MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115

Volume 09 No 01
Tahun 2021

BILANGAN KETERHUBUNGAN PELANGI GRAF "SNARK" BUNGA

Altika Dwi Mawarni Syah
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
email: altika.17030214050@mhs.unesa.ac.id

I Ketut Budayasa
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
email: ketutbudayasa@gmail.com

Abstrak

Misalkan G graf dengan himpunan sisi $E(G)$. Pewarnaan-sisi graf G adalah sebuah fungsi $W: E(G) \to K$, dimana K adalah himpunan warna. Terhadap pewarnaan W, G disebut graf pelangi jika semua sisi G berwarna berbeda. Graf G dikatakan terhubung pelangi jika setiap dua titik graf G dihubungkan oleh sebuah lintasan pelangi. Minimum banyaknya warna yang digunakan mewarnai semua sisi G sedemikian hingga G terhubung pelangi disebut bilangan keterhubungan pelangi G, dilambangkan dengan $rc(G)$. Menentukan nilai eksak $rc(G)$ untuk sebarang graf G merupakan masalah sulit. Dalam artikel ini, ditentukan bilangan keterhubungan pelangi beberapa kelas graf seperti graf komplet, pohon, dan khususnya Graf "Snark" Bunga B_n. Dibuktikan bahwa $rc(B_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 4$.

Kata Kunci: Bilangan Keterhubungan Pelangi, Graf "Snark" Bunga B_n , Pewarnaan Sisi Graf

Abstract

Let G be a graph with edge set $E(G)$. An edge coloring of G is a function $W: E(G) \to K$ where K is a set of colors. Respect to W, G is called a rainbow graph if all edges of G have different colors. The graph G is called rainbow connected if every two distinct vertices of G is joined by a rainbow path. The minimum number of colors needed to color the edges of G such that G is rainbow connected is called the rainbow connected number of G, denoted by $rc(G)$. In general, determining the exact value of $rc(G)$ for a graph G is a very hard problem. In this paper, we determine the rainbow connected number for some graph classes such as, Complete graph, Tree, in particular the flower snark B_n. It is proven that $rc(B_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 4$.

PENDAHULUAN

Matematika merupakan ilmu yang paling banyak diterapkan dalam kehidupan manusia. Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika. Graf pertama kali dikenalkan oleh seorang ilmuan yang bernama Leonhard Euler pada tahun 1736, dengan memecahkan sebuah permasalahan jembatan Konigsberg di atas Sungai Pregrel, Rusia. Euler memodelkan permasalahan tersebut dalam graf, dengan demikian daratan sebagai titik dan jembatan sebagai garis yang menghubungkan secara bersesuaian (Budayasa, 2007).

Konsep keterhubungan mempunyai peran yang sangat esensial dalam suatu jaringan. Ingat sebuah graf dikatakan terhubung jika dua titik pada graf dihubungkan oleh sebuah lintasan. Begitu juga konsep pewarnaan titik maupun pewarnaan-sisi pada graf mempunyai terapan yang luas. Oleh karena itu, menjadi hal yang menarik, mengaitkan antara keterhubungan dan pewarnaan pada suatu graf.

Diberikan sebuah graf G terhubung dan warnai semua sisi G sedemikian hingga setiap dua titik G dihubungkan oleh lintasan yang sisi-sisinya berwarna berbeda. Minimum banyaknya warna yang diperlukan untuk memperoleh pewarnaan-sisi G disebut bilangan keterhubungan pelangi dari graf G.

Secara umum, menentukan nilai eksak bilangan keterhubungan pelangi sebuah graf merupakan permasalahan yang sangat sulit. Namun, untuk kelas-kelas graf tertentu, permasalahan ini sudah terjawab. Bilangan keterhubungan pelangi pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand et al pada tahun 2006 (Chartrand et al,. 2010). Menentukan Bilangan Keterhubungan Pelangi pada Graf Roda dan Graf Kubik (Yuliani, 2018), Bilangan Keterhubungan Pelangi Graf Origami dan Graf Pizza (Nabila, 2015). Salah satu kelas graf yang mempunyai struktur menarik, diperkenalkan oleh Isaacs, adalah Graf

"Snark" Bunga. Pada tulisan ini akan dibahas tentang Bilangan Keterhubungan Pelangi Graf "Snark" Bunga.

