MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115

Volume 09 *No* 01
Tahun 2021

BILANGAN KROMATIK-b GRAF SENTRAL, TENGAH, DAN TOTAL DARI SEBUAH BINTANG

Miftakhul Jannah Setyorini
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : miftakhul.17030214003@mhs.unesa.ac.id

I Ketut Budayasa
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail **:** ketutbudayasa@yahoo.com

Abstrak

Misalkan G sebuah graf. Pewarnaan-k sejati ("*proper*") pada G adalah pewarnaan semua titik G dengan k warna sedemikian hingga setiap dua titik G yang berhubungan langsung mendapat warna berbeda. Minimum nilai k sedemikian hingga ada pewarnaan-k sejati pada G disebut bilangan kromatik G. Pewarnaan-b pada G adalah sebuah pewarnaan-k sejati pada G sedemikian hingga setiap kelas warna mempunyai sebuah representatif (wakil) yang berhubungan langsung ke paling sedikit satu titik di setiap kelas warna yang lain. Bilangan bulat positif terbesar k sedemikian hingga ada pewarnaan-b pada G disebut bilangan kromatik-b pada G, dilambangkan $\varphi(G)$. Pada artikel ini diperoleh bilangan kromatik-b graf sentral dari graf bintang $\varphi(C(S_n))$, bilangan kromatik-b graf tengah dari graf bintang $\varphi(M(S_n))$ dan bilangan kromatik-b graf total dari graf bintang $\varphi(T(S_n))$.

Kata kunci: Bilangan Kromatik, Bilangan Kromatik-b, Graf Bintang

Abstract

Let G be a graph. A proper k-coloring of G is coloring all vertices of G with k colors such that every two adjacent vertices are assigned different colors. The minimum value of k for which a proper k-coloring of G exist is called the chromatic number of G. A b-coloring of G is a proper k-coloring of G such that each color class has a representative that is adjacent to at least one vertex in each of the other color classes. The largest positive integer k such that there is a b-coloring of G is called the b-chromatic number of G, denoted $\varphi(G)$. In this article, we establish the b-chromatic number of the central graph on the star graph $\varphi(C(S_n))$, the b-chromatic number of the middle graph on the star graph $\varphi(M(S_n))$ and the b-chromatic number of total graph on the star graph $\varphi(T(S_n))$.

Keywords : Chromatic Number; B-chromatic Number; Star Graf

1. PENDAHULUAN

Cabang ilmu matematika salah satunya adalah Teori Graf. Teori Graf mempunyai peran yang cukup penting dalam segi terapan pada bidang keilmuan lain. Dari segi matematika, pada awalnya teori graf "kurang" signifikan, karena kebanyakan dipakai untuk memecahkan teka-teki (puzzle), namun akhirnya mengalami perkembangan yang sangat pesat yaitu terjadi pada beberapa puluh tahun terakhir. Salah satu alasan perkembangan teori graf yang begitu pesat yaitu aplikasinya yang sangat luas dalam kehidupan sehari-hari (Budayasa, 2007).

Sebuah graf G berisikan dua himpunan, yaitu himpunan berhingga tak kosong $V(G)$ dari obyek-obyek yang disebut titik dan himpunan berhingga (mungkin kosong) $E(G)$ yang elemen-elemennya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen e dalam $E(G)$ merupakan pasangan tak berurutan dari titik-titik di $V(G)$ (Budayasa, 2007). Topik dalam teori graf salah satunya adalah pewarnan. Pewarnaan ini terbagi menjadi dua jenis, yaitu pewarnaan titik dan pewarnaan sisi.

Artikel ini akan membahas pewarnaan titik suatu graf G yang disebut pewarnaan-b. Pewarnaan-b adalah pewarnaan titik G sedemikian hingga setiap dua titik yang berhubungan langsung mendapatkan warna yang berbeda dan setiap kelas warna mempunyai wakil yang berhubungan langsung dengan kelas warna yang lain. Maksimum banyaknya warna yang digunakan untuk mendapatkan pewarnaan-b disebut bilangan kromatik-b yang dilambangkan dengan $\varphi(G)$.

Salah satu aplikasi pewarnaan-b yaitu pengelompokan data. Penelitian yang dilakukan oleh (Elghazel dkk., 2008) menyajikan kerangka kerja baru dengan pewarnaan-b untuk mengelompokkan objek heterogen ke dalam kelompok. Selain itu, pewarnaan-b juga banyak dikaji untuk pengembangan teori, seperti Wulandari (2016), yang mengkaji bilangan kromatik-b untuk beberapa kelas graf. Oleh karena itu, artikel ini akan mengkaji bilangan kromatik-b pada kelas graf yang belum dibahas sebelumnya, yaitu bilangan kromatik-b graf sentral, graf tengah dan graf total pada kelas graf bintang.

