MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115

Volume 09 No 01
Tahun 2021

PELABELAN ANGGUN SUPER PADA GRAF KOMPLET, TRIPARTIT KOMPLET, GABUNGAN BINTANG, DAN CATERPILLAR

Ayu Nur Hidayah
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : ayu.17030214058@mhs.unesa.ac.id

I Ketut Budayasa
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : keutbudayasa@yahoo.com

Abstrak

Misalkan G sebuah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ dengan $|V(G)| = n$ dan $|E(G)| = m.$ Sebuah pelabelan anggun super pada G adalah sebuah fungsi bijektif $f: V(G) \cup E(G) \to \{1,2,3, \dots, m+n\}$ sedemikian hingga, untuk setiap sisi $uv \in E(G)$ berlaku $f(uv) = |f(u) - f(v)|$. Jika terdapat graf G yang memenuhi pelabelan tersebut maka G disebut graf anggun super. Dalam artikel ini, akan ditunjukkan konstruksi pelabelan anggun super dari beberapa kelas graf, antara lain graf komplet, graf tripartit komplet, graf bintang serta gabungan dari graf bintang, dan graf *caterpillar* suatu subkelas dari pohon.

Kata kunci: pelabelan anggun super, graf komplet, graf tripartit, graf bintang, graf *caterpillar*

Abstract

Let G be a graph with vertex set $V(G)$ and edge set $E(G)$ with $|V(G)| = n$ and $|E(G)| = m.$ A super graceful labeling of G is a bijective function of $f: V(G) \cup E(G) \to \{1,2,3, \dots, m+n\}$, such that for every edge $uv \in E(G)$, $f(uv) = |f(u) - f(v)|$. If there is a such labeling on the graph G, then G is called a super graceful graph. In this article, we consider the problem of constructing super graceful labeling on some classes of graphs such as : complete graphs, complete tripartite graphs, star graphs and the union of star graphs, and caterpillar graph which is a sub class of trees.

Keywords: super graceful labeling, complete graphs, complete tripartite graphs, star and union of stars, caterpillar graphs.

1. PENDAHULUAN

Pada masa kini, salah satu cabang ilmu matematika yaitu teori graf berkembang dengan pesat. Teori graf diperkenalkan pertama kali oleh Leonhard Euler, seorang ahli matematika dari Swiss, pada tahun 1736. Teori graf dapat dijadikan sebagai alternatif untuk memodelkan suatu masalah nyata sehingga mempermudah penyelesaiannya.

Pelabelan merupakan salah satu topik dalam teori graf yang mengalami perkembangan pesat. Pelabelan pada graf dikemukakan pertama kali oleh Sadlàck pada 1964, kemudian dikembangkan oleh Stewart pada 1966, serta Kotzig dan Rosa pada 1967 (Dian Noer Indah Sari, 2013). Pemanfaatan pelabelan graf saat ini sangat luas, diantaranya pada bidang desain jaringan komunikasi, transportasi, penyimpanan data komputer, dan pemancar frekuensi radio, radar, dan lainnya (Restu Ria Wantika, 2015). Pelabelan pada suatu graf adalah suatu pemetaan atau fungsi yang memasangkan unsur-unsur graf (titik dan sisi) dengan bilangan bulat positif (Abdul Rosyid, dkk, 2009).

Pelabelan pada sebuah graf banyak jenisnya, ada pelabelan titik saja, ada pelabelan sisi saja, dan ada pelabelan titik dan sisi (pelabelan total). Sejak konsep pelabelan dikenalkan oleh Rosa pada 1967, terdapat lebih dari 1500 artikel yang membahas pelabelan pada graf (Gee-Choon Lau, dkk, 2016). Pelabelan anggun super atau *super graceful* pada graf G adalah sebuah fungsi bijektif dari gabungan himpunan sisi dan himpunan titik graf G ke bilangan bulat positif, sedemikian hingga untuk setiap sisi $uv \in E(G)$, label sisi sama dengan nilai mutlak dari selisih label titik yang menghubungkan sisi uv. Selanjutnya, sebuah graf G yang memiliki pelabelan *super graceful* disebut graf *super graceful* (Primas Tri A. A, dkk, 2012). Adapun artikel sebelumnya, oleh Devy Anggun Wardhani mengkaji tentang pelabelan anggun ajaib sisi super pada graf Petersen yang diperumum, sedangkan pada artikel ini akan dibahas pelabelan anggun super pada titik dan sisi graf atau *total labeling* pada graf komplet, tripartit komplet, gabungan bintang, dan *caterpillar* (Devy Anggun Wardhani, 2019).

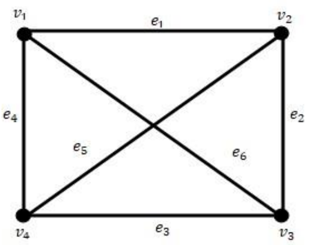
Jika diberikan sebuah graf, untuk menentukan apakah graf tersebut mempunyai sebuah pelabelan anggun super, secara umum merupakan permasalahan yang sulit. Inilah yang menjadi fokus masalah dalam artikel ini.