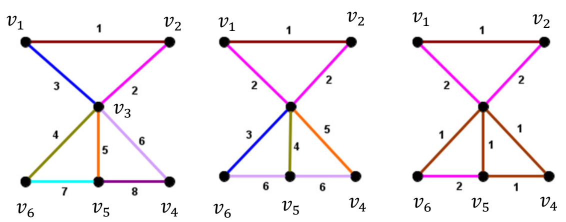
KAJIAN PUSTAKA

Kita awali dengan konsep keterhubungan pelangi suatu graf.

Definisi 2.1: (Budayasa, 2007)

Misalkan $\boldsymbol{G}$ sebuah graf dengan himpunan sisi $\boldsymbol{E(G)}$. Sebuah pewarnaan-sisi graf $\boldsymbol{G}$ adalah sebuah fungsi $\boldsymbol{W}: \boldsymbol{E(G)} \to \boldsymbol{K}$ dimana $\boldsymbol{K}$ adalah himpunan warna. Terhadap pewarnaan $\boldsymbol{W}$, graf $\boldsymbol{G}$ disebut pelangi jika semua sisi $\boldsymbol{G}$ berwarna berbeda. Graf $\boldsymbol{G}$ disebut terhubung pelangi jika setiap dua titik $\boldsymbol{G}$ dihubungkan oleh sebuah lintasan pelangi. Minimum warna yang digunakan mewarnai semua sisi $\boldsymbol{G}$ sedemikian hingga $\boldsymbol{G}$ terhubung pelangi disebut bilangan keterhubungan pelangi $\boldsymbol{G}$, dilambangkan dengan $\boldsymbol{rc(G)}$.

Contoh 2.1:



W_1 (a) W_2 (b) W_3 (c)

Gambar 2.1 Pewarnaan W_1 , W_2 dan W_3

Gambar 2.1 (a), terhadap pewarnaan W_1 , graf G terhubung pelangi dengan menggunakan 8 warna. Pada Gambar 2.1 (b), terhadap pewarnaan W_2, graf G juga terhubung pelangi dengan menggunakan 6 warna. Pada Gambar 2.1 (c), terhadap pewarnaan W_3, graf G terhubung pelangi dengan 2 warna. Karena tidak ada pewarnaan W pada G dengan 1 warna yang membuat G terhubung pelangi, maka $rc(G) = 2$.

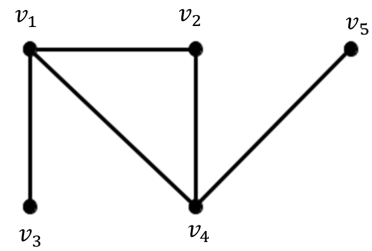
Konsep diameter graf mempunyai peran penting dalam penentuan bilangan keterhungan pelangi suatu graf.

Definisi 2.2: (Budayasa, 2007)

Misalkan G graf terhubung dengan himpunan titik $V(G)$. dan himpunan sisi $E(G)$ sehingga $u, v \in V(G)$. Jarak titik u dan titik v di G, dilambangkan dengan $d(u, v)$ adalah panjang lintasan terpendek yang menghubungkan titik u dan titik v di graf G. Diameter graf G, dilambangkan dengan $d(G)$, didefinisikan sebagai berikut.

$$d(G) = \max \{d(u, v) | u, v \in V(G)\}$$

Contoh 2.2:



Gambar 2.2 Graf G dengan $d(G) = 3$

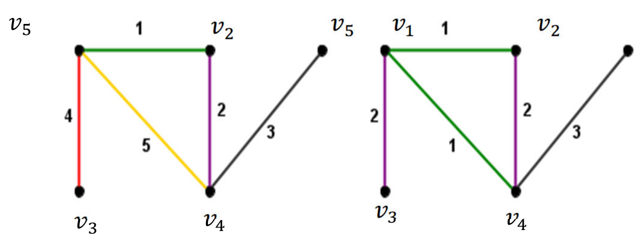
Dari Definisi 2.1 dan 2.2 diperoleh hasil berikut.

Lemma 2.1: Jika $\boldsymbol{G}$ terhubung pelangi, maka $\boldsymbol{rc(G)} \geq \boldsymbol{d(G)}$.

Bukti:

Misalkan G terhubung pelangi dengan diameter $d(G)$. Berdasarkan Definisi 2.2, maka ada lintasan P yang menghubungkan dua titik u dan titik v di G dengan panjang $d(G)$. Sehingga banyaknya sisi lintasan P adalah $d(G)$. Karena G terhubung pelangi, berdasarkan Definisi 2.1, maka semua sisi lintasan P harus mendapat warna yang berbeda, sehingga $rc(G) \geq d(G)$. Dengan demikian lemma terbukti.