2. KAJIAN TEORI

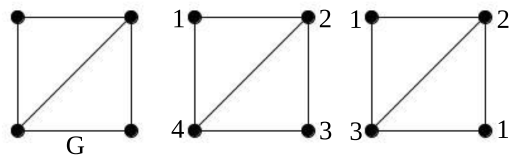
2.1 Bilangan Kromatik

Definisi 2.1: Misalkan G sebuah graf. Sebuah pewarnaan-k pada G adalah pewarnaan semua titik G dengan menggunakan k warna. Sebuah pewarnaan-k disebut sejati ("*proper*") jika dalam pewarnaan-k tersebut setiap dua titik yang berhubungan langsung harus mendapat warna berbeda. Kelas warna adalah himpunan titik-titik berwarna sama. Minimum nilai k sedemikian hingga ada pewarnaan-k sejati pada G disebut bilangan kromatik G, disimbolkan dengan $\chi(G)$. Jadi

$$\chi(G) = \min\{\text{k}|\text{ada pewarnaan-k sejati pada G}\}$$

(Budayasa, 2007)

Contoh 2.1:



(a) (b) (c)

Gambar 2.1 Graf G

Perhatikan, graf G pada Gambar 2.1.(a). Sebuah pewarnaan-4 sejati pada G ditunjukkan pada Gambar 2.1.(b). Sedangkan Gambar 2.1.(c), menunjukkan sebuah pewarnaan-3 sejati pada G. Karena tidak ada pewarnaan-2 sejati, maka $\chi(G)$=3.

Menggunakan Definisi 2.1, dapat dengan mudah dibuktikan pernyataan berikut:

Lemma 2.1.1:

Jika H subgraf G, maka $\chi(G) \geq \chi(H)$

Lemma 2.1.2:

Graf G bipartit jhj $\chi(G)$=2

Lemma 2.1.3:

Jika C_n adalah siklus dengan n titik, maka

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, n\ genap \\ 3, n\ ganjil \end{cases}$$

Lemma 2.1.4:

Jika K_n graf komplet dengan n titik, maka

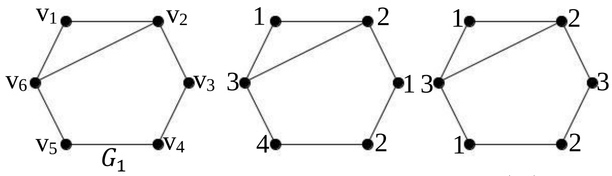
$$\chi(K_n) = \text{n}$$

2.2 Bilangan Kromatik-b

Definisi 2.2: Misalkan G sebuah graf. Pewarnaan-b pada G adalah sebuah pewarnaan-k sejati pada G sedemikian hingga, setiap kelas warna mempunyai sebuah representatif (wakil) yang berhubungan langsung ke paling sedikit satu titik di setiap kelas warna yang lain. Bilangan kromatik-b pada G, dilambangkan $\varphi(G)$, adalah bilangan bulat positif terbesar k sedemikian hingga ada pewarnaan-b pada G. (Vernold, 2010).

Contoh 2.2:

a) Perhatikan graf G_1 pada gambar berikut:



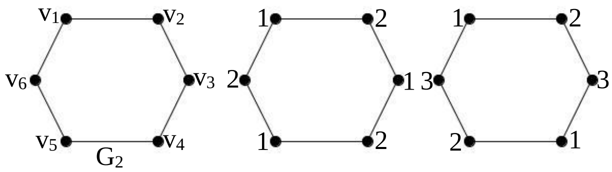
(i) (ii) (iii)

Gambar 2.2.(a) Graf G_1

Gambar (ii), memperlihatkan pewarnaan-4 sejati pada G_1, tetapi bukan pewarnaan-b pada G_1, karena titik yang berwarna 4 tidak berhubungan langsung dengan salah satu titik berwarna 1.

Gambar (iii), memperlihatkan sebuah pewarnaan-3 sejati pada G_1, dan juga pewarnaan-b pada G_1. Dalam hal ini, $\varphi(G_1)$ = 3

b) Perhatikan graf G_1 pada gambar berikut:



(i) (ii) (iii)

Gambar 2.2.(b) Graf G_2

Gambar (ii), menunjukkan sebuah pewarnaan-2 sejati sekaligus sebuah pewarnaan-b pada G_2.

Gambar (iii), menunjukkan sebuah pewarnaan-3 sejati dan juga pewarnaan-b pada G_2.