Pembahasan artikel ini diawali dengan konsep disertai beberapa contoh pelabelan anggun super pada sebuah graf secara umum. Kemudian dibahas syarat perlu dan syarat cukup bagi graf komplet memiliki sebuah pelabelan anggun super. Selanjutnya, ditunjukkan graf tripartit komplet $K_{1,1,t}$ memiliki sebuah pelabelan anggun super. Begitu juga, dibuktikan bahwa setiap bintang adalah graf anggun super. Dibuktikan juga, gabungan sejumlah bintang yang saling lepas, dengan syarat tertentu, merupakan graf anggun super. Akhirnya, ditunjukkan bahwa graf "*caterpillar*" memiliki pelabelan anggun super.

2. KAJIAN TEORI

a. Graf

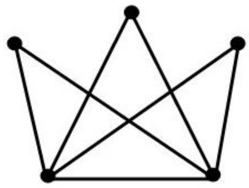
Sebuah graf G berisikan himpunan berhingga tak kosong dari objek-objek yang disebut titik, disimbolkan dengan $V(G)$ dan himpunan berhingga yang mungkin kosong dengan elemen-elemennya disebut sisi, disimbolkan dengan $E(G)$, sehingga setiap elemen e dalam $E(G)$ adalah pasangan tak berurutan dari titik-titik $V(G)$ (Budayasa, 2007). Misalkan v_i dan v_j dua titik di G, sisi yang menghubungan kedua titik tersebut dinyatakan dengan $e = v_i v_j$. Secara umum, graf dapat diilustrasikan sebagai sekumpulan titik yang dihubungkan dengan sebuah garis (sisi). Contoh:



Gambar 2. 1 Graf G dengan 4 titik dan 6 sisi

b. Graf Tripartit Komplet

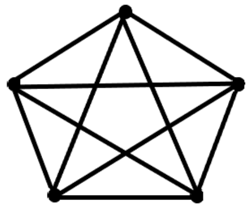
Graf tripartit komplet adalah graf sederhana yang himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi tiga himpunan bagian yaitu V_1 , V_2 , V_3 sedemikian hingga terdapat sisi yang menghubungkan setiap titik di satu partisi dengan setiap titik di partisi lain. Jika kardinalitas V_1 , V_2 , dan V_3 secara berturut-turut p, q, dan r, maka graf tripartit komplet dilambangkan dengan $K_{p,q,r}$. Contoh graf tripartit komplet $K_{1,1,t}$ dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 2. 2 Graf tripartit komplet $K_{1,1,3}$

c. Graf Komplet

Graf komplet dengan n titik, disimbolkan dengan K_n, merupakan graf sederhana dimana setiap dua titik berbeda dihubungkan oleh sebuah sisi. Sedangkan graf sederhana adalah graf yang tidak memuat sisi rangkap dan sikel (Zainatul Muarrifah, 2008). Contoh graf komplet dengan 5 titik dapat dilihat pada Gambar 2.3 berikut:



Gambar 2. 3 Graf komplet K_5 dengan 5 titik.

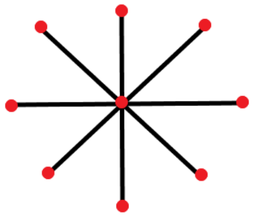
d. Pohon

Pohon adalah graf terhubung tanpa sisi graf yang menghubungkan sebuah titik dengan dirinya sendiri (sikel). Jika untuk setiap dua titik graf G yang berbeda dihubungkan oleh sebuah lintasan, maka graf G dikatakan graf terhubung. Pohon dengan n titik dilambangkan dengan T_n. Salah satu sifat pohon dengan n titik yaitu memiliki sisi sebanyak $n-1$. Pohon T_n dengan $n \geq 2$, mempunyai paling sedikit 2 titik berderajat 1. Pada sebuah pohon, titik berderajat 1 disebut daun, dan titik yang berderajat minimal 2 disebut titik internal.

e. Graf Bintang

Graf bintang dengan n titik, disimbolkan dengan S_n, adalah graf bipartit komplet $K_{1,n-1}$. Dalam suatu graf G, jika himpunan titik G dapat dipartisi menjadi dua himpunan bagian yaitu A dan B sehingga setiap sisi dari G menghubungkan sebuah titik di A dan sebuah titik di B, maka graf tersebut dikatakan graf bipartit komplet (Andika, 2014). Perhatikan bahwa bintang S_n adalah sebuah pohon yang memiliki sebanyak $n-1$ titik berderajat 1 (daun) dan sebanyak 1 titik berderajat $n-1$, disebut titik pusat.

Contoh bintang $S_8 = K_{1,8}$ dapat dilihat pada Gambar 2.4 berikut:

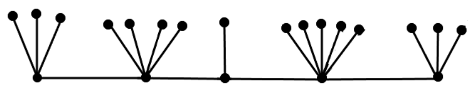


Gambar 2. 4 Graf bintang $K_{1,8}$ dengan 1 titik pusat dan 8 daun.

f. Graf *Caterpillar*

Misalkan $P_n = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ sebuah lintasan dengan n titik. Tambahkan sebanyak $m_i \geq 0$ titik anting (daun) v_{ij}, $1 \leq j \leq m_i$, pada setiap titik u_i, $1 \leq i \leq n$, maka graf yang dihasilkan dinamakan "*Caterpillar*" (ulat bulu), dan dilambangkan dengan $P_n(m_1, m_2, \dots, m_n$. Jadi *caterpillar* atau ulat bulu adalah pohon yang jika semua daunnya dihapus akan menghasilkan lintasan. Lintasan P_n pada *caterpillar* disebut tulang belakang atau *blackbone*.

