

**ANALISIS DINAMIK MODEL KO-INFEKSI PENYAKIT CAMPAK DAN COVID-19
DENGAN MEMPERHATIKAN PEMBERIAN VAKSIN****Sukma Nardi Safitri**Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : sukma.17030214020@mhs.unesa.ac.id**Rudianto Artiono**Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : rudiantoartiono@unesa.ac.id**Abstrak**

Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis dinamik model ko-infeksi antara penyakit Campak dan Covid-19. Kedua penyakit memiliki beberapa kesamaan antara lain sumber penyakit yang berasal dari virus, cara penyebaran, manifestasi klinis, hingga pemberian vaksin. Sejak 30 Januari 2020, WHO secara resmi menetapkan tahap 'darurat kesehatan global' setelah adanya laporan terjadi 213 kasus meninggal dan 9.692 kasus infeksi baru Covid-19 dari total 31 provinsi yang ada di China. Sementara, Indonesia sebagai negara terpadat keempat di dunia juga memiliki resiko tinggi terhadap Covid-19. Selain itu, menurut WHO di Indonesia juga masih terjadi penyebaran penyakit Campak dengan tingkat penularan yang tinggi. Model matematika terkait penyebaran kedua penyakit perlu dikonstruksi untuk mengetahui eksistensinya di dalam populasi. Analisis dilakukan untuk menentukan titik kesetimbangan, kestabilan, dan bilangan reproduksi dasar. Penelitian ini menghasilkan empat titik kritis, yaitu titik kritis bebas penyakit, titik kritis Campak, titik kritis Covid-19, dan titik kritis Campak dan Covid-19. Terdapat dua bilangan reproduksi dasar yang menjadi indikator eksistensi titik kritis campak dan titik kritis Covid-19 yaitu \mathcal{R}_{0_1} dan \mathcal{R}_{0_2} . Pada saat $\mathcal{R}_{0_1} = 0,5926$ dan $\mathcal{R}_{0_2} = 0,3750$ maka menunjukkan eksistensi titik kritis bebas penyakit yang stabil. Pada saat $\mathcal{R}_{0_1} = 1,1428$ dan $\mathcal{R}_{0_2} = 0,8913$ maka menunjukkan eksistensi titik kritis penyakit Campak yang stabil. Demikian pula ketika $\mathcal{R}_{0_1} = 0,9373$ dan $\mathcal{R}_{0_2} = 1,1895$ maka menunjukkan eksistensi titik kritis Covid-19 yang stabil. Hasil ini dapat ditunjukkan pula melalui simulasi numerik menggunakan MATLAB untuk t (waktu) menuju tak hingga.

Kata kunci: Pemodelan, ko-infeksi, Campak, Covid-19**Abstract**

This study aims to analyze the dynamics of the co-infection model between Measles and Covid-19. The two diseases have several similarities, including the source of the disease originating from the virus, the way it is spread, clinical manifestations, and vaccines. Since January 30, 2020, WHO officially declared the stage of a 'global health emergency' after reports of 213 deaths and 9,692 new Covid-19 infections from a total of 31 provinces in China. Meanwhile, Indonesia as the fourth most populous country in the world also has a high risk of Covid-19. In addition, according to WHO, in Indonesia there is still the spread of measles with a high transmission rate. Mathematical models related to the spread of the two diseases need to be constructed to determine their existence in the population. The analysis is performed to determine the equilibrium point, stability, and basic reproduction number. This research resulted in four critical points, namely the disease-free critical point, the Measles critical point, the Covid 19 critical point, and the Measles and Covid-19 critical point. There are two basic reproduction numbers that are indicators of the existence of the measles critical point and the Covid-19 critical point, namely \mathcal{R}_{0_1} and \mathcal{R}_{0_2} . When $\mathcal{R}_{0_1} = 0.5926$ and $\mathcal{R}_{0_2} = 0.3750$, it indicates the existence of a stable disease-free critical point. When $\mathcal{R}_{0_1} = 1.1428$ and $\mathcal{R}_{0_2} = 0.8913$, it indicates the existence of a stable measles critical point. Likewise, when $\mathcal{R}_{0_1} = 0.9373$ and $\mathcal{R}_{0_2} = 1.1895$, it shows the existence of a stable Covid-19 critical point. This result can also be demonstrated through numerical simulation using MATLAB for t (time) to infinity.

Keywords : Modelling, co-infection, Measles, Covid-19

PENDAHULUAN

Penyakit Coronavirus (Covid-19) pertama kali muncul di Wuhan, Ibukota Provinsi Hubei, China pada Desember 2019. Penyakit ini disebabkan oleh Coronavirus 2 yang juga dikenal sebagai SARS-CoV-2 (WHO, 2020; Yang *et.al.*, 2020:165). Sejak berita Covid-19 muncul pada akhir Desember 2019 lalu, para pakar kesehatan di seluruh dunia mulai meningkatkan persiapan menghadapi kemungkinan penyebaran virus Corona ke negara-negara di dunia. Bersamaan dengan itu, tahap 'darurat kesehatan global' telah resmi diumumkan oleh WHO pada tanggal 30 Januari 2020 dikarenakan adanya laporan bahwa terdapat 9.692 kasus terinfeksi dan 213 kasus meninggal dari 31 provinsi di China (Almuttaqi, 2020:13).

Menurut (New England Journal of Me, 2020) dilaporkan bahwa penularan Covid-19 dapat terjadi dari individu yang telah terinfeksi virus maupun individu yang belum bergejala atau yang dikenal dengan istilah Orang Tanpa Gejala (Rothe *et.al.*, 2020:970-971). Namun, ketika seseorang terinfeksi Covid-19 maka orang tersebut tidak akan langsung mengalami gejala-gejalanya. Manifestasi klinis baru akan muncul dengan jarak 5 sampai 7 hari, jarak ini disebut sebagai masa inkubasi virus. Beberapa gejala yang muncul selama masa inkubasi ini antara lain demam (suhu > 38°C), batuk, bersin, dan sesak napas (Novel, 2020:145; Jin *et.al.*, 2020:1002-1009; Tosepu *et.al.*, 2020:138436). Droplet (tetesan uap air) yang keluar dari saluran pernapasan individu yang terinfeksi Covid-19 ketika batuk dan bersin, dimana virus ini yang nantinya akan menginfeksi orang lain (Wang, 2020:441-447; Bai, 2020:1406-1407).

Indonesia sebagai salah satu negara berkembang dan terpadat keempat di dunia memiliki resiko tinggi terhadap penyebaran Covid-19. Pada 2 Maret 2020, Presiden Jokowi mengkonfirmasi adanya pasien Covid-19 pertama di Indonesia yang terus bertambah hingga saat ini. Sampai dengan 27 November 2020 terdapat sebanyak 522.581 kasus orang terinfeksi Covid-19 dengan 16.521 orang diantaranya meninggal dunia, sedangkan untuk skala global sebanyak 60.534.526 kasus orang terinfeksi Covid-19 dan 1.426.101 orang meninggal dunia (Djalante *et.al.*, 2020; Gugus tugas percepatan penanganan Covid-19, 2020; WHO, 2020).

Pertambahan kasus Covid-19 yang signifikan menyebabkan perubahan fungsi rumah sakit yang menjadi rumah sakit rujukan untuk pasien Covid-19. Tenaga medis di beberapa rumah sakit juga lebih diprioritaskan untuk menangani pasien-pasien Covid-19. Akibatnya, orang yang terinfeksi penyakit menular lainnya menjadi takut untuk berobat ke rumah sakit atau tidak tertangani dengan baik.

Salah satu jenis penyakit menular di Indonesia yang memiliki angka penularan tinggi menurut WHO adalah penyakit Campak. Penyakit ini merupakan penyakit menular (*infeksius*) yang biasa disebut *Morbili* atau *Measles* (Parker *et.al.*, 2010; Sihotang *et.al.*, 2019). Sama halnya dengan penyakit Covid-19, penyakit campak juga mudah menyebar melalui sistem pernapasan, terutama saat orang yang telah terinfeksi bersin, batuk, maupun berbicara dan mengeluarkan percikan air liur atau cairan dari sistem pernapasan (Kemenkes, 2017a; Hanratty *et.al.*, 2000). Seseorang yang terinfeksi virus ini akan mengalami beberapa manifestasi klinis yang muncul pada hari ke-7 hingga ke-18 (Goodall, 1931). Beberapa gejala yang akan dialami sama seperti gejala yang muncul pada pasien Covid-19 yaitu demam (suhu >38°C) yang terjadi selama 3-5 hari, batuk, pilek, gejala kojungtivitas, dan timbul bercak merah yang bertahan selama 4-8 hari (Fiebelkom *et.al.*, 2014; Heinzerling *et.al.*, 2005).

Pada tahun 1980, sebelum imunisasi meluas, diperkirakan lebih dari 20 juta orang di seluruh dunia terinfeksi Campak. Penyakit ini memiliki angka kematian setiap tahunnya yang mencapai 2,6 juta jiwa dan kematian terbanyak pada usia anak-anak 1-5 tahun (Kemenkes, 2018). Sejak tahun 2019, kasus suspek campak di Indonesia mencapai 8.819 kasus yang tersebar di berbagai daerah seperti Aceh, Jawa Tengah dan DKI Jakarta (Kemenkes, 2019). Berdasarkan data, sehingga perlu dibuat penelitian terkait penyakit Campak. Salah satu upaya yang dilakukan oleh pemerintah Indonesia untuk mengatasi penyebaran penyakit Campak adalah melaksanakan program eliminasi campak yang ditargetkan pada tahun 2021 untuk regional Jawa-Bali. Sayangnya, sejak terjadi pandemi Covid-19, cakupan dari program ini menurun. Pada periode Januari hingga April 2020, 18 provinsi mencapai cakupan eliminasi campak kurang dari 40% (Buletin 2021).