Karena tidak ada pewarnaan-b pada G_2 dengan menggunakan 4 warna, maka $\varphi(G_2)$ = 3

Dari definisi 2.1 dan 2.2, diperoleh hasil berikut:

Lemma 2.2.1:

Jika G sebuah graf, maka $\varphi(G) \geq \chi(G)$

Catatan:

Perhatikan graf G_1 dan G_2 pada Gambar 2.2.(a) dan Gambar 2.2.(b). Tampak bahwa

$$\varphi(G_1) = 3 = \chi(G_1) \text{ dan } \varphi(G_2) = 3 > 2 = \chi(G_2)$$

Secara umum, diperoleh hasil berikut:

Lemma 2.2.2:

Jika C_n adalah siklus dengan n titik, maka

$$\begin{cases} \varphi(C_n) = \chi(C_n), \text{ untuk n ganjil} \\ \varphi(C_n) > \chi(C_n), \text{ untuk n genap dan n=0 (mod 3)} \end{cases}$$

Bukti:

Misal $C_n = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n, v_1)$

Kasus 1: n ganjil

Karena n ganjil, maka C_n bukan graf bipartit sehingga berdasarkan Lemma 2.1.2 dan C_n bukan graf kosong, diperoleh

$$\chi(C_n) \geq 3 \ \ldots (1)$$

Konstruksi sebuah pewarnaan W pada C_n sebagai berikut:

$$W(v_i) = \begin{cases} 1, i = 2k-1, 1 \leq k \leq \frac{n-1}{2} \\ 2, i = 2k, 1 \leq k \leq \frac{n-1}{2} \\ 3, i = n \end{cases}$$

Jelas bahwa W sebuah pewarnaan-3 sejati pada C_n. Sehingga berdasarkan Definisi 2.1,

$$\chi(C_n) \leq 3 \ \ldots (2)$$

Dari (1) dan (2), diperoleh

$$\chi(C_n) = 3 \ \ldots (3)$$

Perhatikan pewarnaan W. Titik v_1 di C_n terletak pada kelas titik-titik berwarna 1, berhubungan langsung dengan titik v_2 yang terletak pada kelas titik-titik berwarna 2, dan juga berhubungan langsung dengan titik v_n yang terletak pada kelas titik-titik 3. Titik v_{n-1}terletak pada kelas titik berwarna 2, berhubungan langsung dengan titik v_{n-2} yang terletak di kelas titik berwarna 1 dan juga berhubungan langsung dengan v_n yang terletak pada kelas titik berwarna 3. Akhirnya, titik v_n berwarna 3, berhubungan langsung dengan v_1 berwarna 1 dan juga berhubungan langsung dengan v_{n-1} berwarna 2. Dengan demikian, W adalah sebuah pewarnaan-b pada C_n dengan 3 warna. Berdasarkan Definisi 2.2,

$$\varphi(C_n) \geq 3 \ldots (4)$$

Karena $\Delta(C_n) = 2$, maka tidak ada pewarnaan-b pada C_n dengan menggunakan 4 warna sehingga

$$\varphi(C_n) \leq 3 \ldots (5)$$

Dari (4) dan (5), diperoleh

$$\varphi(C_n) = 3 \ldots (6)$$

Dengan demikian, dari (3) dan (6) disimpulkan bahwa

$$\varphi(C_n) = 3 = \chi(C_n)$$

Kasus 2: n genap dan n ≡ 0 (mod 3)

Karena n genap, maka C_n graf bipartit. Sehingga berdasarkan Lemma 2.1.2,

$$\chi(C_n) = 2 \ldots (1)$$

Selanjutnya, konstruksi sebuah pewarnaan W pada C_n sedemikian hingga

$$W(v_i) = \begin{cases} 1, i = 3k-2, 1 \leq k \leq \dfrac{n}{3} \\ 2, i = 3k-1, 1 \leq k \leq \dfrac{n}{3} \\ 3, i = 3k, 1 \leq k \leq \dfrac{n}{3} \end{cases}$$

Dengan argument seperti Kasus 1, jelas bahwa pewarnaan W adalah sebuah pewarnaan-3 sejati dan sebuah pewarnaan-b pada C_n. Sehingga berdasarkan Definisi 2.2,

$$\varphi(C_n) \geq 3 \ldots (2)$$

Karena $\Delta(C_n) = 2$, tidak ada pewarnaan-b dengan 4 warna pada C_n, sehingga

$$\varphi(C_n) \leq 3 \ldots (3)$$

Dari (2) dan (3) disimpulkan

$$\varphi(C_n) = 3 \ldots (4)$$

Dari (1) dan (4), diperoleh

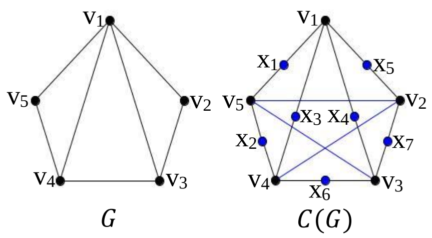
$$\varphi(C_n) = 3 > 2 = \chi(C_n)$$

Dengan demikian, bukti Lemma lengkap.