Contoh *Caterpillar* P_5 (3,4,1,5,3) dapat dilihat pada Gambar 2.5 berikut:



Gambar 2. 5 Grafcaterpillar P_5(3,4,1,5,3)

3. PEMBAHASAN

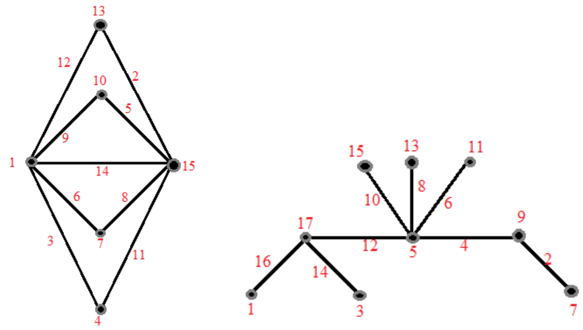
Kita awali pembahasan dengan konsep pelabelan anggun super sebuah graf.

Definisi 3.1:

Misalkan G sebuah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ dengan $|V(G)| = n$ dan $|E(G)| = m$. Sebuah pelabelan anggun super pada G adalah sebuah fungsi bijektif $f: V(G) \cup E(G) \to \{1,2,3, \dots, m+n\}$ sedemikian hingga, untuk setiap sisi $uv \in E(G)$ berlaku $f(uv) = |f(u) - f(v)|$. Jika terdapat graf G yang memenuhi pelabelan tersebut maka G disebut graf anggun super.

Contoh 3.1:

Sebuah pelabelan anggun super pada graf G dapat dilihat pada Gambar 3.1(a). Sedangkan, Gambar 3.1(b) memperlihatkan sebuah pelabelan anggun super pada graf H.



G (a) H (b)

Gambar 3.1(a) Pelabelan anggun super pada graf G
Gambar 3.1(a) Pelabelan anggun super pada graf H

Berikut ditunjukkan suatu subkelas dari graf tripartit komplet merupakan graf anggun super.

Teorema 3.1:

Untuk $t \geq 1$ graf tripartit komplet $K_{1,1,t}$ adalah graf anggun super.

Bukti:

Misalkan

$$V(K_{1,1,t}) = \{u, v, w_1, w_2, \dots, w_t\}$$

dan

$$E(K_{1,1,t}) = \{uw_1, 1 \leq i \leq t\} \cup \{vw_i, 1 \leq i \leq t\} \cup \{uv\}$$

Maka

$|V(K_{1,1,t})| = t + 2$ dan $|E(K_{1,1,t})| = 2t + 1$

Selanjutnya, konstruksi pelabelan f pada graf tripartit komplet $K_{1,1,t}$ sebagai berikut,

$$f: V(K_{1,1,t}) \cup E(K_{1,1,t}) \to \{1,2, \dots, 3t+3\}$$

Sehingga,

$$f(u) = 1; f(v) = 3t + 3;$$
$$f(w_i) = 3i + 1, 1 \leq i \leq t;$$
$$f(uv) = 3t + 2;$$
$$f(uw_i) = 3i, 1 \leq i \leq t;$$
$$f(vw_i) = 3(t - i) + 2, 1 \leq i \leq t;$$

Perhatikan bahwa, $\forall x, y \in V(K_{1,1,t}) \cup E(K_{1,1,t})$, $x \neq y$, maka $f(x) \neq f(y)$. Ini berarti fungsi f injektif. Dan himpunan semua fungsi f yaitu $f(u), f(v), f(w_i), f(uv), f(uw_i), f(vw_i)$ adalah $\{1, 2, 3, \dots, 3t+1, 3t+2, 3t+3\}$ sehingga Rf = kodomain f. Ini berarti fungsi f surjektif. Karena fungsi f injektif dan surjektif, maka fungsi f bijektif.

Selanjutnya, ditunjukkan fungsi f memenuhi Definisi 3.1.

Untuk $uv \in E(K_{1,1,t})$, berlaku

$f(uv) = 3t + 2 = |1 - (3t + 3)| = |f(u) - f(v)|$

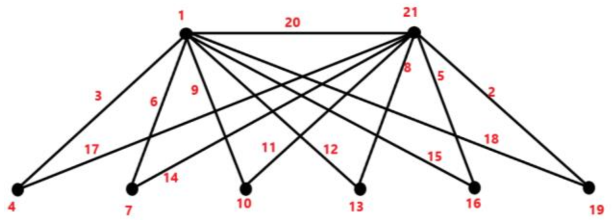
Untuk sisi $uw_i \in E(K_{1,1,t}), 1 \leq i \leq t$; berlaku

$f(uw_i) = 3i = |1 - (3i + 1)| = |f(u) - f(w_i)|$

Untuk $i, 1 \leq i \leq t$, sisi $vw_i \in E(K_{1,1,t})$, berlaku

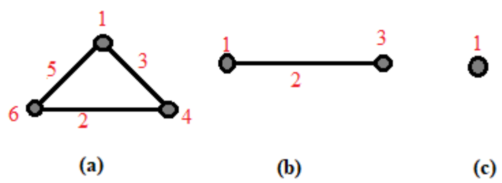
$f(vw_i) = 3(t-i)+2 = |(3t+3)-(3i+1)|$
$= |f(v)-f(w_i)|$
Jadi $\forall\, xy \in E(K_{1,1,t})$, berlaku
$$f(xy) = |f(x)-f(y)|$$
Sehingga fungsi f adalah sebuah pelabelan anggun super pada graf $K_{1,1,t}$.
Dengan demikian, teorema terbukti. ■