Contoh 2.3:



(a) (b)

W_1 W_2

Gambar 2.3 Pewarnaan W_1 dan W_2

Gambar (a), terhadap pewarnaan W_1 , graf G terhubung pelangi dengan menggunakan 5 warna.

Gambar (b) terhadap pewarnaan W_2 , graf G terhubung pelangi dengan menggunakan 3 warna. Karena tidak ada pewarnaan W pada G dengan 2 warna yang membuat G terhubung pelangi, maka $rc(G) = 3$.Dalam hal ini, $rc(G) = 3 = d(G)$.

Karena setiap dua titik pada graf komplet berhubungan langsung, diperoleh hasil berikut.

Lemma 2.2: Jika $\boldsymbol{K_n}$ graf komplet dengan $\boldsymbol{n}$ titik dan $\boldsymbol{n \geq 2}$, maka $\boldsymbol{rc(K_n) = 1}$.

Bukti:

Pikirkan sebuah pewarnaan W pada K_n dengan

$$W: E(K_n) \to \{1\}$$

Jelas, terhadap pewarnaan W, graf K_n terhubung pelangi dengan menggunakan satu warna.

Berdasarkan Definisi 2.1,

$$rc(K_n) \leq 1 \ldots (1)$$

Karena $n \geq 2$, maka K_n bukan graf kosong sehingga $|E(K_n)| \geq 1$ jadi pada pewarnaan-sisi K_n diperlukan paling sedikit satu warna sehingga

$$rc(K_n) \geq 1 \ldots (2)$$

Dari (1) dan (2), disimpulkan bahwa

$$rc(K_n) = 1$$

Dengan demikian Lemma terbukti.

Karena pohon adalah graf terhubung tanpa sikel, maka setiap dua titik berbeda pada pohon dihubungkan oleh tepat satu lintasan. Sehingga, suatu pohon dikatakan terhubung pelangi, maka semua sisi pohon harus berwarna berbeda, dan diperoleh hasil berikut.

Lemma 2.3: Jika $\boldsymbol{T_n}$ adalah pohon dengan $\boldsymbol{n}$ titik, dan $\boldsymbol{n \geq 2}$, maka $\boldsymbol{rc(Tn) = n - 1}$

Bukti:

Karena T_n pohon dengan n titik, maka

$$|E(Tn)| = n - 1$$

Pikirkan sebuah pewarnaan W pada T_n sedemikian hingga semua sisi T_n berwarna berbeda. Jelas bahwa terhadap W , T_n terhubung pelangi dengan menggunakan $n-1$ warna. Berdasarkan Definisi 2.1,

$$rc(T_n) \leq n - 1 \ldots (1)$$

Andaikan ada sebuah pewarnaan W_1 pada T_n dengan menggunakan kurang dari $n-1$ warna atau paling banyak $n-2$ warna. Karena banyak sisi T_n adalah $n-1$ dan maksimum banyaknya warna $n-2$, berdasarkan "Prinsip Sangkar Burung", ada dua sisi T_n mendapat warna sama. Karena untuk setiap dua titik berbeda pada T_n dihubungkan oleh tepat satu lintasan, maka ada dua titik di T_n yang dihubungkan oleh lintasan bukan pelangi terhadap pewarnaan W_1 , T_n tidak terhubung pelangi, kontradiksi. Sehingga,

$$rc(T_n) > n - 2 \text{ atau } rc(T_n) \geq n - 1 \ldots (2)$$

Dari (1) dan (2), terbukti bahwa $rc(T_n) = n - 1$.

Catatan: Karena bintang dengan n titik S_n adalah sebuah pohon dengan n titik, maka berdasarkan Lemma 2.3, $rc(S_n) = n - 1$. Perhatikan bahwa diameter S_n adalah 2. Sehingga, untuk $n \geq 4$, $rc(S_n) = n - 1 > 2 = d(S_n)$.

Karena setiap graf terhubung memuat pohon perentang, maka menggunakan Lemma 2.3, diperoleh batas atas bilangan keterhubungan pelangi suatu graf sebagai berikut.