2.3 Graf Sentral

Definisi 2.3: Misalkan G sebuah graf. Graf Sentral dari G, dilambangkan dengan $C(G)$, adalah sebuah graf yang diperoleh dari G dengan menyisipkan tepat satu titik baru pada setiap sisi G dan menghubungkan dengan sebuah sisi setiap dua titik G yang tidak berhubungan langsung (Vernold, 2010).

Contoh 2.3:



Gambar 2.3 Graf G dan Graf Sentral G

Catatan: Perhatikan bahwa, jika G graf dengan n titik dan m sisi, maka graf $C(G)$ mempunyai $n+m$ titik dan $\frac{n^2-n+2m}{2}$ sisi.

2.4 Graf Tengah

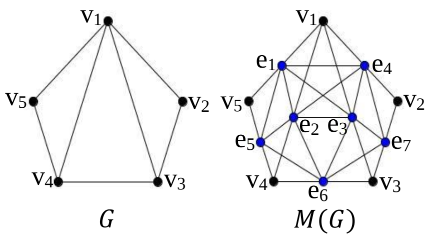
Definisi 2.4: Misalkan G sebuah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Graf Tengah (Middle) dari G, dilambangkan $M(G)$, didefinisikan sebagai berikut: Himpunan titik $M(G)$ adalah $V(G) \cup E(G)$, dan dua titik u dan v di $M(G)$ berhubungan langsung jika salah satu yang berikut dipenuhi:

(i) $u, v \in E(G)$ dan u, v terkait pada titik yang sama pada G

(ii) $u \in V(G), v \in E(G)$ sisi v terkait dengan titik u di G.

(Vernold, 2010).

Contoh 2.4:



Gambar 2.4 Graf G dan Graf Tengah G

Catatan: Dapat ditunjukkan bahwa, jika G graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$, maka:

(i) $|V(M(G))| = |V(G)| + |E(G)|$

(ii) $|E(M(G))| = |E(G)| + \frac{1}{2}\sum_{v \in V(G)} d_G^2(v)$

Perhatikan graf G pada Gambar 2.4 diatas, jelas bahwa

$$|V(G)| = 5 \text{ dan } |E(G)| = 7$$

Sehingga

$$|V(M(G))| = 5 + 7 = 12$$

dan

$$|E(M(G))| = 7 + \frac{1}{2}(4^2+2^2+3^2+3^2+2^2)$$
$$= 28$$

Jadi banyak titik $M(G)$ adalah 12 dan banyak sisi $M(G)$ adalah 28 (sesuai dengan yang ada pada Gambar 2.4).

2.5 Graf Total

Definisi 2.5: Misalkan G sebuah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Graf Total dari G, dilambangkan dengan $T(G)$ didefinisikan sebagai berikut: Himpunan titik $T(G)$ adalah $V(G) \cup E(G)$, dan dua titik u dan v di $T(G)$ berhubungan langsung jika dipenuhi:

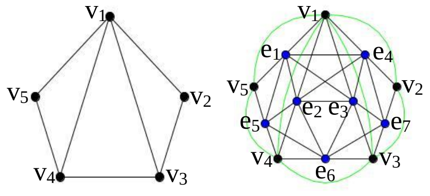
(i) $u, v \in E(G)$ dan u, v terkait pada titik yang sama pada G

(ii) $u \in V(G), v \in E(G)$ sisi v terkait dengan titik u di G

(iii) $u, v \in V(G)$, u dan v berhubungan langsung di G

(Vernold, 2010).

Contoh 2.5:



Gambar 2.5 Graf G dan Graf Total G

Catatan: Dapat ditunjukkan, jika G graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$, maka:

(i) $|V(M(G))| = |V(G)| + |E(G)|$

(ii) $|E(M(G))| = 2|E(G)| + \frac{1}{2}\sum_{v\in V(G)} d_G^2(v)$

Definisi 2.6: Graf bintang merupakan graf bipartit komplet ($K_{1,n-1}$) yang dilambangkan dengan S_n (Roza, 2014). Dengan satu titik berderajat n-1 yang dinamakan titik pusat dan titik lainnya berderajat 1 yang dinamakan anting-anting.