Contoh 3.2: Sebuah pelabelan anggun super pada graf $K_{1,1,6}$, mengikuti konstruksi dalam pembuktian teorema di atas, dapat dilihat pada Gambar 3.2 berikut:



Gambar 3. 2 Pelabelan anggun super pada graf tripatit komplet $K_{1,1,6}$

Syarat perlu dan cukup suatu graf komplet merupakan graf anggun super diberikan dalam teorema berikut:
Teorema 3.2:
Graf komplet K_n anggun super jika dan hanya jika $n \le 3$
Bukti:
($\Leftarrow$) Untuk $n \in \{1,2,3\}$, sebuah pelabelan anggun super pada K_n diperlihatkan pada gambar berikut



Gambar 3.3
Gambar 3.3(a) Pelabelan anggun super pada graf K_3
Gambar 3.3(b) Pelabelan anggun super pada graf K_2
Gambar 3.3(c) Pelabelan anggun super pada graf K_1

($\Rightarrow$)Misalkan $n \ge 4$. Akan ditunjukkan bahwa tidak ada pelabelan anggun super pada K_n.
Andaikan ada sebuah pelabelan anggun super f pada K_n.
Karena $|V(K_n)| = n$ dan $|E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}$, maka
$$p = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$
adalah nilai label terbesar dalam f. Akibatnya, p merupakan label sebuah titik K_n, sebab jika p merupakan label sebuah sisi K_n, misalkan $e = uv$ sisi K_n dengan $f(uv) = p$, maka $p = f(uv) = |f(u)-f(v)|$. Sehingga salah satu dari $f(u)$ atau $f(v)$ lebih besar dari p. Kontradiksi bahwa p label terbesar.
Karena $n \ge 4$, maka $p \ge 10$.

Perhatikan bahwa, nilai label terkecil dalam pelabelan f adalah 1.
Kita tinjau dalam dua kasus, yaitu apakah 1 label titik atau label sisi K_n.
Kasus1: 1 adalah label sebuah titik K_n. Karena p dan 1 adalah label-label titik, maka $p-1$ adalah label sisi K_n yang menghubungkan titik berlabel p dan titik berlabel 1.
Klaim 1.1: 2 merupakan label sisi K_n
Bukti:
Andaikan 2 label titik K_n, maka sisi K_n yang menghubungkan titik ini dengan titik yang berlabel 1 akan berlabel 1. Kontradiksi.□
Klaim 1.2: $p-2$ merupakan label titik K_n
Bukti:
Andaikan $p-2$ label sisi K_n, maka sisi ini harus menghubungkan sebuah titik berlabel p dan sebuah titik berlabel 2. Kontradiksi dengan *Klaim 1.1*. Karena 1 label titik dan $p-2$ label titik K_n, maka sisi yang menghubungkan titik berlabel 1 dan titik berlabel $p-2$ harus berlabel $p-3$. □
Karena $p \ge 10$, maka $p-4$ adalah sebuah label dalam f.
Klaim 1.3: $p-4$ merupakan label titik K_n
Bukti:
Karena $p-4 = (p-1)-3 = (p-2)-2 = (p-3)-1$ dan $p-1$, 2 dan $p-3$ label-label sisi K_n, maka berdasarkan definisi f, $p-4$ bukan label sisi K_n. □
Dari fakta, *Klaim 1.2* dan *Klaim 1.3*, diperoleh $p, p-2, p-4$ adalah label-label titik K_n. Akibatnya sisi K_n yang menghubungkan titik p dan titik berlabel $p-2$ harus berlabel 2. Begitu juga, sisi K_n yang menghubungkan titik berlabel $p-2$ dan titik-titik berlabel $p-4$ harus berlabel 2. Jadi, ada dua sisi K_n yang mendapat label yang sama. Kontradiksi bahwa f fungsi bijektif. ■
Kasus 2: 1 adalah sebuah label sisi K_n
Klaim 2.1: $p-1$ merupakan label titik K_n
Bukti:
Andaikan $p-1$ label sisi K_n. Maka sisi berlabel $p-1$ ini, harus menghubungkan sebuah titik berlabel p dan sebuah titik K_n berlabel 1. Kontradiksi □
Akibatnya, sisi yang berlabel 1 pada K_n, menghubungkan sebuah titik berlabel p dan sebuah titik berlabel $p-1$.
Klaim 2.2: $p-2$ merupakan label sisi K_n
Bukti:
Andaikan $p-2$ label titik K_n, maka sisi K_n yang menghubungkan titik berlabel $p-2$ dan titik berlabel $p-1$ akan berlabel 1. Sehingga ada dua sisi K_n berlabel 1. Kontradiksi bahwa f fungsi bijektif. □
Klaim 2.3: 2 merupakan label titik K_n
Bukti:
Karena $p-2$ label sisi K_n (*Klaim2.2*), maka sisi ini harus menghubungkan sebuah titik berlabel p dan sebuah titik berlabel 2. Jadi 2 merupakan label titik K_n. □