Seseorang yang terinfeksi virus ini akan mengalami beberapa manifestasi klinis yang mulai muncul antara jarak 7 sampai 18 hari (Goodall, 1931:73). Beberapa gejala yang akan dialami sama seperti gejala yang muncul pada pasien Covid-19 yaitu demam (suhu >38°C) yang terjadi selama 3-5 hari, batuk, pilek, gejala kojungtivitas, dan timbul bercak merah yang bertahan selama 4-8 hari (Fiebelkom dkk, 2014:4823-4839; Heinzerling dkk, 2005:2287-2294).

Jika cakupan vaksin yang diberikan rendah dan orang yang terinfeksi penyakit campak tidak mendapatkan pengobatan sebagaimana mestinya di rumah sakit karena adanya pengalihan fungsi rumah sakit menjadi rumah sakit rujukan Covid-19 maka dimungkinkan penyakit ini akan kembali menjadi pandemik. Penelitian ini dilakukan untuk mengetahui dinamik dari penyakit Campak dan Covid-19 sesuai dengan kondisi saat ini dimana kedua penyakit ini telah ada di dalam suatu populasi. Analisis dinamik kedua penyakit dilakukan melalui pembuatan model matematika yang dilanjutkan dengan analisis titik kritis dan penentuan bilangan reproduksi dasar serta simulasi numerik untuk melihat eksistensi kedua penyakit pada suatu populasi.

KAJIAN TEORI

Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial adalah sistem yang memuat k persamaan diferensial dengan k fungsi yang bergantung pada variabel a, a_2, a_3, \dots, a_k dan t .

Secara umum, persamaan diferensial orde- k dapat dituliskan sebagai:

$$b^{(k)} = f(t, b, b', \dots, b^{(k-1)}), b \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

Dimana $b, b', \dots, b^{(k-1)}$ adalah variabel yang bergantung pada t dimana t menyatakan waktu.

Apabila didefinisikan $b = a, b' = a_2, \dots, b^{(k-1)} = a_k$, maka $a'_1 = a_2, a'_2 = a_3, \dots, a'_{k-1} = a_k$, sehingga diperoleh $a'_k = f(t, a_1, a_2, \dots, a_k)$. Maka sistem persamaan diferensial linier orde pertama dapat dinyatakan sebagai:

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dt} &= f_1(t, a_1, a_2, \dots, a_k) \\ \frac{da_2}{dt} &= f_2(t, a_1, a_2, \dots, a_k) \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\frac{da_k}{dt} = f_n(t, a_1, a_2, \dots, a_k)$$

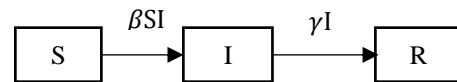
Sistem (2.2) disebut sistem linier, jika fungsi f_1, f_2, \dots, f_k merupakan fungsi-fungsi linier dari variabel a_1, a_2, \dots, a_n (Boyce dan DiPrima, 2001).

Menurut Ross (2004), suatu sistem dapat dikatakan nonlinear jika memenuhi beberapa kriteria, yaitu:

- a) Variabel terikat yang berpangkat lebih dari satu menyertakan turunannya.
- b) Mengalikan variabel terikat dan/atau turunannya.
- c) Variabel terikat dan turunannya memiliki fungsi transdental.

Model SIR

Model epidemi ini adalah model dasar penularan dan penyebaran penyakit yang diperkenalkan oleh Kermack-McKendrick pada tahun 1927 (Kermack dkk, 1927). Model epidemi ini dapat disumsikan menjadi 3 subpopulasi, yaitu *Susceptible* (S), *Infected* (I), dan *Recovery* (R). Model SIR dapat digambarkan melalui kompartemen berikut:



Gambar 1. Diagram model SIR

Dari diagram tersebut, dapat diturunkan suatu model persamaan diferensial nonlinear sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I \end{aligned} \tag{2.3}$$

dimana:

$\frac{dS}{dt}$ = laju pertumbuhan populasi individu rentan pada waktu t

$\frac{dI}{dt}$ = laju pertumbuhan populasi individu terinfeksi pada waktu t

$\frac{dR}{dt}$ = laju pertumbuhan populasi individu sehat pada waktu t

S = kelompok manusia rentan (*Susceptible*)

I = kelompok manusia terinfeksi (*Infected*)

R = kelompok manusia yang telah sembuh dari penyakit (*Recovery*)

β = parameter interaksi antara manusia rentan dengan manusia terinfeksi

γ = parameter interaksi antara manusia terinfeksi dengan manusia yang telah sembuh

Titik Kritis

Titik kritis adalah titik yang tidak dapat berubah seiring waktu, oleh karena itu pada bila $t = 1, 2, \dots, n$ nilai titik tersebut tidak akan berubah. Dengan menggunakan metode substitusi dapat memperoleh titik kritis.

Definisi :

Titik $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$ disebut sebagai titik kritis suatu sistem $\dot{x} = f(x)$ jika memenuhi $f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) = 0$ (Edwards dkk, 2000).

Matriks Jacobi

Matriks Jacobi merupakan matriks yang memiliki komponen fungsi f_1, f_2, \dots, f_n dengan $\frac{\partial f_i(\xi)}{\partial x_j}$ adalah entri matriks pada titik kritis ξ , yang merupakan turunan parsial pertama dari $f_i(\xi)$ terhadap variabel x_j , $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$, pada titik $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\xi)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\xi)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\xi)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\xi)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Nilai Eigen dan Vektor Eigen

“Misalkan H merupakan matriks dengan ukuran $n \times n$, ada satu vektor bukan 0 pada \mathbb{R}^n disebut vektor eigen dari H , sehingga Hx adalah kelipatan skalar x .

$$Hx = \lambda x \quad (2.4)$$

λ merupakan skalar yang disebut nilai eigen H dan x merupakan vektor eigen H relatif terhadap λ .”

Nilai eigen dari matriks H dapat dijabarkan melalui persamaan berikut:

$$Hx = \lambda x \quad (2.5)$$

atau

$$(\lambda I - H)x = 0 \quad (2.6)$$

dimana I merupakan matriks identitas. λ harus memiliki satu solusi tak nol dari persamaan (2.6) untuk menjadi nilai eigen, jika

$$\det(\lambda I - H)x = 0 \quad (2.7)$$

Persamaan (2.7) disebut persamaan karakteristik matriks H (Anton dan Rorres, 2004).

Kestabilan Titik Kritis

Dengan menganalisis kestabilan titik kritis, sifat-sifat penyelesaian persamaan diferensial dapat

ditentukan. Kestabilan titik kritis dapat ditentukan oleh nilai eigen.

Menurut Teorema dari (Olsder dan Woude, 2003), Terdapat suatu sistem persamaan diferensial $\dot{u} = f(x)$, dengan H suatu matriks $n \times n$ yang mempunyai k nilai eigen berbeda $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ dengan $k \leq n$. Akan berlaku:

1. Jika dan hanya jika setiap komponen real dari nilai eigen kompleks bernilai tak positif ($\text{Re}(\lambda_k) < 0, \forall k = 1, 2, \dots, n$) dan jika setiap nilai eigen real bernilai tak positif ($\lambda_k < 0, \forall k = 1, 2, \dots, n$) maka dikatakan stabil asimtotik
2. Jika dan hanya jika setiap komponen real dari nilai eigen kompleks bernilai tak positif ($\text{Re}(\lambda_k) \leq 0, \forall k = 1, 2, \dots, n$) dan jika setiap nilai eigen real bernilai tak positif ($\lambda_k \leq 0, \forall k = 1, 2, \dots, n$) maka dikatakan stabil
3. Jika dan hanya jika setiap komponen real dari nilai eigen kompleks bernilai tak positif ($\text{Re}(\lambda_k) > 0, \forall k = 1, 2, \dots, n$) dan jika setiap nilai eigen real bernilai tak positif ($\lambda_k > 0, \forall k = 1, 2, \dots, n$) maka dikatakan tidak stabil

Next Generation Matrix

Matriks yang menghubungkan jumlah individu yang baru terinfeksi ke populasi yang berbeda secara berurutan sesuai sistem yang ada di notasikan dengan K dan disebut *Next Generation Matrix*. Misalkan x merepresentasikan kelas terinfeksi penyakit, dan y merepresentasikan kelas yang tak terinfeksi penyakit. \mathcal{F}_i sebagai matriks rata-rata jumlah individu yang baru terinfeksi penyakit, dan \mathcal{V}_i sebagai matriks rata-rata penurunan jumlah individu terinfeksi (Diekmann dkk, 2009). Dimana \mathcal{F} dan \mathcal{V} merupakan matriks dengan ukuran $n \times n$, didefinisikan sebagai:

$$\mathcal{F} = \left[\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_j}(\tau^0) \right], \mathcal{V} = \left[\frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j}(\tau^0) \right] \quad (2.8)$$

dengan (τ^0) merupakan titik kritis bebas penyakit. Selanjutnya didefinisikan matriks $K = -\mathcal{F}\mathcal{V}^{-1}$ yang di sebut *Next Generation Matrix* (Diekmann dkk, 2009). Nilai dari bilangan reproduksi dasar bisa ditentukan dengan mencari nilai eigen yang paling dominan pada matriks K ,

Bilangan Reproduksi Dasar (\mathcal{R}_0)

Bilangan reproduksi dasar (\mathcal{R}_0) merepresentasikan suatu bilangan sebagai ambang batas penularan penyakit yang diakibatkan oleh

individu terinfeksi pada populasi yang rentan. (Driessche, 2017).