Lemma 2.4: Jika $\boldsymbol{G}$ graf terhubung dengan $\boldsymbol{n \geq 2}$ titik, maka $\boldsymbol{rc(G) \leq n - 1}$.

Bukti:

Karena G graf terhubung dengan n titik, maka G memuat sebuah pohon perentang T_n dengan n titik. Berdasarkan Lemma 2.3, $rc(T_n) = n - 1$. Konstruksi sebuah pewarnaan-sisi W pada G dengan cara sebagai berikut. Warnai semua sisi T_n dengan $n-1$ warna berbeda, dan warnai setiap sisi $G - T_n$ dengan salah satu warna yang ada di sisi T_n . Karena, terhadap pewarnaan W, T_n terhubung pelangi, maka terhadap W, graf G juga terhubung pelangi dengan menggunakan $n-1$ warna. Berdasarkan Definisi 2.1,

$$rc(G) \leq n - 1$$

Dengan demikian, lemma terbukti.

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa bilangan keterhungan pelangi dari sikel adalah setengah dari banyak titik sikel.

Lemma 2.5: Jika $\boldsymbol{C_n}$ adalah sikel dengan $\boldsymbol{n}$ titik, maka $\boldsymbol{rc(C_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil}$.

Bukti:

Misalkan $C_n = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n, v_1)$. Kita tinjau dua kasus, apakah n genap atau ganjil.

- **Kasus 1:** n genap

  Dalam hal ini, diameter C_n adalah

  $$d(C_n) = \frac{n}{2}$$

  Sehingga berdasarkan Lemma 2.1,

  $$rc(C_n) \geq d(C_n) = \frac{n}{2} \ldots (1)$$

Misalkan $E(C_n) = \{e_i = v_i v_{i+1} \ (mod\ n) \ , 1 \le i \le n\}$. Kontruksi pewarnaan-sisi W pada C_n sebagai berikut.

$$W(e_i) = \begin{cases} i, 1 \le i \le \dfrac{n}{2} \\ i - \dfrac{n}{2}, \dfrac{n}{2} + 1 \le i \le n \end{cases}$$

Perhatikan bahwa, terhadap pewarnaan W , C_n terhubung pelangi dengan menggunakan $\frac{n}{2}$ warna. Berdasarkan Definisi 2.1,

$$rc(C_n) \le \tfrac{n}{2} \dots (2)$$

Dari (1) dan (2) dapat disimpukan

$$rc(C_n) = \frac{n}{2}$$

- **Kasus 2:** n ganjil

Dalam hal ini, diameter C_n adalah

$$d(C_n) = \frac{n-1}{2}$$

Selanjutnya, konstruksi sebuah pewarnaan-sisi W_1 pada C_n menggunakan $\frac{n-1}{2}$ warna sebagai berikut.

$$W_1(e_i) = \begin{cases} i, 1 \le i \le \frac{n-1}{2} \\ i - \frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2} \le i \le n-1 \\ j, 1 \le j \le \frac{n-1}{2}; i = n \end{cases}$$

Maka, terhadap pewarnan W_1 , lintasan-$(v_{j+\frac{n-1}{2}}, v_1)$ pada C_n tidak pelangi, karena sisi $e_{j+\frac{n-1}{2}}$ dan sisi e_n pada lintasan tersebut mendapat warna yang sama yaitu warna j. Begitu juga, lintasan-$(v_1, v_{j+\frac{n-1}{2}})$ yang lainnya pada C_n , juga tidak pelangi, karna sisi $e_{j+\frac{n-3}{2}}$ dan sisi e_{j-1} pada batasan tersebut mendapat warna yang sama yaitu warna $j-1$ sehingga terhadap W_1, C_n tidak terhubung pelangi, maka

$$rc(C_n) > \frac{n-1}{2}$$

Karena $rc(C_n)$ bilangan bulat positif, maka

$$rc(C_n) \ge \tfrac{n-1}{2} + 1 = \tfrac{n+1}{2} \dots \qquad (3)$$

Selanjutnya, konstruksi sebuah pewarnaan-sisi W pada C_n sedemikian hingga

$$W(e_i) = \begin{cases} i, 1 \le i \le \dfrac{n-1}{2} \\ i - \dfrac{n-1}{2}, \dfrac{n+1}{2} \le i \le n-1 \\ \dfrac{i+1}{2}, i = n \end{cases}$$

Jelas bahwa, terhadap W, C_n terhubung pelangi dengan menggunakan $\frac{n+1}{2}$ warna. Sehingga, berdasarkan Definisi

$$rc(C_n) \le \tfrac{n+1}{2} \dots (4)$$

Dari (3) dan (4) diperoleh

$$rc(C_n) = \frac{n+1}{2} = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

Dengan demikian lemma terbukti.