3. PEMBAHASAN

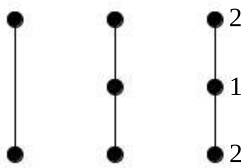
3.1 Bilangan Kromatik-b Graf Sentral Pada Graf Bintang

Teorema 3.1: Jika S_n sebuah bintang dengan n titik, maka bilangan kromatik-b graf sentral S_n adalah

$$\varphi\big(C(S_n)\big) = \begin{cases} n, n = 2 \text{ atau } n = 3 \\ n-1, n \geq 4 \end{cases}$$

Bukti:

Untuk n = 2, maka $S_2 = K_{1,1}$ dan graf sentral dari S_2 dapat dilihat pada gambar berikut:



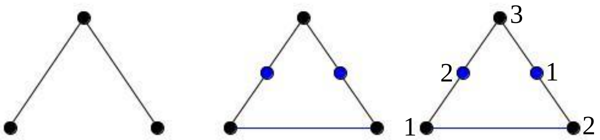
Gambar 3.1.1 Graf Bintang dengan 2 titik

Sebuah pewarnaan-b dengan 2 warna diperlihatkan pada Gambar 3.1.(c). Karena tidak ada pewarnaan dengan 3 warna pada $C(S_2)$, maka

$$\varphi(C(S_2)) = 2$$

Untuk n=3, $S_3 = K_{1,2}$

Graf S_3 dan $C(S_3)$ seperti pada gambar berikut:



Gambar 3.1.2 Graf Bintang dengan 3 titik

Perhatikan bahwa $C(S_3)$ sebuah sikel dengan 5 titik. Sehingga

$$\varphi(C(S_3)) = \varphi(C_5) \dots \text{(i)}$$

Berdasarkan Lemma 2.2.2,

$$\varphi(C_5) = \chi(C_5) = 3 \dots \text{(ii)}$$

Berdasarkan (i) dan (ii) disimpulkan

$$\varphi(C(S_3)) = 3$$

Sebuah pewarnaan-b pada graf $C(S_3)$ dengan 3 warna dapat dilihat pada Gambar 3.2.(c).

Selanjutnya, misalkan n ≥ 4. Berdasarkan definisi graf bintang, $S_n = K_{1,n-1}$.

Misalkan titik pusat dari S_n adalah v dan himpunan titik-titik "anting" (titik-titik berderajat 1) S_n adalah $A = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$

Jika untuk setiap i, $1 \leq i \leq n-1$, pada sisi vv_i disisipkan titik u_i, dan $B = \{u_1, u_2, \dots, u_{n-1}\}$, maka himpunan titik graf $C(S_n)$ adalah

$$V\big(C(S_n)\big) = A \cup B \cup \{v\}$$

Karena A adalah himpunan titik-titik independen pada S_n, maka berdasarkan Definisi 2.3, setiap dua titik berbeda di A saling berhubungan langsung pada graf $C(S_n)$. Sehingga subgraf $C(S_n)$ yang dibangun (diinduksi) oleh himpunan A, membentuk graf komplet dengan n-1 titik. Dengan kata lain,

$$C(S_n)[A] = K_{n-1}$$

Dari Lemma 2.1.4,

$$\chi(K_{n-1}) = n-1$$

Dari Lemma 2.1.1, diperoleh

$$\chi(C(S_n)) \geq \chi(K_{n-1}) = n-1 \dots (1)$$

Berdasarkan Lemma 2.2.1, diperoleh

$$\varphi(C(S_n)) \geq \chi(C(S_n)) \dots (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2), dapat disimpulkan

$$\varphi(C(S_n)) \geq n-1 \dots (3)$$

Selanjutnya, dikonstruksi sebuah pewarnaan-b pada graf $C(S_n)$ dengan menggunakan n-1 warna dengan cara sebagai berikut:

(i) $\forall i, 1 \leq i \leq n-1$, warnai titik v_i dengan warna i

(ii) $\forall i, 2 \leq i \leq n-1$, warnai titik u_i dengan warna 1

dan warnai titik u_1 dengan warna (n-1).

(iii) Warnai v dengan warna 2

Perhatikan bahwa pewarnaan ini memenuhi Definisi 2.2. Selanjutnya, ditunjukkan bahwa tidak ada pewarnaan-b pada graf $C(S_n)$ dengan menggambar n warna.