Bilangan reproduksi dasar dari sistem persamaan dapat diperoleh dengan nilai eigen matriks Jacobian yang dihitung pada titik kritis bebas penyakit. Karakteristik \mathcal{R}_0 , yaitu:

1. Ketika $\mathcal{R}_0 < 1$, maka penyakit akan hilang, sehingga jumlah individu yang rentan maupun sembuh lebih banyak daripada populasi individu yang terinfeksi.
2. Ketika $\mathcal{R}_0 = 1$, maka penyakit akan tetap ada dan stabil, namun tidak menimbulkan wabah.
3. Ketika $\mathcal{R}_0 > 1$, maka penyakit akan terus meningkat menjadi epidemi sehingga jumlah individu yang rentan maupun sembuh lebih sedikit daripada populasi individu yang terinfeksi (Diekmann dkk, 2009)

METODE

Jenis Penelitian

Penelitian ini merupakan studi literatur yang mengkaji tentang analisis dinamik model ko-infeksi penyakit Campak dan Covid-19. Penelitian ini dilakukan secara bertahap yaitu: penyusunan model, analisis titik kritis, analisis stabilitas, penentuan bilangan reproduksi dasar dan analisisnya serta simulasi numerik.

Rancangan Penelitian

Penelitian diawali dengan studi literatur, serta menyusun asumsi dan batasan masalah. Kemudian membentuk model epidemik, penentuan titik kritis, serta menganalisis kestabilan. Selanjutnya, menggunakan NGM untuk menentukan \mathcal{R}_0 , kemudian justifikasi \mathcal{R}_0 berdasarkan titik kritis bebas penyakit, serta melanjutkan simulasi numerik model ko-infeksi penyakit Campak dan Covid-19.

Sumber Data Penelitian

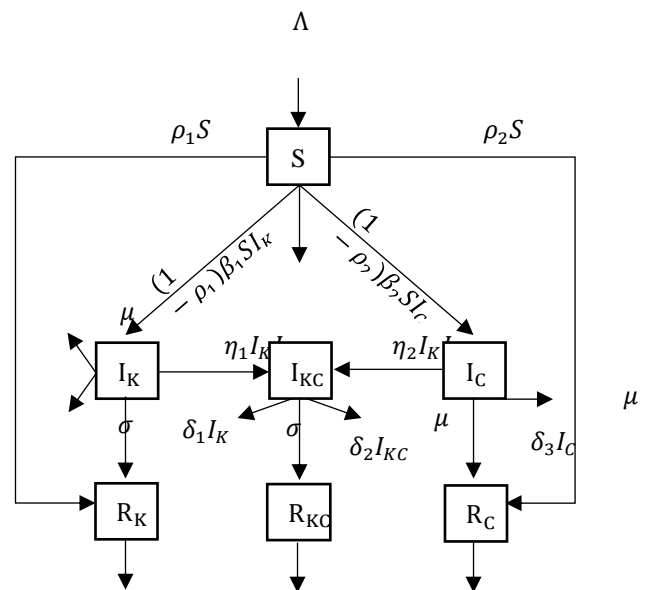
Tidak ada tahapan perolehan data primer, sehingga data yang digunakan sebagai sumber merupakan data sekunder dari berbagai artikel. Artikel yang digunakan adalah artikel yang membahas tentang penyakit Campak dan Covid-19.

PEMBAHASAN

Proses pemodelan matematika untuk kedua penyakit dikembangkan dari model dasar penyebaran penyakit SIR yang dikembangkan oleh Kermack-Mckendrick pada tahun 1927 dengan

memodifikasi jumlah populasi sesuai dengan karakteristik dari model kedua penyakit (Kermack dan McKendrick, 1927). Model yang dikembangkan merupakan hasil modifikasi dari model ko-infeksi yang telah dikembangkan oleh Okosun dan Makinde pada tahun 2014 (Okosun & Makinde, 2014). Pada penelitian ini terdapat 7 kelas sub-populasi, yaitu (S) menyatakan sub-populasi manusia rentan, (I_K) menyatakan sub-populasi manusia terinfeksi penyakit Campak, (I_C) menyatakan sub-populasi manusia terinfeksi Covid-19, (I_{KC}) menyatakan sub-populasi manusia terinfeksi penyakit Campak dan Covid-19, (R_K) menyatakan sub-populasi manusia yang sembuh dari penyakit campak, (R_C) menyatakan sub-populasi manusia yang sembuh dari Covid-19, (R_{KC}) menyatakan sub-populasi manusia yang sembuh dari penyakit Campak dan Covid-19.

Berikut ini adalah beberapa asumsi yang diberikan untuk menghasilkan kondisi ideal dan memberikan batasan terhadap pembentukan model. a) angka kelahiran dan angka kematian yang sama, b) populasi bersifat tertutup (tidak terjadi migrasi), c) populasi bercampur secara homogen, d) terdapat kematian yang disebabkan oleh penyakit, e) tidak terjadi re-infeksi baik di penyakit Campak maupun Covid-19, dan f) seseorang hanya menerima satu jenis vaksin saja yaitu vaksin Campak atau vaksin Covid-19. Model matematika disusun berdasarkan kompartemen yang ada pada gambar 2.



Gambar 2. Model kompartemen ko-infeksi penyakit Campak dan Covid-19

Berdasarkan gambar 2, model matematika yang terbentuk adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} S' &= \Lambda - \rho_1 S - \rho_2 S - (1 - \rho_1)\beta_1 S I_K - (1 - \rho_2)\beta_2 S I_C - \mu S \\ I_K' &= (1 - \rho_1)\beta_1 S I_K - \eta_1 I_K I_C - \delta_1 I_K - \sigma I_K - \mu I_K \\ I_C' &= (1 - \rho_2)\beta_2 S I_C - \eta_2 I_K I_C - \delta_3 I_C - \mu I_C \\ I_{KC}' &= \eta_1 I_K I_C + \eta_2 I_K I_C - \delta_2 I_{KC} - \sigma I_{KC} - \mu I_{KC} \\ R_K' &= \delta_1 I_K + \rho_1 S - \mu R_K \\ R_C' &= \delta_3 I_C + \rho_2 S - \mu R_C \\ R_{KC}' &= \delta_2 I_{KC} - \mu R_{KC} \end{aligned} \quad (4.1)$$

dengan

Λ : tingkat rekrutmen

ρ_1 : tingkat pemberian vaksin Campak

ρ_2 : tingkat pemberian vaksin Covid-19

β_1 : tingkat infeksi dari manusia yang rentan menjadi terinfeksi Campak

β_2 : tingkat infeksi dari manusia yang rentan menjadi terinfeksi Covid-19

η_1 : tingkat infeksi dari manusia yang terinfeksi campak menjadi terinfeksi Covid-19

η_2 : tingkat infeksi dari manusia yang terinfeksi Covid-19 menjadi terinfeksi Campak

δ_1 : tingkat kesembuhan dari manusia yang terinfeksi Campak

δ_2 : tingkat kesembuhan dari manusia yang terinfeksi Campak dan Covid-19

δ_3 : tingkat kesembuhan dari manusia yang terinfeksi Covid-19

μ : tingkat kematian alami

σ : tingkat kematian yang diakibatkan oleh penyakit

Pada penelitian ini, semua parameter diasumsikan bernilai positif.

Selanjutnya menentukan titik kesetimbangan dari sistem persamaan (4.1) dengan menetapkan ruas kanan dari setiap sub-populasi sama dengan nol. Berikut ini titik kritis yang diperoleh.

1. Titik Kritis Bebas Penyakit

$$= \left\{ S = \frac{\Lambda}{\mu + \rho_1 + \rho_2}, I_C = 0, I_K = 0, I_{KC} = 0, R_C = \frac{\Lambda \rho_2}{(\mu + \rho_1 + \rho_2)\mu}, R_K = \frac{\Lambda \rho_1}{(\mu + \rho_1 + \rho_2)\mu}, R_{KC} = 0 \right\}$$

2. Titik Kritis Penyakit Campak

$$\begin{aligned} &= \left\{ S = -\frac{\mu + \sigma + \delta_1}{\beta_1(\rho_1 - 1)}, I_C = 0, I_K = \frac{1}{\beta_1(\mu\rho_1 + \sigma\rho_1 + \delta_1\rho_1 - \mu - \sigma - \delta_1)} (\Lambda\beta_1\rho_1 + \mu\rho_1 + \mu\rho_2 + \sigma\rho_1 + \sigma\rho_2 + \delta_1\rho_1 + \delta_1\rho_2 - \Lambda\beta_1 + \mu^2 + \mu\sigma + \mu\delta_1), \right. \\ &I_{KC} = 0, R_C = -\frac{(\mu + \sigma + \delta_1)\rho_2}{\beta_1(\rho_1 - 1)\mu}, R_K = \frac{1}{\mu\beta_1(\mu\rho_1 + \sigma\rho_1 + \delta_1\rho_1 - \mu - \sigma - \delta_1)} (\Lambda\beta_1\delta_1\rho_1 - \mu^2\rho_1 - 2\mu\sigma\rho_1 - \mu\delta_1\rho_1 + \mu\delta_1\rho_2 - \sigma^2\rho_1 - \sigma\delta_1\rho_1 + \sigma\delta_1\rho_2 + \mu\delta_1^2\rho_2 - \Lambda\beta_1\delta_1 + \mu^2\delta_1 + \mu\sigma\delta_1 + \mu\delta_1^2), R_{KC} = 0 \left. \right\} \end{aligned}$$

3. Titik Kritis Penyakit Covid-19

$$\begin{aligned} &= \left\{ S = -\frac{\mu + \delta_3}{\beta_2(\rho_2 - 1)}, I_C = \frac{1}{\beta_2(\mu\rho_2 + \delta_3\rho_2 - \mu - \delta_3)} (\Lambda\beta_2\rho_2 + \mu\rho_1 + \mu\rho_2 + \delta_3\rho_1 + \delta_3\rho_2 - \Lambda\beta_2 + \mu^2 + \mu\delta_3), I_K = 0, I_{KC} = 0, R_C = \frac{1}{\mu\beta_2(\mu\rho_2 + \delta_3\rho_2 - \mu - \delta_3)} (\Lambda\beta_2\delta_3\rho_2 - \mu^2\rho_2 + \mu\delta_3\rho_1 - \mu\delta_3\rho_2 + \delta_3^2\rho_1 - \Lambda\beta_2\delta_3 + \mu^2\delta_3 + \mu\delta_3^2), R_K = -\frac{(\mu + \delta_3)\rho_1}{\beta_2(\rho_2 - 1)}, R_{KC} = 0 \right\} \end{aligned}$$

4. Titik Kritis Ko-infeksi

$TEEI := \{S = S^*, I_K = I_K^*, I_C = I_C^*, I_{KC} = I_{KC}^*, R_K = R_K^*, R_C = R_C^*, R_{KC} = R_{KC}^*\}$. Titik kritis ko-infeksi tidak memungkinkan untuk dituliskan pada artikel ini karena bentuknya yang kompleks.