<u>*Klaim 2.4*</u>: $p-3$ merupakan label sisi K_n
Bukti:
Karena $p-1$ label titik (<u>*Klaim2.1*</u>) dan 2 label titik K_n (<u>*Klaim2.2*</u>), maka sisi K_n yang menghubungkan kedua titik tersebut harus berlabel $p-3$. □
<u>*Klaim 2.5*:</u> 3 dan 4 adalah label-label sisi K_n
Bukti:
Andaikan 3 label titik K_n , maka sisi K_n yang menghubungkan titik ini dengan titik K_n berlabel 2 (<u>*Klaim2.3*</u>) harus berlabel 1. Sehingga ada dua sisi K_n berlabel 1. Kontradiksi. □
Andaikan 4 label titik K_n , maka sisi K_n yang menghubungkan titik ini dengan titik berlabel 2 (<u>*Klaim2.3*</u>) harus berlabel 2. Kontradiksi bahwa 2 label titik dan juga label sisi K_n. □
Karena $p \geq 10$, maka $p-4$ dan $p-5$ adalah label-label pada K_n.
<u>*Klaim 2.6*</u>: $p-4$ adalah label titik K_n
Bukti:
Karena $p-4=(p-3)-1=(p-2)-2=(p-1)-3$ dan $p-3$ lebel sisi (<u>*Klaim 2.4*</u>), $p-2$ label sisi (<u>*Klaim 2.2*</u>), 3 label sisi (<u>*Klaim 2.5*</u>), maka berdasarkan definisi pelabelan f, $p-4$ bukan sisi K_n. □
<u>*Klaim 2.7*</u>: $p-5$ label sebuah titik K_n
Bukti:
Karena $p-5=(p-4)-1=(p-3)-2=(p-2)-3=(p-1)-4$ dan 1 label sisi (diketahui), $p-3$ label sisi (<u>*Klaim 2.4*</u>), $p-2$ label sisi (<u>*Klaim 2.2*</u>), 3 dan 4 label sisi (<u>*Klaim 2.5*</u>), maka berdasarkan definisi pelabelan f, $p-5$ tidak mugnkin label sisi K_n. □
Berdasarkan <u>*Klaim 2.1*</u>, $p-1$ label titik K_n dan dari fakta p label titik K_n, maka sisi K_n yang menghubungkan titik berlabel $p-1$ dan titik berlabel p adalah 1. Begitu juga, sisi K_n yang menghubungkan titik berlabel $p-4$ (<u>*Klaim 2.6*</u>) dan titik berlabel $p-5$ (<u>*Klaim 2.7*</u>) juga berlabel 1. Ada dua sisi K_n beralabel 1. Kontradiksi bahwa pelabelan f merupakan fungai bijektif.
Dengan demikian, bukti teorema lengkap. ■

Berikut ditunjukkan bahwa setiap graf bintang tidak trivial mempunyai sebuah pelabelan anggun super.

Teorema 3.3:
Setiap bintang dengan n titik S_n adalah graf anggun super.
Bukti:
Misalkan S_n bintang dengan n titik dengan titik pusat u. Berdasarkan definisi,

$$S_n = K_{1,n-1}$$

Misalkan

$$V(S_n) = \{u\} \cup \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$$

dan

$$E(S_n) = \{uv_i, 1 \leq i \leq n-1\}$$

Maka

$$|V(S_n)| + |E(S_n)| = 1 + 2(n-1) = 2n-1$$

Selanjutnya, konstruksi pelabelan f pada graf bintang S_n sebagai berikut:

$$f: V(S_n) \cup E(S_n) \to \{1,2,3,\dots,2n-1\}$$

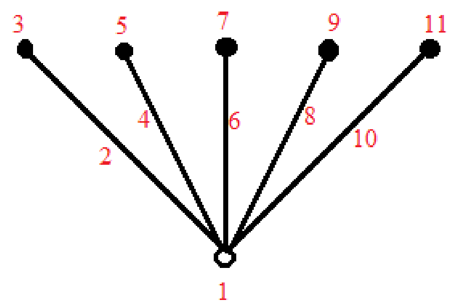
Sedemikian hingga
i. $f(u) = 1$,
ii. $f(v_i) = 2i+1, 1 \leq i \leq n-1$,
iii. $f(uv_i) = 2i, 1 \leq i \leq n-1$

Dari i), himpunan label yang dipakai adalah$\{1\}$
Dari ii), himpunan label yang dipakai adalah $\{3, 5, 7, \dots, 2n-1\}$
Dari iii), himpunan label yang dipakai adalah $\{2, 4, 6, \dots, 2n-2\}$
Sehingga f adalah fungsi bijektif.
Perhatikan bahwa untuk setiap $i, 1 \leq i \leq n-1$, diperoleh

$$\begin{aligned} f(uv_i) &= 2i \\ &= (2i+1)-1 \\ &= f(v_i) - f(u) \\ &= |f(u) - f(v_i)| \end{aligned}$$

Sehingga Berdasarkan Definisi 3.1, f sebuah pelabelan anggun super pada S_n.
Dengan demikian, teorema terbukti. ■

Contoh 3.3:
Sebuah pelabelan anggun super pada graf bintang S_6 , mengkuti aturan pelabelan dalam pembuktian Teorema 3.3, dapat dilihat pada Gambar 3.4 berikut:



Gambar 3.4: Pelabelan anggun super pada graf bintang $S_6 = K_{1,5}$

Selanjutnya, dibuktikan bahwa graf gabungan sejumlah bintang dengan syarat tertentu, merupakan graf anggun super.