Andaikan $\varphi(C(S_n)) = n$. Maka harus ada paling sedikit n titik masing-masing berderajat n-1 pada graf $C(S_n)$, dan semua titik tersebut berwarna berbeda dan setiap titik berhubungan langsung ke semua titik-titik yang berwarna berbeda. Perhatikan bahwa, hanya titik-titik $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ yang masing-masing berderajat n-1 pada graf $C(S_n)$ dan titik-titik ini harus mendapat warna yang berbeda. Tanpa menghilangkan perumpamaan, missal titik v berwarna i dan titik v_1 berwara j, dan $i \neq j$. Titik u_1 berhubungan langsung dengan titik v di $C(S_n)$, maka titik u_1 tidak boleh berwarna i.

Sehingga titik v_1 yang berwarna j tidak berhubungan langsung dengan sebuah titik berwarna i pada $C(S_n)$.

Berdasarkan Definisi 2.2, pewarnaan yang diperoleh bahwa sebuah pewarnaan-b pada graf $C(S_n)$. Akibatnya,

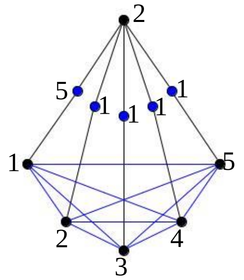
$$\varphi(C(S_n)) \leq n-1 \ldots (4)$$

Dari (3) dan (4) disimpulkan,

$$\varphi(C(S_n)) = n-1$$

Dengan demikian, bukti Teorema lengkap.

Contoh 3.1



Gambar 3.1.3 Sebuah pewarnaan-b pada $C(S_6)$ dengan 5 warna, $\varphi(C(S_6)) = 5$

Akibat 3.2: Jika S_n sebuah bintang dengan n titik, maka

$$\varphi\big(C(S_n)\big) = \chi(C(S_n))$$

Bukti:

Untuk n=2 atau n=3, trivial

Misal n≥4. Graf bagian $C(S_n)$ yang dibangun oleh himpunan titik-titik anting (pendant) S_n adalah graf komplet dengan n-1 titik atau K_{n-1}.

Berdasarkan Lemma 2.1.1 dan Lemma 2.1.4,

$$\chi\big(C(S_n)\big) \geq \chi(K_{n-1}) = n-1 \ldots (1)$$

Dari pembuktian Teorema 3.1 ada sebuah pewarnaan titik sejati pada $C(S_n)$ dengan menggunakan n-1 warna, berdasarkan Definisi bilangan kromatik,

$$\chi\big(C(S_n)\big) \leq \text{n-1} \ldots (2)$$

Dari (1) dan (2), diperoleh

$$\chi\big(C(S_n)\big) = \text{n-1} \ldots (3)$$

Dari Teorema 3.1, untuk n ≥ 4,

$$\varphi\big(C(S_n)\big) = n-1 \ldots (4)$$

Dari (3) dan (4) diperoleh

$$\varphi\big(C(S_n)\big) = \chi(C(S_n))$$

Terbukti

3.2 Bilangan Kromatik-b Graf Tengah dari Graf Bintang

Teorema 3.3: Jika S_n sebuah bintang dengan n titik, maka

$$\varphi\big(M(S_n)\big) = n$$

Bukti:

Ingat bahwa S_n=$K_{1,n-1}$

Misal, $V(S_n) = \{v, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$

dan $V\big(M(S_n)\big) = \{v\} \cup \{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\} \cup \{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}$

Perhatikan bahwa, subgraf dari $M(S_n)$ yang dibangun oleh himpunan titik: $\{v, e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}$ adalah graf komplet dengan n titik atau K_n.

Berdasarkan Lemma 2.1.1 dan Lemma 2.1.4,

$$\chi(M(S_n)) \geq \chi(K_n) = \text{n} \ldots (1)$$

Berdasarkan Teorema 2.2.1 dan (1),

$$\varphi(M(S_n)) \geq \chi(M(S_n)) = \text{n}$$

Sehingga

$$\varphi(M(S_n)) \geq n \ldots (2)$$

Didefinisikan, pewarnaan titik- W pada graf $M(S_n)$ sebagai berikut:

$$W(x_i) = \begin{cases} i, x_i = e_i, 1 \leq i \leq n-1 \\ n, x_i = v \text{ atau } x_i = v_1 \\ 1, x_i = v_{i+1}, 1 \leq i \leq n-2 \end{cases}$$

Perhatikan bahwa, terhadap pewarnaan W, dua titik $M(S_n)$ yang berhubungan langsung mendapatkan warna yang berbeda. Sehingga W adalah sebuah pewarnaan-titik sejati pada graf $M(S_n)$ dengan menggunakan n warna.

Untuk setiap i, $1 \leq i \leq n-1$, titik e_i adalah representatif kelas warna i dan titik v representasi kelas warna n. Ini berarti W adalah sebuah pewarnaan-b pada $M(S_n)$ dengan n warna.