Salah satu hal penting dalam pemodelan penyebaran penyakit adalah untuk mengetahui apakah suatu penyakit akan tetap berada pada suatu populasi atau akan menghilang dari populasi tersebut dalam waktu yang lama. Hal ini dapat diperoleh dengan cara menganalisis model yang telah dihasilkan. Berikut ini beberapa analisis yang dilakukan pada penelitian ini untuk mengetahui eksistensi penyakit Campak dan Covid-19.

Analisis Titik Kritis

Syarat terjadinya infeksi dapat diperoleh ketika populasi manusia terinfeksi lebih dari 0, dalam hal ini maka $I_K > 0$ dan $I_C > 0$.

Titik kritis penyakit campak akan eksis ketika

$$I_K = \frac{1}{\beta_1(\mu\rho_1 + \sigma\rho_1 + \delta_1\rho_1 - \mu - \sigma - \delta_1)} (\Lambda\beta_1\rho_1 + \mu\rho_1 + \mu\rho_2 + \sigma\rho_1 + \sigma\rho_2 + \delta_1\rho_1 + \delta_1\rho_2 - \Lambda\beta_1 + \mu^2 + \mu\sigma + \mu\delta_1) > 0$$

Syarat ini dapat dipenuhi ketika

$$\frac{\Lambda\beta_1(1 - \rho_1)}{(\mu + \rho_1 + \rho_2)(\mu + \sigma + \delta_1)} > 1 \text{ dan } \rho_1 < 1$$

Ketika nilai $\frac{\Lambda\beta_1(1 - \rho_1)}{(\mu + \rho_1 + \rho_2)(\mu + \sigma + \delta_1)} > 1$ dan $\rho_1 < 1$, maka

titik kritis penyakit Campak akan eksis.

Sementara, titik kritis penyakit Covid-19 akan eksis ketika

$$I_C = \frac{1}{\beta_2(\mu\rho_2 + \delta_3\rho_2 - \mu - \delta_3)} (\Lambda\beta_2\rho_2 + \mu\rho_1 + \mu\rho_2 + \delta_3\rho_1 + \delta_3\rho_2 - \Lambda\beta_2 + \mu^2 + \mu\delta_3) > 0$$

Syarat ini dapat dipenuhi ketika

$$\frac{\Lambda\beta_2(1 - \rho_2)}{(\mu + \rho_1 + \rho_2)(\mu + \delta_3)} > 1 \text{ dan } \rho_2 < 1$$

Ketika nilai $\frac{\Lambda\beta_2(1 - \rho_2)}{(\mu + \rho_1 + \rho_2)(\mu + \delta_3)} > 1$ dan $\rho_2 < 1$, maka

titik kritis penyakit Covid-19 akan eksis.

Analisis Kestabilan

Dari sistem persamaan (1) dan titik kritis bebas penyakit, diperoleh Matriks Jacobian sebagai berikut:

$$J_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 & 0 \\ \rho_1 & \delta_1 & 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 \\ \rho_2 & 0 & \delta_3 & 0 & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 & 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

dimana,

$$a_{11} = -\mu - \rho_1 - \rho_2$$

$$a_{12} = \frac{\Lambda\beta_1\rho_1 - \Lambda\beta_1}{\mu + \rho_1 + \rho_2}$$

$$a_{13} = \frac{\Lambda\beta_2\rho_2 - \Lambda\beta_2}{\mu + \rho_1 + \rho_2}$$

$$a_{22} = -\frac{\Lambda\beta_1\rho_1 - \Lambda\beta_1}{\mu + \rho_1 + \rho_2} - \mu - \sigma - \delta_1$$

$$a_{33} = -\frac{\Lambda\beta_2\rho_2 - \Lambda\beta_2}{\mu + \rho_1 + \rho_2} - \mu - \delta_3$$

$$a_{44} = -\mu - \sigma - \delta_2$$

Sehingga untuk analisis stabilitas dapat diperoleh dengan cara menganalisis semua nilai eigen pada titik kritis bebas penyakit. Terdapat 7 nilai eigen sebagai berikut.

1. $\lambda_{01} = -\mu - \rho_1 - \rho_2$, semua parameter diasumsikan bernilai positif, sehingga nilai eigen untuk λ_{01} selalu bernilai negatif.

2. $\lambda_{02} = -\mu - \sigma - \delta_2$, semua parameter diasumsikan bernilai positif, sehingga nilai eigen untuk λ_{02} selalu bernilai negatif.

3. $\lambda_{03} = -\frac{(\mu + \rho_1 + \rho_2)(\mu + \delta_3) + \Lambda\beta_2\rho_2 - \Lambda\beta_2}{\mu + \rho_1 + \rho_2}$, nilai eigen λ_3 akan bernilai negatif jika dipenuhi syarat berikut $\frac{\Lambda\beta_2(1 - \rho_2)}{(\mu + \rho_1 + \rho_2)(\mu + \delta_3)} < 1$

4. $\lambda_{04} = -\frac{1}{\mu + \rho_1 + \rho_2}((\mu + \rho_1 + \rho_2)(\mu + \sigma + \delta_1) + \Lambda\beta_1\rho_1 - \Lambda\beta_1)$, nilai eigen λ_4 akan bernilai negatif jika dipenuhi syarat berikut

$$\frac{\Lambda\beta_1(1 - \rho_1)}{(\mu + \rho_1 + \rho_2)(\mu + \sigma + \delta_1)} < 1$$

5. $\lambda_{05} = -\mu$, semua parameter diasumsikan bernilai positif, sehingga nilai eigen untuk λ_{05} selalu bernilai negatif.

6. $\lambda_{06} = -\mu$, semua parameter diasumsikan bernilai positif, sehingga nilai eigen untuk λ_{06} selalu bernilai negatif.

7. $\lambda_{07} = -\mu$, semua parameter diasumsikan bernilai positif, sehingga nilai eigen untuk λ_{07} selalu bernilai negatif.

Hasil ini menunjukkan bahwa titik kritis bebas penyakit akan stabil asimptotik jika syarat pada nilai eigen λ_{03} dan λ_{04} dipenuhi yaitu $\frac{\Lambda\beta_2(1 - \rho_2)}{(\mu + \rho_1 + \rho_2)(\mu + \delta_3)} < 1$

dan $\frac{\Lambda\beta_1(1 - \rho_1)}{(\mu + \rho_1 + \rho_2)(\mu + \sigma + \delta_1)} < 1$.

Selanjutnya akan ditunjukkan analisis kestabilan untuk titik kritis penyakit Campak dari sistem persamaan (4.1). Diperoleh Matriks Jacobian sebagai berikut:

$$J_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 & 0 \\ \rho_1 & \delta_1 & 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 \\ \rho_2 & 0 & \delta_3 & 0 & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 & 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

Dimana

$$a_{11} = \frac{(\rho_1 - 1)\Lambda\beta_1}{\mu + \sigma + \delta_1}$$

$$a_{12} = -(\mu + \sigma + \delta_1)$$

$$a_{13} = -\frac{(\mu + \sigma + \delta_1)(\rho_2 - 1)\beta_2}{(\rho_1 - 1)\beta_1}$$

$$a_{21} = -\frac{(\rho_1 - 1)\Lambda\beta_1 + (\mu + \rho_1 + \rho_2)(\mu + \sigma + \delta_1)}{\mu + \sigma + \delta_1}$$

$$a_{23} = -\frac{[(\rho_1 - 1)\Lambda\beta_1 + (\mu + \rho_1 + \rho_2)(\mu + \sigma + \delta_1)]\eta_1}{(\rho_1 - 1)(\mu + \sigma + \delta_1)\beta_1}$$

$$a_{33} = -\frac{1}{(\rho_1 - 1)(\mu + \sigma + \delta_1)\beta_1}((\rho_1 - 1)\Lambda\beta_1\eta_2 + (\mu + \sigma + \delta_1)[(\rho_1 - 1)(\mu + \delta_3)\beta_1 - (\rho_2 - 1)(\mu + \sigma + \delta_1)\beta_2 + (\mu + \rho_1 + \rho_2)\eta_2])$$

$$a_{43} = \frac{[(\rho_1 - 1)\Lambda\beta_1 + (\mu + \rho_1 + \rho_2)(\mu + \sigma + \delta_1)](\eta_1 + \eta_2)}{(\rho_1 - 1)(\mu + \sigma + \delta_1)\beta_1}$$

$$a_{44} = -(\mu + \sigma + \delta_2)$$

Sehingga untuk analisis stabilitas dapat diperoleh dengan cara menganalisis semua nilai eigen pada titik kritis penyakit Campak. Berikut ini 7 nilai eigen yang diperoleh.