Teorema 3.4:
Graf $G = K_{1,n} \cup K_{1,n_2} \cup \dots \cup K_{1,n_t}$ anggun super jika $n_i \equiv 0 \ (mod\ i), 1 \leq i \leq t$.
Bukti:
Misalkan $G = K_{1,n} \cup K_{1,n_2} \cup \dots \cup K_{1,n_t}$ dengan

$$V(G) = \{u_i, 1 \leq i \leq t\} \cup \{v_{ij}, 1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq n_i\}$$

dan

$$E(G) = \{u_i v_{ij}, 1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq n_i\}$$

Maka

$$|V(G)| = t + n_1 + n_2 + \cdots + n_t = t + \sum_{i=1}^{t} n_i$$

dan

$$|E(G)| = n_1 + n_2 + \cdots + n_t = \sum_{i=1}^{t} n_i$$

Sehingga,

$$|V(G)| + |E(G)| = t + 2\sum_{i=1}^{t} n_i$$

Selanjutnya, konstruksi pelabelan f pada G sebagai berikut:

$$f: V(G) \cup E(G) \to \left\{1, 2, 3, \dots, t + 2\sum_{i=1}^{t} n_i\right\}$$

sedemikian hingga,

i. $f(u_i) = i, \forall i, 1 \le i \le t$

ii. $f(v_{ij}) = t + 2j, 1 \le j \le n_1$ dan
$f(u_1 v_{1j}) = t + 2j - 1, 1 \le j \le n_1$

iii. Untuk $2 \le i \le t$, misalkan label terbesar titik $K_{1,n_{i-1}}$ adalah p, maka

$$p = t + 2\sum_{k=1}^{i-1} n_k$$

definisikan

$$f(v_{ij}) = p + \left\lceil \frac{j}{i} \right\rceil i + j, 1 \le j \le n_i$$

dan

$$f(u_i v_{ij}) = p + \left\lceil \frac{j}{i} \right\rceil i + j - i, 1 \le j \le n_i$$

Misalkan $j = qi + r, 0 \le q \le \frac{n_i}{i} - 1, 1 \le r \le i$

Maka

$$\begin{aligned} f(v_{ij}) &= p + \left\lceil \frac{qi + r}{i} \right\rceil i + qi + r \\ &= p + \left\lceil q + \frac{r}{i} \right\rceil i + qi + r \\ &= p + (q+1)i + qi + r \\ &= p + 2qi + i + r \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} f(u_i v_{ij}) &= p + \left\lceil \frac{qi + r}{i} \right\rceil i + (qi + r) - i \\ &= p + (q+1)i + qi + r - i \\ &= p + 2qi + r \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa,

Dari i), himpunan label yang terpakai adalah $\{1, 2, \dots, t\}$

Dari ii), himpunan label yang terpakai di luar label u_1 adalah $\{t + k, 1 \le k \le 2n_1\}$

Dari iii), himpunan label yang terpakai selain label-label $u_1, u_2, \dots, u_t$ adalah $\{p + 2qi + i + r\} \cup \{p + 2qi + r\} = \{p + 2qi + k, 1 \le k \le 2i,\ 2 \le i \le t, 0 \le q \le \frac{n_i}{i} - 1\}$.

Ini berarti, f fungsi bijektif.

Selanjutnya, dari i) dan ii) diperoleh

$$\begin{aligned} f(u_1 v_{1j}) = t + 2j - 1 &= f(v_{1j}) - f(u_1) \\ &= |f(u_1) - f(v_{1j})| \end{aligned}$$

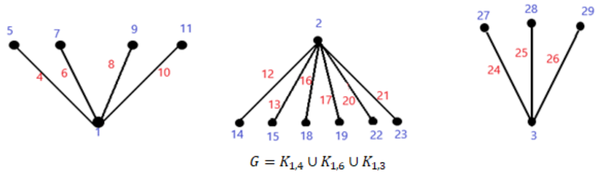
Dari iii), diperoleh, unutk $2 \le i \le t$,

$$\begin{aligned} f(u_i v_{ij}) &= p + 2qi + r \\ &= p + (2q+1)i + r - i \\ &= f(v_{ij}) - f(u_i) \\ &= |f(u_i) - f(v_{ij})| \end{aligned}$$

Berdasarkan Definisi 3.1, f adalah sebuah pelabelan anggun super pada G.

Dengan demikian, teorema terbukti . ■

Contoh pelabelan anggun super, mengikuti definisi pelabelan dalam pembuktian teorema di atas, dapat dilihat pada Gambar 3.5 Berikut:



Gambar 3.5: Pelabelan anggun super pada graf $K_{1,4} \cup K_{1,6} \cup K_{1,3}$

Teorema 3.5:

Graf $G = K_{1,n_1} \cup K_{1,n_2} \cup \dots \cup K_{1,n_t}$ anggun super jika untuk $1 \le i \le t - 1$ label terbesar titik K_{1,n_i} adalah p berakibat bahwa $n_{i+1} \equiv 0(mod(p + 1))$

Bukti:

Misalkan himpunan titik G adalah

$V(G) = \{u_i, 1 \le i \le t\} \cup \{v_{ij}, 1 \le i \le t, 1 \le j \le n_i\}$

dan himpunan sisi G adalah

$E(G) = \{u_i v_{ij}, 1 \le i \le t, 1 \le j \le n_i\}$

Perhatikan bahwa

$$|V(G)| + |E(G)| = t + 2\sum_{i=1}^{t} n_i$$

Selanjutnya, konstruksi pelabelan f pada G sebagai berikut

$$f: V(G) \cup E(G) \to \left\{1,2,3, \dots, t + 2\sum_{i=1}^{t} n_i\right\}$$

Sehingga:

i. $f(u_1) = 1$
$f(v_{1j}) = 2j + 1, 1 \le j \le n_1$
$f(u_1 v_{1j}) = 2j, 1 \le j \le n_1$

ii. Untuk $2 \le i \le t$, missal label terbesar titik $K_{1,n_{i-1}}$ adalah p. Maka
$p = i - 1 + 2(n_1 + n_2 + \cdots + n_{i-1})$

Definisikan,

$f(u_i) = p + 1;$

$$f(v_{ij}) = (p+1)\left(\left\lceil \frac{j}{p+1} \right\rceil + 1\right) + j, 1 \le j \le n_i$$

$$f(u_i v_{ij}) = (p+1)\left\lceil \frac{j}{p+1} \right\rceil + j, 1 \le j \le n_i$$

Perhatikan bahwa;himpunan label yang terpakai dari pelabelan i) adalah $\{1,2,3,\dots,2n_1+1\}$, sedangkan dari ii),untuk $2 \le i \le t$, himpunan label yang terpakai adalah $\{p, p+1, p+2, \dots + p + 2n_i + 1\}$ Ini berarti f fugnsi bijektif.

Selanjutnya, dari pelabelan i) diperoleh

$$\begin{aligned} f(u_1 v_{1j}) &= 2j \\ &= (2j+1) - 1 \\ &= f(v_{1j}) - f(u_1) \\ &= |f(u_1) - f(v_{1j})| \end{aligned}$$

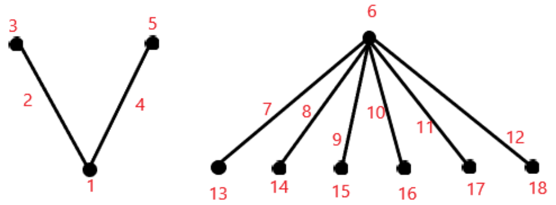
Sedangkan dari pelabelan ii), untuk $1 \le i \le t$, diperoleh

$$\begin{aligned} f(u_i v_{1j}) &= (p+1)\left\lceil \frac{j}{p+1} \right\rceil + j \\ &= (p+1)\left(\left\lceil \frac{j}{n+1} \right\rceil + 1\right) + j - (p-1) \\ &= f(v_{1j}) - f(u_1) \\ &= |f(u_1) - f(v_{1j})| \end{aligned}$$

Berdasarkan Definisi 3.1, f sebuah pelabelan anggun super pada G.

Dengan demikian, teorema terbukti. ■

Gambar 3.6 berikut menunjukkan contoh pelabelan anggun super pada graf $K_{1,2} \cup K_{1,6}$, mengikuti definisi pelabelan dalam pembuktian teorema.



Gambar 3.6: Pelabelan anggun super pada graf $K_{1,2} \cup K_{1,6}$

Berikut dibuktikan bahwa *caterpillar* adalah graf anggun super.

Teorema 3.6:

Untuk bilangan bulat $n \ge 2$ dan $m_i \ge 0$, *caterpillar* $P_n(m_1, m_2, \dots, m_n)$ adalah graf anggun super.

Bukti:

Misalkan $t = \sum_{i=1}^{n} m_i$, maka

$$|V(P_n(m_1, m_2, \dots, m_n))| = n + t$$

dan

$$|E(P_n(m_1, m_2, \dots, m_n))| = n + t - 1$$

Definisikan pelabelan f pada $P_n(m_1, m_2, \dots, m_n)$ sebagai berikut

$$f: V(P_n) \cup E(P_n) \to \{1,2,3, \dots, 2n + 2t - 1\}$$

sedemikian hingga,

i. $f(u_i u_{i+1}) = 2(n + m_{i+1} + m_{i+2} + \dots + m_n) - 2, 1 \le i \le n-1$

ii. $f(u_i v_{ij}) = 2(n + m_i + m_{i+1} + \dots + m_n) - 2(i + j - 1), 1 \le i \le n, 1 \le j \le m_i$

Untuk i ganjil:

iii. $f(u_1) = 2(n + m_1 + \dots + m_n) - 1$

iv. $f(v_{1j}) = 2j - 1, 1 \le j \le m_1$

v. $f(u_i) = 2(n + m_1 + m_2 + \dots + m_n) - 2(m_2 + m_4 + \dots + m_{i-1}) - i, 3 \le i \le n$

vi. $f(v_{ij}) = 2(m_1 + m_3 + \dots + m_{i-2}) + i + 2j - 2, 3 \le i \le n, 1 \le j \le m_i$