PEMBAHASAN

Kita awali pembahasan dengan definisi Graf "Snark" Bunga berikut.

Definisi 3.1: Sebuah "snark" bunga $\boldsymbol{B_n}$ adalah sebuah graf secara genetik dikonstruksi dengan cara sebagai berikut.

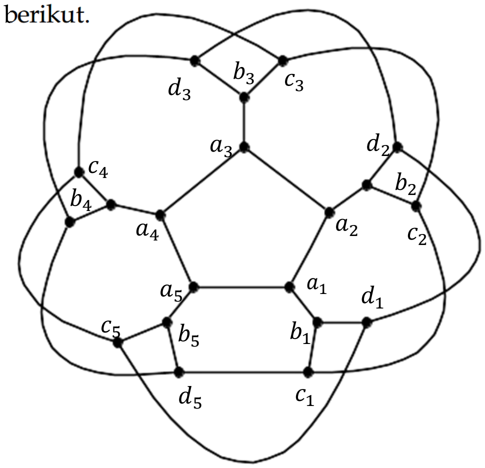
(i) Buat sebanyak n salinan bintan $K_{1,3} = S_4$. Untuk setiap $i, 1 \le i \le n$, label titik pusat bintang ke-i dengan b_i dan titik-titik luarnya dengan $a_i, c_i\ dan\ d_i$.

(ii) Konstruksi sikel $C_n = (a_1, a_2, \dots, a_n, a_1)$.

(iii) Konstruksi sikel $C_{2n} = (c_1, c_2, \dots, c_n, d_1, d_2, \dots, d_n, c_1)$.

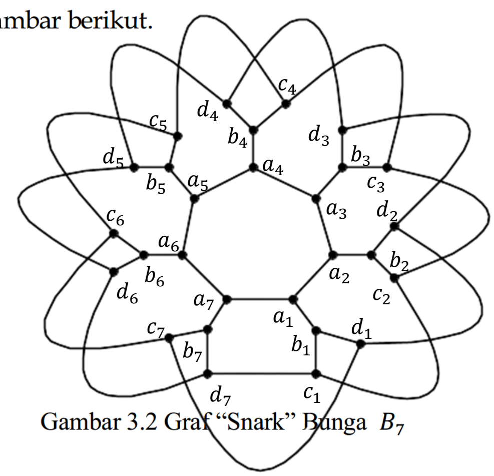
Contoh 3.1:

Graf "Snark" Bunga B_5 dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 3.1 Graf "Snark" Bunga B_5

Sedangkan, graf "snark" bunga B_7 dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 3.2 Graf "Snark" Bunga B_7

Berdasarkan Definisi 3.1, diperoleh sifat-sifat graf "Snark" Bunga B_n sebagai berikut.

1. Graf B_n mempunyai $4n$ titik dan $6n$ sisi.
2. Graf B_n terhubung dan tidak memiliki sisi pemutus (jembatan).
3. Setiap titik graf B_n berderajat 3, sehingga B_n graf beraturan-3.

Untuk menentukan bilangan keterhubugan pelangi graf B_n , diperlukan lemma tentang diameter B_n berikut.

Lemma 3.1: Jika $\boldsymbol{B_n}$ snark bunga, maka $\boldsymbol{d(B_n) = \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 2}$

Bukti:

Karena "sikel dalam" dari graf B_n adalah

$$C_n = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_1)$$

dan $d(C_n) = \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 2$, maka

$$\forall a_i \neq a_j \text{ , } d(a_i, a_j) \leq \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$$

Karena graf bintang pembangun dari B_n adalah $K_{1,3}$ dan $d(K_{1,3}) = 2$, maka untuk setiap titik $x, y \in \{a_i, b_i, c_i, d_i\}$ berlaku $d(x,y) \leq 2$

Sehingga, $\forall\, u, v \in V(B_n)$, berlaku

$$d(u,v) \leq \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 2$$

Perhatikan bahwa ada dua titik pada graf B_n , yaitu b_1 *dan* $b_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$, dengan

$$d(b_1, b_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}) = \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 2$$

Akibatnya, berdasarkan definisi diameter graf,

$$d\ (B_n) = \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 2$$

Dengan demikian, pembuktian lemma lengkap.