1. $\lambda_{11} = -\mu - \sigma - \delta_2$, semua parameter diasumsikan bernilai positif, sehingga nilai eigen untuk λ_{11} selalu bernilai negatif.

$$2. \lambda_{12} = \frac{1}{2\mu + \sigma + \delta_1}(\Lambda\beta_1\rho_1 - \Lambda\beta_1 + (\Lambda^2\beta_1^2\rho_1^2 - 2\Lambda^2\beta_1^2\rho_1 + 4\Lambda\mu^2\beta_1\rho_1 + 8\Lambda\mu\sigma\beta_1\rho_1 + 8\Lambda\mu\beta_1\delta_1\rho_1 + 4\Lambda\sigma^2\beta_1\rho_1 + 8\Lambda\sigma\beta_1\delta_1\rho_1 + 4\Lambda\beta_1\delta_1^2\rho_1 + 4\mu^3\rho_1 + 4\mu^3\rho_2 + 12\mu^2\sigma\rho_1 + 12\mu^2\sigma\rho_2 + 12\mu^2\delta_1\rho_1 + 12\mu^2\delta_1\rho_2 + 12\mu\sigma^2\rho_1 + 12\mu\sigma^2\rho_2 + 24\mu\sigma\delta_1\rho_1 + 24\mu\sigma\delta_1\rho_2 + 12\mu\delta_1^2\rho_1 + 12\mu\delta_1^2\rho_2 + 4\sigma^3\rho_1 + 4\sigma^3\rho_2 + 12\sigma^2\delta_1\rho_1 + 12\sigma^2\delta_1\rho_2 + 12\sigma\delta_1^2\rho_1 + 12\sigma\delta_1^2\rho_2 + 4\delta_1^3\rho_1 + 4\delta_1^3\rho_2 + \Lambda^2\beta_1^2 - 4\Lambda\mu^2\beta_1 - 8\Lambda\mu\sigma\beta_1 - 8\Lambda\mu\beta_1\delta_1 - 4\Lambda\sigma^2\beta_1 - 8\Lambda\sigma\beta_1\delta_1 - 4\Lambda\beta_1\delta_1^2 + 4\mu^4 + 12\mu^3\sigma + 12\mu^3\delta_1 + 12\mu^2\sigma^2 + 24\mu^2\sigma\delta_1 + 12\mu^2\delta_1^2 + 4\mu\sigma^3 + 12\mu\sigma^2\delta_1 + 12\mu\sigma\delta_1^2 + 4\mu\delta_1^3)^{1/2})$$

$$3. \lambda_{13} = \frac{1}{2\mu + \sigma + \delta_1}(\Lambda\beta_1\rho_1 - \Lambda\beta_1 - (\Lambda^2\beta_1^2\rho_1^2 - 2\Lambda^2\beta_1^2\rho_1 + 4\Lambda\mu^2\beta_1\rho_1 + 8\Lambda\mu\sigma\beta_1\rho_1 + 8\Lambda\mu\beta_1\delta_1\rho_1 + 4\Lambda\sigma^2\beta_1\rho_1 + 8\Lambda\sigma\beta_1\delta_1\rho_1 + 4\Lambda\beta_1\delta_1^2\rho_1 + 4\mu^3\rho_1 + 4\mu^3\rho_2 + 12\mu^2\sigma\rho_1 + 12\mu^2\sigma\rho_2 + 12\mu^2\delta_1\rho_1 + 12\mu^2\delta_1\rho_2 + 12\mu\sigma^2\rho_1 + 12\mu\sigma^2\rho_2 + 24\mu\sigma\delta_1\rho_1 +$$

$$24\mu\sigma\delta_1\rho_2 + 12\mu\delta_1^2\rho_1 + 12\mu\delta_1^2\rho_2 + 4\sigma^3\rho_1 + 4\sigma^3\rho_2 + 12\sigma^2\delta_1\rho_1 + 12\sigma^2\delta_1\rho_2 + 12\sigma\delta_1^2\rho_1 + 12\sigma\delta_1^2\rho_2 + 4\delta_1^3\rho_1 + 4\delta_1^3\rho_2 + \Lambda^2\beta_1^2 - 4\Lambda\mu^2\beta_1 - 8\Lambda\mu\sigma\beta_1 - 8\Lambda\mu\beta_1\delta_1 - 4\Lambda\sigma^2\beta_1 - 8\Lambda\sigma\beta_1\delta_1 - 4\Lambda\beta_1\delta_1^2 + 4\mu^4 + 12\mu^3\sigma + 12\mu^3\delta_1 + 12\mu^2\sigma^2 + 24\mu^2\sigma\delta_1 + 12\mu^2\delta_1^2 + 4\mu\sigma^3 + 12\mu\sigma^2\delta_1 + 12\mu\sigma\delta_1^2 + 4\mu\delta_1^3)^{1/2}$$

Analisis kestabilan untuk dua nilai eigen dapat diperoleh dari persamaan kuadrat $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, dengan syarat $\lambda_{12} < 0$ dan $\lambda_{13} < 0$. Kondisi ini dapat terjadi ketika $-\frac{b}{a} < 0$ dan $\frac{c}{a} < 0$ yang diperoleh dari penjumlahan serta perkalian akar-akar persamaan kuadrat.

$$\lambda_{12} + \lambda_{13} < 0$$

$$\lambda_{12} \cdot \lambda_{13} > 0 \tag{4.2}$$

dengan menggunakan rumus akar persamaan kuadrat akan diperoleh

$$\lambda_{12} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{4.3}$$

$$\lambda_{13} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{4.4}$$

dari persamaan diatas dapat diketahui:

$$a = \mu + \sigma + \delta_1$$

$$b = \Lambda\beta_1 - \Lambda\beta_1\rho_1$$

$$c = -(\mu + \sigma + \delta_1)(\Lambda\beta_1\rho_1 + \mu\rho_1 + \mu\rho_2 + \sigma\rho_1 +$$

$$\sigma\rho_2 - \Lambda\beta_1 + \mu^2 + \mu\sigma + \mu\delta_1)$$

sehingga

$$-\frac{b}{a} \Rightarrow -\frac{\Lambda\beta_1(1-\rho_1)}{\mu + \sigma + \delta_1} < 0$$

$$\Rightarrow \rho_1 < 1, \text{ dan}$$

$$\frac{c}{a} \Rightarrow -\frac{1}{\mu + \sigma + \delta_1} ((\mu + \sigma + \delta_1)(\Lambda\beta_1\rho_1 + \mu\rho_1 +$$

$$\mu\rho_2 + \sigma\rho_1 + \sigma\rho_2 - \Lambda\beta_1 + \mu^2 + \mu\sigma + \mu\delta_1)) < 0$$

$$\Rightarrow \frac{\Lambda\beta_1(1-\rho_1)}{(\mu + \rho_1 + \rho_2)(\mu + \sigma + \delta_1)} > 1$$

nilai eigen λ_{12} dan λ_{13} akan bernilai negatif jika

$$\text{dipenuhi syarat berikut } \frac{\Lambda\beta_1(1-\rho_1)}{(\mu + \rho_1 + \rho_2)(\mu + \sigma + \delta_1)} > 1$$

dan $\rho_1 < 1$

$$4. \lambda_{14} = -\frac{1}{\beta_1(\rho_1-1)(\mu + \sigma + \delta_1)} (\Lambda\beta_1\eta_2\rho_1 + \mu^2\beta_1\rho_1 - \mu^2\beta_2\rho_2 + \mu\eta_2\rho_1 + \mu\eta_2\rho_2 + \mu\sigma\beta_1\rho_1 - 2\mu\sigma\beta_2\rho_2 + \sigma\eta_2\rho_1 + \sigma\eta_2\rho_2 + \mu\beta_1\delta_1\rho_1 + \mu\beta_1\delta_3\rho_1 - 2\mu\beta_2\delta_1\rho_2 + \delta_1\eta_2\rho_1 + \delta_1\eta_2\rho_2 - \sigma^2\beta_2\rho_2 + \sigma\beta_1\delta_3\rho_1 - 2\sigma\beta_2\delta_1\rho_2 + \beta_1\delta_1\delta_3\rho_1 - \beta_2\delta_1^2\rho_2 - \Lambda\beta_1\eta_2 - \mu^2\beta_1 + \mu^2\beta_2 + \mu^2\eta_2 - \mu\sigma\beta_1 + 2\mu\sigma\beta_2 + \mu\sigma\eta_2 - \mu\beta_1\delta_1 - \mu\beta_1\delta_3 + 2\mu\beta_2\delta_1 + \mu\delta_1\eta_2 + \sigma^2\beta_2 - \sigma\beta_1\delta_3 + 2\sigma\beta_2\delta_1 - \beta_1\delta_1\delta_3 + \beta_2\delta_1^2), \text{ nilai eigen } \lambda_{14} \text{ akan bernilai negatif jika dipenuhi syarat berikut.}$$

$$\frac{\Lambda\beta_1\eta_2(1-\rho_1)}{(\mu + \sigma + \delta_1)((\mu + \sigma + \delta_1)(\beta_2(1-\rho_2) - \eta_2) + (\mu + \delta_3)\beta_1(1-\rho_1))} < 1$$

dan $\rho_1 < 1$

$$5. \lambda_{15} = -\mu, \text{ semua parameter diasumsikan bernilai positif, sehingga nilai eigen untuk } \lambda_{15} \text{ selalu bernilai negatif.}$$

$$6. \lambda_{16} = -\mu, \text{ semua parameter diasumsikan bernilai positif, sehingga nilai eigen untuk } \lambda_{16} \text{ selalu bernilai negatif.}$$

$$7. \lambda_{17} = -\mu, \text{ semua parameter diasumsikan bernilai positif, sehingga nilai eigen untuk } \lambda_{17} \text{ selalu bernilai negatif.}$$

Hasil ini menunjukkan bahwa titik kritis penyakit Campak akan stabil asimtotik jika syarat pada nilai eigen $\lambda_{12}, \lambda_{13}$ dan λ_{14} dipenuhi yaitu $\frac{\Lambda\beta_1(1-\rho_1)}{(\mu + \rho_1 + \rho_2)(\mu + \sigma + \delta_1)} > 1, \rho_1 < 1$, dan $\frac{\Lambda\beta_1\eta_2(1-\rho_1)}{(\mu + \sigma + \delta_1)((\mu + \sigma + \delta_1)(\beta_2(1-\rho_2) - \eta_2) + (\mu + \delta_3)\beta_1(1-\rho_1))} < 1.$