Untuk i genap:

vii. $f(u_i) = 2(m_1 + m_3 + \dots + m_{i-1}) + i - 1$, $2 \le i \le n$

viii. $f(v_{2j}) = 2(n + m_1 + \dots + m_n) - 2j - 1, 1 \le j \le m_2$

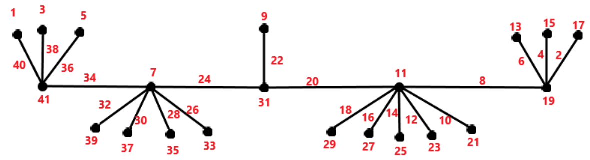
ix. $f(v_{ij}) = 2(n + m_1 + \dots + m_n) - 2(m_2 + m_4 + \dots + m_{i-2}) - i - 2j + 1, 4 \le i \le n, 1 \le j \le m_i$

Selanjutnya, seperti dalam pembuktian Teorema 3.4, dapat ditunjukkan bahwa f memenuhi Definisi 3.1, Sehingga f sebuah pelabelan anggun super pada graf $P_n(m_1, m_2, \dots, m_n)$.

Dengan demikian, teorema terbukti. ■

Perhatikan bahwa, untuk $n = 1$, $P_1(m_i)$ adalah bintang dengan $m_1 + 1$ titik atau S_{1+m_1}. Berdasarkan Teorema 3.3, $P_1(m_i) = S_{1+m_1}$ adalah graf anggun super.

Contoh pelabelan anggun super, mengikuti konstruksi f dalam pembuktian Teorema 3.5, untuk graf $P_5(3,4,1,5,3)$ dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 3.7 Pelabelan anggun super pada graf *caterpillar* $P_5(3,4,1,5,3)$

4. PENUTUP

a. Simpulan

Berdasarkan pembahasan di atas, disimpulkan hal-hal berikut:

1). Graf komplet dengan n titik K_n untuk $t \ge 1$, anggun super jika dan hanya jika $n \ge 3$.

2). Graf tripartit komplet $K_{1,1,t}$ untuk $t \ge 1$, adalah graf anggun super.

3). Setiap bintang dengan n titik S_n adalah graf anggun super

4). Graf $G = K_{1,n} \cup K_{1,n_2} \cup \dots \cup K_{1,n_t}$ anggun super jika $n_i \equiv 0 \ (mod\ i), 1 \le i \le t$.

5). Graf $G = K_{1,n_1} \cup K_{1,n_2} \cup \dots \cup K_{1,n_t}$ anggun super jika untuk $1 \le i \le t-1$ label terbesar titik K_{1,n_i} adalah p berakibat bahwa $n_{i+1} \equiv 0(mod(p+1))$

6). Untuk bilangan bulat $n \geq 2$ dan $m_i \geq 0$, *caterpillar* $P_n(m_1, m_2, \dots, m_n)$ adalah graf anggun super.

b. Saran

Untuk graf komplet K_n, permasalahan sudah terjawab tuntas karena karakteristik sudah ditemukan, tetapi untuk graf tripartit komplet, hanya $K_{1,1,t}$ yang telah ditunjukkan anggun super. Secara umum, apakah graf tripartit komplet merupakan anggun super, belum terjawab.

Begitu juga, bintang dan *caterpillar* hanya beberapa subkelas pohon yang telah ditunjukkan merupakan graf anggun super. Secara umum, pertanyaan apakah pohon merupakan graf anggun super, masih belum terjawab.

DAFTAR PUSTAKA

Andika, 2014. Graf Total dari Ring Komutatif. *Jurnal Ilmiah Matematika*, Volume 3 No.1 Tahun 2014

Anjani, Primas T.A dan Su, Robertus Heri. 2012. Pelabelan Super Graceful untuk Beberapa Graf Khusus: *Jurnal Mahasiswa Matematika Undip*, Vol.1, No.1, 2012(183-203)

Budayasa, I. K. (2007). *Teori Graph dan Aplikasinya.* Surabaya: Unesa University Press.

Kaloko, Ismail dan Ahyaningsih, Faiz. 2016. Pelabelan Graceful pada Graf Super Star: *Jurnal Karismatika*, Volume 2, No.1, 2016

Lau, Gee-Choon, Shiu, W.C, dkk. 2016. *Further Result on Super Graceful Labeling of Grafhs: AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*. Volume 13, 2016 (200-209)

Muarrifah, Zainatul. 2008. “Pelabelan Graceful (Graceful Labeling) pada Graf Superstar $S_{5,n}$”. Skripsi. Fakultas Sains dan Teknologi. Jurusan Matematika. Universitas Islam Negeri (UIN) Malang. Malang

Rosyid, Abdul, Ratnasari, Lucia, dkk. 2009. *Vertex Magic Total Labeling of Generalized Petersen Graphs*. Undergraduate Thesis. Universitas Diponegoro, Semarang

Sari, Dian N.I. 2013. Pelabelan Graceful Sisi pada Graf Komplet, Graf Komplet Reguler K-Partit, Graf Roda, Graf Bisikel, dan Graf Trisikel: *Jurnal Ilmiah Matematika*, Volume 2 No.1b, 2013

Wantika, Restu Ria. 2015. “Pelabelan Graceful pada Graf Dragon Ganda dan Graf Dragon Pendant”. Tesis. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Jurusan Matematika. Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Surabaya

Wardhani, Devy Anggun. 2019. Pelabelan Anggun-Ajaib-Sisi Super pada Graf Petersen yang Diperumum: *Jurnal Ilmiah Matematika*, Volume 7 No.2 Tahun 2019