Selanjutnya, andaikan $\varphi(M(S_n)) > n$. Karena $\varphi(M(S_n))$ bilangan bulat, maka $\varphi(M(S_n)) \geq n+1$. Ini berarti harus ada paling sedikit n+1 titik, masing-masing berderajat n di graf $M(S_n)$, semua berwarna berbeda dan setiap titik berhubungan langsung ke semua titik lain yang berwarna berbeda. Hal ini tidak mungkin, karena pada graf $M(S_n)$ ada sebanyak n-1 titik yang masing-masing berderajat n yaitu titik-titik $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$. Ini berarti tidak ada pewarnaan-b pada graf $M(S_n)$ dengan n+1 warna. Akibatnya,

$$\varphi(M(S_n)) < n+1, \text{ atau}$$

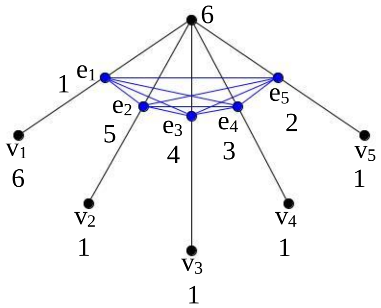
$$\varphi(M(S_n)) \leq n \ldots (3)$$

Dari (2) dan (3), disimpulkan

$$\varphi(M(S_n)) = n$$

Dengan demikian, Teorema terbukti.

Contoh 3.3:



Gambar 3.3 Sebuah pewarnaan-b pada $M(S_6)$ dengan 6 warna, $\varphi(M(S_6)) = 6$

Sebagai akibat dari Teorema 3.3 adalah hasil berikut:

Akibat 3.4: Jika $M(S_n)$ adalah graf tengah dari bintang S_n dengan n titik, maka

$$\varphi\big(M(S_n)\big) = \chi(M(S_n))$$

Bukti:

Seperti dalam pembuktian Teorema 3.3, graf $M(S_n)$ yang dibangun himpunan titik: $\{v, e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}$ adalah graf komplet dengan n titik. Sehingga

$$\chi(M(S_n)) \geq \chi(K_n) = n \ldots (1)$$

Pewarnaan W dalam pembuktian teorema diatas adalah sebuah pewarnaan-b pada graf $M(S_n)$. Sehingga W juga merupakan sebuah pewarnaan sejati pada graf $M(S_n)$ dengan menggunakan n warna. Akibatnya, berdasarkan definisi bilangan kromatik,

$$\chi(M(S_n)) \leq n \ldots (2)$$

Dari (1) dan (2), diperoleh

$$\chi(M(S_n)) = n \ldots (3)$$

Dari Teorema 3.3,

$$\varphi(M(S_n)) = n \ldots (4)$$

Dari (3) dan (4), diperoleh

$$\varphi(M(S_n)) = \chi(M(S_n))$$

Dengan demikian, bukti lengkap.

3.3 Bilangan Kromatik-b Graf Total dari Graf Bintang

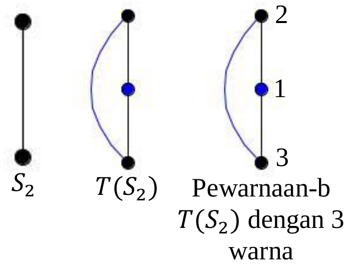
Berikut ini akan dibuktikan bahwa, bilangan kromatik-b graf total dari graf bintang adalah sama dengan banyaknya titiknya, kecuali banyaknya titik graf bintang adalah 2.

Teorema 3.5: Jika S_n sebuah graf bintang dengan n titik, maka,

$$\varphi(T(S_n)) = \begin{cases} 3, n = 2 \\ n, n \geq 3 \end{cases}$$

Bukti:

Untuk n=2, maka $S_2 = K_{1,1}$. Graf S_2, $T(S_2)$, dan pelabelan-b $T(S_2)$ dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 3.5.1 Graf bintang dengan 2 titik

Jelas bahwa $\varphi(T(S_2)) = 3$.

Misal n ≥ 3, dan $V(S_n) = \{v, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ dan $V(T(S_n)) = \{v\} \cup \{v_i / 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{e_i / 1 \leq i \leq n-1\}$.

