, R. P. & Hartono, 2017. *Analisis Kekonvergenan pada Barisan Fungsi.* Jurnal Matematika, pp. 34-39.

Shirali, S. & L, V. H., 2006. *Metric Spaces*. London: Springer Science.

Sulaiman, H., Firmansari, S., & Wahyuni, I., 2018. *Sifat-Sifat Kekonvergenan Pada Barisan Fungsi Real*. Jurnal Teorema (Teori dan Riset Matematika), pp. 157-164.

Tarbiyyah, H. H., & Manuharawati., 2019. *Teorema Ketunggalan Titik Tetap Pada Ruang B-Metrik Lengkap*. MATHunesa, pp. 32-35.

Ubaidillah, F., Darmawijaya, S. & Indrati, C. R., 2013. *Kekonvergenan barisan didalam Ruang Fungsi Kontinu C[a,b]*. Jurnal Cauchy, pp. 184-188.