Selanjutnya akan ditunjukkan analisis kestabilan untuk titik kritis penyakit Covid dari sistem persamaan (4.1). Diperoleh Matriks Jacobian sebagai berikut:

$$J_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} & 0 & 0 & 0 \\ \rho_1 & \delta_1 & 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 \\ \rho_2 & 0 & \delta_3 & 0 & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 & 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

Dimana

$$a_{11} = \frac{(\rho_2-1)\Lambda\beta_2}{\mu + \delta_3}$$

$$a_{12} = -\frac{(\mu + \delta_3)(\rho_1-1)\beta_1}{(\rho_2-1)\beta_2}$$

$$a_{13} = -(\mu + \delta_3)$$

$$a_{22} = -\frac{1}{(\rho_2-1)(\mu + \delta_3)\beta_2} ((\rho_2-1)\Lambda\beta_2\eta_1 + (\mu + \delta_3)[(\rho_1-1)(\mu + \delta_3)\beta_1 - (\rho_2-1)(\mu + \sigma + \delta_1)\beta_2 - (\mu + \rho_1 + \rho_2)\eta_1])$$

$$a_{31} = -\frac{(\rho_2-1)\Lambda\beta_2 + (\mu + \rho_1 + \rho_2)(\mu + \delta_3)}{\mu + \delta_3}$$

$$a_{32} = -\frac{[(\rho_2-1)\Lambda\beta_2 + (\mu + \rho_1 + \rho_2)(\mu + \delta_3)]\eta_2}{(\rho_2-1)(\mu + \delta_3)\beta_2}$$

$$a_{42} = \frac{[(\rho_2-1)\Lambda\beta_2 + (\mu + \rho_1 + \rho_2)(\mu + \delta_3)](\eta_1 + \eta_2)}{(\rho_2-1)(\mu + \delta_3)\beta_2}$$

$$a_{44} = -(\mu + \sigma + \delta_2)$$

Sehingga untuk analisis stabilitas dapat diperoleh dengan cara menganalisis semua nilai eigen pada titik kritis penyakit Campak. Berikut ini 7 nilai eigen yang diperoleh.

$$1. \lambda_{21} = -\mu - \sigma - \delta_2, \text{ semua parameter diasumsikan bernilai positif, sehingga nilai eigen untuk } \lambda_{21} \text{ selalu bernilai negatif.}$$

$$2. \lambda_{22} = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu + \delta_3} (\Lambda\beta_2\rho_2 - \Lambda\beta_2 + (\Lambda^2\beta_2^2\rho_2^2 - 2\Lambda^2\beta_2^2\rho_2 + 4\Lambda\mu^2\beta_2\rho_2 + 8\Lambda\mu\beta_2\delta_3\rho_2 + 4\Lambda\beta_2\delta_3^2\rho_2 + 4\mu^3\rho_1 + 4\mu^3\rho_2 + 12\mu^2\delta_3\rho_1 + 12\mu^2\delta_3\rho_2 + 12\mu\delta_3^2\rho_1 + 12\mu\delta_3^2\rho_2 + 4\mu\delta_3^3\rho_1 + 4\mu\delta_3^3\rho_2 + \Lambda^2\beta_2^2 - 4\Lambda\mu^2\beta_2 -$$

$$8\Lambda\mu\beta_2\delta_3 - 4\Lambda\beta_2\delta_3^2 + 4\mu^4 + 12\mu^3\delta_3 + 12\mu^2\delta_3^2 + 4\mu\delta_3^3)^{1/2}$$

$$3. \lambda_{23} = \frac{1}{2\mu+\delta_3}(\Lambda\beta_2\rho_2 - \Lambda\beta_2 - (\Lambda^2\beta_2^2\rho_2^2 - 2\Lambda^2\beta_2^2\rho_2 + 4\Lambda\mu^2\beta_2\rho_2 + 8\Lambda\mu\beta_2\delta_3\rho_2 + 4\Lambda\beta_2\delta_3^2\rho_2 + 4\mu^3\rho_1 + 4\mu^3\rho_2 + 12\mu^2\delta_3\rho_1 + 12\mu^2\delta_3\rho_2 + 12\mu\delta_3^2\rho_1 + 12\mu\delta_3^2\rho_2 + 4\mu\delta_3^3\rho_1 + 4\mu\delta_3^3\rho_2 + \Lambda^2\beta_2^2 - 4\Lambda\mu^2\beta_2 - 8\Lambda\mu\beta_2\delta_3 - 4\Lambda\beta_2\delta_3^2 + 4\mu^4 + 12\mu^3\delta_3 + 12\mu^2\delta_3^2 + 4\mu\delta_3^3)^{1/2})$$

Analisis kestabilan untuk dua nilai eigen dapat diperoleh dari persamaan kuadrat $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, dengan syarat $\lambda_{22} < 0$ dan $\lambda_{23} < 0$. Kondisi ini dapat terjadi ketika $-\frac{b}{a} < 0$ dan $\frac{c}{a} < 0$ yang diperoleh dari penjumlahan serta perkalian akar-akar persamaan kuadrat.

$$\lambda_{22} + \lambda_{23} < 0$$

$$\lambda_{22} \cdot \lambda_{23} > 0$$

dengan menggunakan rumus akar persamaan kuadrat akan diperoleh

$$\lambda_{22} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (5)$$

$$\lambda_{23} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (6)$$

dari persamaan diatas dapat diketahui:

$$a = \mu + \delta_3$$

$$b = \Lambda\beta_2 - \Lambda\beta_2\rho_2$$

$$c = -(\mu + \delta_3)(\Lambda\beta_2\rho_2 + \mu\rho_1 + \mu\rho_2 + \delta_3\rho_1 + \delta_3\rho_2 - \Lambda\beta_2 + \mu^2 + \mu\delta_3)$$

sehingga

$$-\frac{b}{a} \Rightarrow -\frac{\Lambda\beta_2(1-\rho_2)}{\mu+\delta_3} < 0$$

$$\Rightarrow \rho_2 < 1, \text{ dan}$$

$$\frac{c}{a} \Rightarrow -\frac{1}{\mu+\delta_3}((\mu + \delta_3)(\Lambda\beta_2\rho_2 + \mu\rho_1 + \mu\rho_2 + \delta_3\rho_1 + \delta_3\rho_2 - \Lambda\beta_2 + \mu^2 + \mu\delta_3)) < 0$$

$$\Rightarrow \frac{\Lambda\beta_2(1-\rho_2)}{(\mu+\rho_1+\rho_2)(\mu+\delta_3)} > 1$$

nilai eigen λ_{22} dan λ_{23} akan bernilai negatif jika dipenuhi syarat berikut $\frac{\Lambda\beta_2(1-\rho_2)}{(\mu+\rho_1+\rho_2)(\mu+\delta_3)} > 1$ dan $\rho_2 < 1$

$$4. \lambda_{24} = -\frac{1}{\beta_2(\rho_2-1)(\mu+\delta_3)}(\Lambda\beta_2\eta_1\rho_2 - \mu^2\beta_1\rho_1 + \mu^2\beta_2\rho_2 + \mu\eta_1\rho_1 + \mu\eta_1\rho_2 + \mu\sigma\beta_2\rho_2 - 2\mu\beta_1\delta_3\rho_1 + \mu\beta_2\delta_1\rho_2 + \mu\beta_2\delta_3\rho_2 + \delta_3\eta_1\rho_1 + \delta_3\eta_1\rho_2 + \sigma\beta_2\delta_3\rho_2 - \beta_1\delta_3^2\rho_1 + \beta_2\delta_1\delta_3\rho_2 - \Lambda\beta_2\eta_1 + \mu^2\beta_1 - \mu^2\beta_2 + \mu^2\eta_1 - \mu\sigma\beta_2 + 2\mu\beta_1\delta_3 - \mu\beta_2\delta_1 - \mu\beta_2\delta_3 + \mu\delta_3\eta_1 - \sigma\beta_2\delta_3 + \beta_1\delta_3^2 - \beta_2\delta_1\delta_3), \text{ nilai } \lambda_{24} \text{ akan bernilai negatif jika dipenuhi syarat berikut.}$$

$$\frac{\Lambda\beta_2\eta_1(1-\rho_2)}{(\mu+\delta_3)(\beta_1(1-\rho_1)(\mu+\delta_3)+\eta_1(\mu+\rho_1+\rho_2)-\beta_2(1-\rho_2)(\mu+\sigma+\delta_1))} < 1, \text{ dan } \rho_2 < 1$$

$$5. \lambda_{25} = -\mu, \text{ semua parameter diasumsikan bernilai positif, sehingga nilai eigen untuk } \lambda_{25} \text{ selalu bernilai negatif.}$$

$$6. \lambda_{26} = -\mu, \text{ semua parameter diasumsikan bernilai positif, sehingga nilai eigen untuk } \lambda_{26} \text{ selalu bernilai negatif.}$$

$$7. \lambda_{27} = -\mu, \text{ semua parameter diasumsikan bernilai positif, sehingga nilai eigen untuk } \lambda_{27} \text{ selalu bernilai negatif.}$$

Hasil ini menunjukkan bahwa titik kritis penyakit campak akan stabil asimptotik jika syarat pada nilai eigen $\lambda_{22}, \lambda_{23}$ dan λ_{24} dipenuhi yaitu

$$\frac{\Lambda\beta_2(1-\rho_2)}{(\mu+\rho_1+\rho_2)(\mu+\delta_3)} > 1, \quad \rho_2 < 1, \quad \text{dan} \quad \frac{\Lambda\beta_2\eta_1(1-\rho_2)}{(\mu+\delta_3)(\beta_1(1-\rho_1)(\mu+\delta_3)+\eta_1(\mu+\rho_1+\rho_2)-\beta_2(1-\rho_2)(\mu+\sigma+\delta_1))} < 1.$$

Bilangan reproduksi dasar (\mathcal{R}_0)