Selanjutnya, menggunakan Lemma 2.1, 2.5 dan 3.1, dibuktikan teorema berikut.

Teorema 3.2: Jika $\boldsymbol{B_n}$ "Snark" Bunga dengan $\boldsymbol{n}$ ganjil dan $\boldsymbol{n \geq 5}$, maka

$$rc(B_n) = \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 4$$

Bukti:

Misalkan, $A = \{a_i / 1 \leq i \leq n\}$,

$B = \{b_i/1 \leq i \leq n\}$,

$C = \{c_i/1 \leq i \leq n\}$,

$D = \{d_i/1 \leq i \leq n\}$.

Himpunan titik B_n adalah $V(B_n) = A \cup B \cup C \cup D$, dan himpunan sisi B_n ,

$$E(B_n) = \{e_i\} \cup \{a_i b_i\} \cup \{c_i b_i\} \cup \{d_i b_i\} \cup \{e_i'\} \cup \{e_i''\} \cup \{c_n d_1\} \cup \{d_n c_1\}$$

dengan

$e_i = a_i a_{i+1}, 1 \leq i\ \leq n; (indeks\ mod\ n)$

$e_i' = c_i c_{i+1}, 1 \leq i\ \leq n-1,$

$e_i'' = d_i d_{i+1}, 1 \leq i\ \leq n-1.$

Berdasarkan Lemma 2.1 dan Lemma 3.1, diperoleh

$$rc(B_n) \geq d(B_n) = \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 2.$$

Misalkan "sikel dalam" dari B_n adalah

$$C_n = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_1)$$

Berdasarkan Lemma 2.5,

$$rc(C_n) = \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$$

Karena n ganjil, maka $\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil = \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 1$. Sehingga

$$rc(C_n) = \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 1$$

Agar B_n terhubung pelangi, warnai sisi-sisi "sikel dalam" C_n dengan menggunakan $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 1$ warna berbeda. Karena $K_{1,3}$ graf bagian dari B_n , warnai sisi-sisi $K_{1,3}$ dengan tiga warna baru yang berbeda dengan $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 1$ warna yang sudah digunakan untuk mewarnai sisi-sisi "sikel dalam" C_n. Sehingga untuk mewarnai sisi-sisi graf bagian B_n yang dibangun oleh gabungan sisi-sisi "sikel dalam" C_n dan sisi-sisi semua $K_{1,3}$ diperlukan warna sebanyak

$$\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 1\right) + 3 = \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 4$$

Sehingga, berdasarkan Definisi 3.1,

$$rc(B_n) \geq \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 4 \dots (1)$$

Selanjutnya, definisikan pewarnaan-sisi W pada graf B_n sebagai berikut.

$$W: E(B_n) \to \left\{1,2,3, \dots, \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 4\right\}$$

Sedemikian hingga,

$$W(e_i) = \begin{cases} i, 1 \leq i \leq \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 1 \\ i - \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor - 1, \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 2 \leq i \leq n; \end{cases}$$

$$W(a_i b_i) = \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 2\ , \ \ 1 \leq i \leq n;$$

$$W(b_i c_i) = \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 3\ , \ \ 1 \leq i \leq n;$$

$$W(b_i d_i) = \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 4\ , \ \ 1 \leq i \leq n;$$

$$W(e_i') = W(e_i'') = \begin{cases} i, 1 \leq i \leq \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 1 \\ i - \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor - 1\ , \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 2 \leq i \leq n - j; \end{cases}$$

$$W(c_n d_1) = W(d_n c_1 = \ n - \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor - 1$$

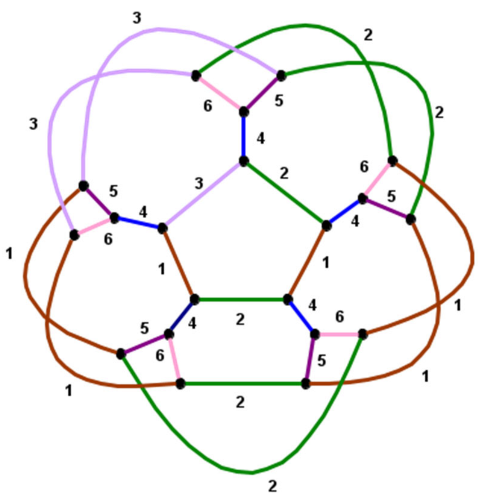
Perhatikan bahwa, pewarnaan W menggunakan sebanyak $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 4$ warna dan untuk setiap dua titik