Graf bagian $T(S_n)$ yang dibangun himpunan titik: $\{v, e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}$ adalah K_n. Sehingga berdasarkan Lemma 2.1.1 dan Lemma 2.1.4, diperoleh

$$\chi(T(S_n)) \geq \chi(K_n) = \text{n} \ldots (1)$$

Dari (1) dan Lemma 2.2.1

$$\varphi(T(S_n)) \geq \chi(T(S_n)) \geq \text{n}$$

Sehingga

$$\varphi(T(S_n)) \geq n \ldots (2)$$

Konstruksi sebuah pewarnaan-titik W pada graf $T(S_n)$. sedemikian hingga $\forall x_i \in V(T(S_n))$,

$$W(x_i) = \begin{cases} i, x_i = e_i, 1 \leq i \leq n-1 \\ n, x_i = v \\ 1, x_i = v_i, 2 \leq i \leq n-1 \\ n-1, x_i = v_1 \end{cases}$$

Perhatikan bahwa W sebuah pewarnaan-b pada graf $T(S_n)$ dengan menggunakan n warna. Andaikan $\varphi(T(S_n)) > n$. Karena $\varphi(T(S_n))$ bilangan-bilangan bulat, maka $\varphi(T(S_n)) \geq n+1$. Seperti sebelumnya, harus ada n+1 titik, masing-masing berderajat n di graf $T(S_n)$, semua berwarna berbeda dan setiap titik berhubungan langsung ke semua titik lain yang berwarna berbeda. Hal ini tidak mungkin, karena pada graf $T(S_n)$ hanya ada sebanyak n-1 titik yang masing-masing berderajat n, yaitu titik-titik $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$. Jadi tidak ada pewarnaa-b pada $T(S_n)$ dengan menggunakan sebanyak n+1 warna. Sehingga $\varphi(T(S_n)) < n+1$. Karena $\varphi(T(S_n))$ dan n+1 bilangan bulat, maka

$$\varphi(T(S_n)) \leq n \ldots (3)$$

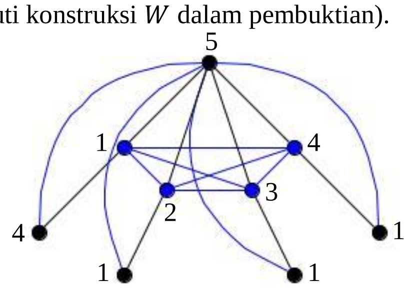
Dari (2) dan (3) diperoleh

$$\varphi(T(S_n)) = n$$

Dengan demikian, bukti Teorema Lengkap.

Contoh 3.5:

Sebuah pewarnaan-b pada graf $T(S_n)$ dengan menggunakan 5 warna, dapat dilihat pada gambar berikut. (Mengikuti konstruksi W dalam pembuktian).



Gambar 3.5.2 Sebuah pewarnaan-b pada $T(S_5)$ dengan 5 warna $\varphi(T(S_5)) = 5$

Sebagai akibat langsung dari Teorema 3.5 adalah yang sebagai berikut ini.

Akibat 3.6: Jika $T(S_n)$ graf total bintang S_n, maka

$$\varphi(T(S_n)) = \chi(T(S_n))$$

4. PENUTUP

Simpulan

Berdasarkan hasil pembahasan artikel ini dapat disimpulkan bahwa:

1. Bilangan kromatik-b graf sentral pada graf bintang, adalah: $\varphi(C(S_n)) = \begin{cases} n, n = 2 \text{ atau } n = 3 \\ n-1, n \geq 4 \end{cases}$
2. Bilangan kromatik-b graf tengah pada graf bintang, adalah: $\varphi(M(S_n)) = n$
3. Bilangan kromatik-b graf total pada graf bintang, adalah: $\varphi(T(S_n)) = n$

Saran

Artikel ini telah membahas mengenai bilangan kromatik-b graf sentral, graf tengah dan graf total pada graf bintang. Bagi pembaca yang memiliki minat bidang akademisi yang sama, penulis menyarankan untuk mengembangkan teori-

teori bilangan kromatik-b graf sentral, graf tengah dan graf total pada graf siklus dengan n titik.

DAFTAR PUSTAKA

Elghazel, H. dkk. (2008). A graf b-coloring framework for data clustering. *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms*, *7*(4), 389–423. https://doi.org/10.1007/s10852-008-9093-x

Budayasa, I. K. (2007). Teori Graf dan Aplikasinya. Surabaya: Unesa University Press

Roza, I. dkk. (2014). Graf Garis (Line Graf) dari Graf Siklus , Graf Lengkap, dan Graf Bintang. *Jurnal Matematika UNAND*, *3*(2), 1–4.

Vernold, M. V. V. J. (2010). The b -Chromatic Number of Star Graf Families. *LE Mathematice*, *LXV*, 119–125. https://doi.org/10.4418/2010.65.1.10

Wulandari, M. E. 2016. Bilangan Kromatik-b Untuk Beberapa Kelas Graf. *Skripsi*. Surabaya. Universitas Negeri Surabaya