Menentukan bilangan reproduksi dasar pada persamaan (4.1), yaitu dengan mencari nilai eigen optimum yang diperoleh dari *Next Generation Matrix*. Pada matriks, terdapat matriks F yang terdiri dari \mathcal{F}_i yang menunjukkan rata-rata jumlah individu baru yang terinfeksi, terdiri dari $I_K', I_C',$ dan I_{KC}' pada (4.1), sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= (1 - \rho_1)\beta_1 S I_K - \eta_1 I_K I_C \\ \mathcal{F}_2 &= (1 - \rho_2)\beta_2 S I_C - \eta_2 I_K I_C \\ \mathcal{F}_3 &= \eta_1 I_K I_C + \eta_2 I_K I_C \end{aligned} \quad (4.5)$$

Matriks Jacobian dari F dapat ditulis sebagai berikut:

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial I_K} & \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial I_C} & \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial I_{KC}} \\ \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial I_K} & \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial I_C} & \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial I_{KC}} \\ \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial I_K} & \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial I_C} & \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial I_{KC}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \rho_1)\beta_1 S - \eta_1 I_C & -\eta_1 I_K & 0 \\ -\eta_2 I_C & (1 - \rho_2)\beta_2 S - \eta_2 I_K & 0 \\ \eta_1 I_C + \eta_2 I_C & \eta_1 I_K + \eta_2 I_K & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, terdapat matriks V yang terdiri dari \mathcal{V}_j yang menunjukkan rata-rata penurunan jumlah individu yang terinfeksi, terdiri dari $I_K', I_C',$ dan I_{KC}' pada (4.1), sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 &= -\delta_1 I_K - \sigma I_K - \mu I_K \\ \mathcal{V}_2 &= -\delta_3 I_C - \mu I_C \\ \mathcal{V}_3 &= -\delta_2 I_{KC} - \sigma I_{KC} - \mu I_{KC} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Matriks Jacobian dari V dapat ditulis sebagai berikut:

$$V = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial I_K} & \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial I_C} & \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial I_{KC}} \\ \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial I_K} & \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial I_C} & \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial I_{KC}} \\ \frac{\partial \mathcal{V}_3}{\partial I_K} & \frac{\partial \mathcal{V}_3}{\partial I_C} & \frac{\partial \mathcal{V}_3}{\partial I_{KC}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\delta_1 - \sigma - \mu & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_3 - \mu & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_2 - \sigma - \mu \end{bmatrix}$$

Sehingga dapat diperoleh,

$$K = -FV^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{(\rho_1 - 1)\beta_1 S + \eta_1 I_C}{\delta_1 + \sigma + \mu} & -\frac{\eta_1 I_K}{\delta_3 + \mu} & 0 \\ -\frac{\eta_2 I_C}{\delta_1 + \sigma + \mu} & -\frac{(\rho_2 - 1)\beta_2 S + \eta_2 I_K}{\delta_3 + \mu} & 0 \\ -\frac{-\eta_1 I_C - \eta_2 I_C}{\delta_1 + \sigma + \mu} & -\frac{-\eta_1 I_K - \eta_2 I_K}{\delta_3 + \mu} & 0 \end{bmatrix}$$

Dalam artikel ini, perhitungan bilangan reproduksi dasar hanya akan dilakukan pada kasus titik kritis bebas penyakit. Substitusikan titik kritis bebas penyakit pada matriks K , sehingga diperoleh

$$K = \begin{bmatrix} -\frac{(\rho_1 - 1)\Lambda\beta_1}{(\mu + \rho_1 + \rho_2)(\delta_1 + \sigma + \mu)} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(\rho_2 - 1)\Lambda\beta_2}{(\mu + \rho_1 + \rho_2)(\delta_3 + \mu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, menentukan nilai eigen dari matriks K untuk bilangan reproduksi dasar, diperoleh

$$\lambda_{31} = \frac{\Lambda\beta_1(1 - \rho_1)}{(\mu + \rho_1 + \rho_2)(\delta_1 + \sigma + \mu)}$$

$$\lambda_{32} = \frac{\Lambda\beta_2(1 - \rho_2)}{(\mu + \rho_1 + \rho_2)(\delta_3 + \mu)}$$

$$\lambda_{33} = 0$$

λ_{31} dan λ_{32} merupakan nilai eigen paling dominan sehingga diperoleh bilangan reproduksi dasar $\mathcal{R}_{01} = \lambda_{31}$ sebagai bilangan reproduksi dasar untuk penyakit Campak, dan $\mathcal{R}_{02} = \lambda_{32}$ sebagai bilangan reproduksi dasar penyakit Covid-19.

Pada saat $\mathcal{R}_{01} < 1$ dan $\mathcal{R}_{02} < 1$ maka titik kritis bebas penyakit akan stabil, sehingga untuk suatu periode waktu tertentu baik penyakit Campak maupun penyakit Covid-19 akan hilang dari populasi. Pada saat $\mathcal{R}_{01} > 1$ dan $\mathcal{R}_{02} < 1$ maka titik kritis bebas penyakit menjadi tidak stabil, sehingga akan ditemukan penyakit Campak pada satu populasi sementara penyakit Covid-19 akan hilang dari populasi tersebut. Sementara ketika $\mathcal{R}_{01} < 1$ dan $\mathcal{R}_{02} > 1$ juga akan mengakibatkan titik kritis bebas penyakit menjadi tidak stabil. Kondisi ini berarti bahwa penyakit Covid-19 akan ditemukan pada suatu populasi sementara penyakit Campak akan hilang dari populasi.

Analisis Bilangan Reproduksi Dasar (\mathcal{R}_0)

Bilangan reproduksi dasar merupakan nilai eigen yang berasal dari kestabilan titik kritis. Dalam kasus ini kestabilan titik Kritis yang diambil adalah titik kritis bebas penyakit, dengan mengambil nilai eigen dari kestabilan titik kritis bebas penyakit, yaitu λ_3 dan λ_4 . Pada saat $\mathcal{R}_{01} < 1$ dan $\mathcal{R}_{02} < 1$ maka titik kritis bebas penyakit akan stabil, sehingga untuk periode waktu tertentu kedua penyakit tersebut akan hilang dari populasi. Pada saat $\mathcal{R}_{01} > 1$ dan $\mathcal{R}_{02} < 1$ maka titik kritis bebas penyakit tidak akan

stabil, sehingga untuk penyakit Campak akan berada di populasi, begitupula $\mathcal{R}_{01} < 1$ dan $\mathcal{R}_{02} > 1$ mengakibatkan penyakit Covid-19 akan berada di populasi. Pada saat $\mathcal{R}_{01} > 1$ dan $\mathcal{R}_{02} > 1$ akan mengakibatkan ko-infeksi penyakit antara Campak dan Covid-19 ada didalam populasi.

Bukti:

$$\lambda_3 = -\frac{(\mu + \rho_1 + \rho_2)(\mu + \delta_3) + \Lambda\beta_2\rho_2 - \Lambda\beta_2}{\mu + \rho_1 + \rho_2} < 0$$

Sehingga, diperoleh

$$\lambda_3 = -\frac{(\rho_2 - 1)\Lambda\beta_2}{(\mu + \rho_1 + \rho_2)(\delta_3 + \mu)} < 1$$

Hasil dari $\lambda_3 = \mathcal{R}_{02}$, maka $\mathcal{R}_{02} < 1$.

Selanjutnya, untuk λ_4 diperoleh:

$$\lambda_4 = -\frac{(\mu + \rho_1 + \rho_2)(\mu + \sigma + \delta_1) + \Lambda\beta_1\rho_1 - \Lambda\beta_1}{\mu + \rho_1 + \rho_2} < 0$$

Sehingga, diperoleh

$$\lambda_4 = -\frac{(\rho_1 - 1)\Lambda\beta_1}{(\mu + \rho_1 + \rho_2)(\delta_1 + \sigma + \mu)} < 1$$

Hasil dari $\lambda_4 = \mathcal{R}_{01}$, maka $\mathcal{R}_{01} < 1$.

Karena $\mathcal{R}_{01} < 1$ dan $\mathcal{R}_{02} < 1$, maka titik kritis bebas penyakit akan stabil, sehingga untuk periode waktu tertentu penyakit Campak dan Covid-19 akan hilang dari populasi.

Simulasi Numerik

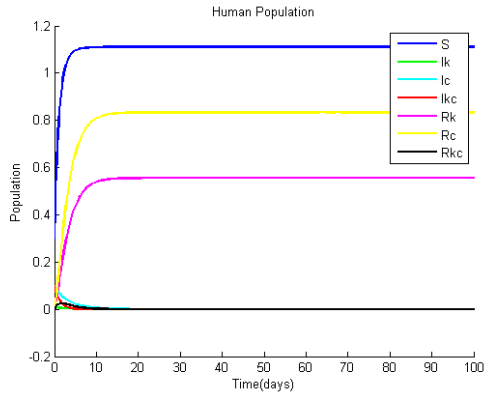
Simulasi numerik dari model epidemik ko-infeksi penyakit Campak dan Covid-19 diperoleh dengan menggunakan ODE45 dan program MATLAB R2012b. Nilai parameter diperoleh dari beberapa referensi serta asumsi yang di sajikan pada tabel berikut.

Tabel 1. Parameter dan nilai yang digunakan

Parameter	Nilai	Sumber
Λ	1	Asumsi
ρ_1	0,2	(Aziziah, 2017)
ρ_2	0,3	Asumsi
β_1	0,4	(Aziziah, 2017)
β_2	0,21	(Yulida dan Karim, 2020)
η_1	1/7	Asumsi
η_2	1/5	Asumsi
δ_1	0,2	Asumsi
δ_2	0,4	Asumsi
δ_3	0,0356	(Yulida dan Karim, 2020)
μ	0,4	Asumsi

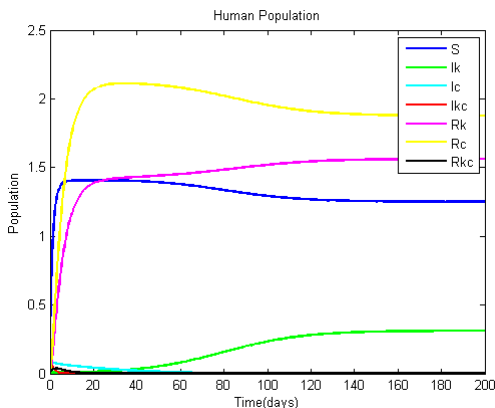
σ	0,00002	Asumsi
----------	---------	--------

Dengan nilai awal $S(0) = 0,3; I_K(0) = 0,01; I_C(0) = 0,1; I_{KC}(0) = 0,1; R_K(0) = 0; R_C(0) = 0; R_{KC}(0) = 0$. Simulasi dilakukan dalam waktu 200 hari. Pada penelitian ini telah dilakukan analisis sensitivitas yang menghasilkan parameter dengan sensitivitas tertinggi yaitu parameter μ .