u dan v pada B_n ada lintasan pelangi dari titik u ke titik v. Sehingga, terhadap pewarnaan W, B_n terhubung pelangi. Sehingga, berdasarkan Definisi 2.1,

$$rc(B_n) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 4 \ldots (2)$$

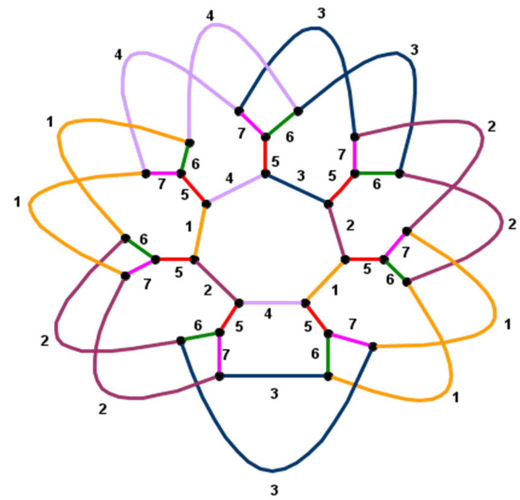
Dari (1) dan (2), disimpulkan $rc(B_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 4$.
Dengan demikian, teorema terbukti.

Contoh 3.2: Sebuah pewarnaan-sisi pelangi dari graf bunga "snark" $\boldsymbol{B_5}$ dengan menggunakan $\boldsymbol{rc(B_5) = \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor + 4 = 6}$ warna pada gambar 3.3.



Gambar 3.3 Sebuah pewarnaan pelangi B_5 dengan 6 warna

Sebuah pewarnaan pelangi dari graf "snark" bunga B_7 dengan menggunakan $rc(B_7) = \left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor + 4 = 7$ warna pada gambar 3.4.



Gambar 3.4 Sebuah pewarnaan pelangi graf B_7 dengan 7 warna

PENUTUP

SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan, diperoleh simpulan berikut.

1) Jika G sebuah graf dengan diameter $d(G)$, maka $rc(G) \geq d(G)$.
2) Untuk graf komplit K_n dengan $n \geq 2$, berlaku $rc(K_n) = 1$.
3) Untuk pohon dengan n titik T_n dengan $n \geq 2$, berlaku $rc(T_n) = n - 1$.
4) Jika G graf terhubung dengan $n \geq 2$ titik, maka $rc(G) \leq n - 1$.
5) Untuk graf "Snark" Bunga B_n dengan n ganjil dan $n \geq 5$, berlaku $rc(B_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 4$.

SARAN

Untuk penelitian selanjutnya, disarankan untuk menentukan bilangan keterhubungan Pelangi graf B_n jika n genap.

DAFTAR PUSTAKA

Bondy, J. A. (2008). Grah Theory. *Springer*, 85-98.

Budayasa, I. K. (2007). *Teori Graf dan Aplikasinya.* Surabaya: UNESA University Press.

Chartrand et al, .. L. (2010). *Graphs and digraphs.*

Chartrand, G. L. (2008). Rainbow Connection in Graph. *Mathematica Bohemica*, 85-98.

I, K., & A, S. (2018). The Rainbow Connection Number of a Flower (Cm,Kn) Graph . *Procedia Computer Science*, 168-172.

K Srinivasa Rao, e. a. (2020). Rainbow Connecetion Number of Flower Graph. *Applied Mathemaical Science*, 591-597.

Nabila, A. S. (2015). The rainbow connection number of Origami Graph and PIzza Graph. *Procedia Computer Science*, 162-167.

Ramya, N. K. (2012). On Rainbow Coloring of Some Classes of Graphs. *International Journal of Computer Application*, 0975 – 8887.

S. Sy, R. W. (2014). Rainbow connection of some graphs. *Applied Mathematical Science*, 4693-4696.

Yuliani, W. (2018). Bilangan Keterhubunngan Pelangi Pada Graf Roda dan Graf Kubik . *Jurnal Matematika UNAND*, 72-79.

Yupensius Joko, H. F. (2019). Bilangan Terhubung Pelangi pada Graf Planter dan Graf Gurita. *Buletin Ilmiah Math, Stat, dan Terapannya (Bimaster)*, 29-34.