Gambar 3. Simulasi untuk titik kritis bebas penyakit pada saat $\mathcal{R}_{0_1} = 0,5926$ dan $\mathcal{R}_{0_2} = 0,3750$

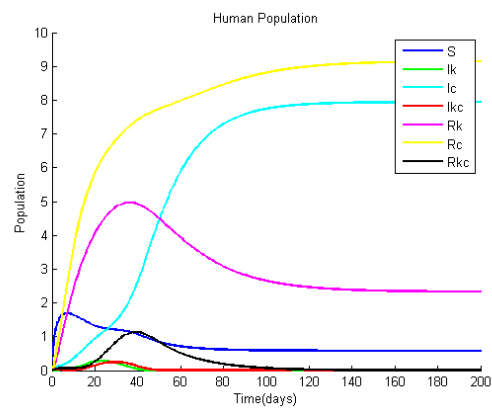
Gambar 3 menunjukkan bahwa pada hari ke-10 dan seterusnya, populasi manusia yang terinfeksi penyakit Campak dan Covid-19 akan sembuh sehingga tidak ditemukan lagi kedua penyakit pada populasi manusia. Hasil ini menunjukkan eksistensi titik kritis bebas penyakit yang stabil. Semua sub-populasi akan menuju ke titik nol kecuali sub-populasi manusia rentan, sub-populasi sembuh dari penyakit Campak dan sub-populasi sembuh dari Covid-19. Selanjutnya dengan memodifikasi nilai $\mu = 0,2$. Akan menghasilkan simulasi seperti gambar 4.



Gambar 4. Simulasi untuk titik kritis penyakit Campak pada saat $\mathcal{R}_{0_1} = 1,1428$ dan $\mathcal{R}_{0_2} = 0,8913$

Gambar 4 menunjukkan bahwa pada hari ke-15 dan seterusnya, populasi manusia yang terinfeksi

penyakit Campak akan tetap ditemukan di dalam populasi sedangkan populasi manusia yang terinfeksi penyakit Covid-19 akan sembuh atau dengan kata lain penyakit Covid-19 akan hilang dari populasi manusia. Hasil ini menunjukkan eksistensi titik kritis penyakit Campak yang stabil. Semua sub-populasi akan menuju ke titik nol kecuali sub-populasi manusia rentan, sub-populasi manusia yang terinfeksi Campak dan sub-populasi manusia yang telah sembuh dari Campak. Selanjutnya dengan memodifikasi nilai $\mu = 0,05; \rho_1 = 0,42$ dan $\rho_2 = 0,52$ akan menghasilkan simulasi seperti gambar 5.



Gambar 5. Simulasi untuk titik kritis penyakit Covid-19 pada saat $\mathcal{R}_{0_1} = 0,9373$ dan $\mathcal{R}_{0_2} = 1,1895$

Gambar 5 menunjukkan bahwa pada hari ke-40 dan seterusnya, populasi manusia yang terinfeksi penyakit Campak akan sembuh, artinya penyakit Campak tidak akan ditemukan lagi pada populasi. Sementara, populasi manusia yang terinfeksi Covid-19 akan tetap ditemukan di dalam populasi. Hasil ini menunjukkan eksistensi titik kritis Covid-19 yang stabil. Semua sub-populasi akan menuju ke titik nol kecuali sub-populasi manusia rentan, sub-populasi manusia yang terinfeksi Covid-19 dan sub-populasi manusia yang telah sembuh dari Covid-19.

Hasil yang diperoleh dari penelitian ini merupakan bentuk penyempurnaan dari penelitian yang telah dilakukan oleh (Artiono dkk, 2020). Penelitian ini telah menggunakan dua jenis penyakit untuk membangun model matematika yaitu penyakit Campak dan Covid-19, menghasilkan empat titik kesetimbangan dan syarat-syarat kestabilannya, serta dua bilangan reproduksi dasar

yang menjadi indikator eksistensi penyakit dalam suatu populasi.

PENUTUP

SIMPULAN

Penelitian ini telah menghasilkan model matematika ko-infeksi penyakit Campak dan Covid-19 yang dibangun berdasarkan karakteristik dari kedua penyakit dan dikaji berdasarkan perubahan waktu. Terdapat empat titik kritis yang dihasilkan dari model, yaitu titik kritis bebas penyakit, titik kritis penyakit Campak, titik kritis penyakit Covid-19, dan titik kritis ko-infeksi Campak dan Covid-19. Masing-masing titik kritis memiliki syarat kestabilan yang harus dipenuhi agar masing-masing titik kritis tersebut dapat eksis. Terdapat dua bilangan reproduksi dasar yang diperoleh dari *Next Generation Matrix*, yaitu $\mathcal{R}_{0_1} = \frac{\Delta\beta_1(1-\rho_1)}{(\mu+\rho_1+\rho_2)(\delta_1+\sigma+\mu)}$ sebagai bilangan reproduksi dasar untuk penyakit Campak, dan $\mathcal{R}_{0_2} = \frac{\Delta\beta_2(1-\rho_2)}{(\mu+\rho_1+\rho_2)(\delta_3+\mu)}$ sebagai bilangan reproduksi dasar penyakit Covid-19. Pada saat $\mathcal{R}_{0_1} < 1$ dan $\mathcal{R}_{0_2} < 1$ maka titik kritis bebas penyakit akan stabil, sehingga untuk periode waktu tertentu kedua penyakit akan hilang dari populasi. Sementara, pada saat $\mathcal{R}_{0_1} > 1$ dan $\mathcal{R}_{0_2} < 1$ maka titik kritis bebas penyakit menjadi tidak stabil, artinya pada suatu populasi akan ditemukan seseorang yang terinfeksi penyakit Campak. Demikian pula ketika $\mathcal{R}_{0_1} < 1$ dan $\mathcal{R}_{0_2} > 1$ maka akan ditemukan seseorang yang terinfeksi penyakit Covid-19.

SARAN

Untuk penelitian selanjutnya disarankan lebih memperhitungkan adanya penyakit bawaan yang dapat mengakibatkan kematian pada orang yang terinfeksi Covid-19, serta mempertimbangkan aspek umur pada setiap individu.

DAFTAR PUSTAKA

- Almuttaqi, A. I. 2020. *Kekacauan Respons terhadap COVID-19 di Indonesia*. The Insigjts, 13.
- Anton, H., dan Rorres, C. (2004). *Aljabar Linier Elementer: versi aplikasi. Edisi 8. Jilid I. Terjemahan Refina Indriasari dan Irzam Harmein*. Jakarta: Erlangga.
- Artiono, R., Prawoto, B. P., Hidayat, D., Yuniarti, D. N., & Astuti, Y. P. 2020. *The dynamics of COVID-19: the effect of large-scale social restrictions*. Commun. Math. Biol. Neurosci., 2020, Article-ID.
- Aziziah, A. N. 2017. *Model Sir Pada Epidemi Penyakit Campak Berdasarkan Umur Dengan Pengaruh Imunisasi*. Mathunesa: Jurnal Ilmiah Matematika, 3(6).
- Bai, Y., Yao, L., Wei, T., Tian, F., Jin, D. Y., Chen, L., & Wang, M. 2020. *Presumed asymptomatic carrier transmission of COVID-19*. Jama, 323(14), 1406-1407.
- Buletin Surveilans Pd3i & Imunisasi (2021). Diakses pada 09 Maret 2021, https://www.who.int/docs/default-source/searo/indonesia/sit-rep/buletin-surveilans-pd3i-dan-imunisasi-edisi-2-2020.pdf?sfvrsn=2a76da54_2_2020.
- Clark, D. N. 1999. *Dictionary of Analysis, Calculus and Differential Equation*. New York: Crc Press LLC
- Diekmann, O., Heesterbeek, J. A. P., Roberts, M. G.. 2009. "The Construction of Generation Matrices for Compartmental Epidemic Models." *Journal of The Royal Society*, 873-885.
- Djalante, R., Lassa, J., Setiamarga, D., Mahfud, C., Sudjatma, A., Indrawan, M., ... & Gunawan, L. A. 2020. *Review and analysis of current responses to COVID-19 in Indonesia: Period of January to March 2020*. Progress in Disaster Science, 100091.
- Edwards, C. H., Penney, D. E., & Calvis, D. 2000. *Elementary differential equations* (Vol. 6). Prentice Hall.
- Fiebelkorn, A. P., Seward, J. F., & Orenstein, W. A. 2014. *A global perspective of vaccination of healthcare personnel against measles: systematic review*. Vaccine, 32(38), 4823-4839.
- Finizio, N., & Ladas, G. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Terjemahan Widiarti Santoso. Jakarta: Erlangga.
- Gugus Tugas Percepatan penanganan Covid-19. 2020. <https://www.covid19.go.id/situasi-viruscorona/> (diakses pada 27 November 2020).
- Goodall, E. W. 1931. *Incubation period of measles*. British Medical Journal, 1(3653), 73.
- Hanratty, B., Holt, T., Duffell, E., Patterson, W., Ramsay, M., White, J. M., ... & Litton, P. 2000. *UK measles outbreak in non-immune anthroposophic communities: the implications for the elimination of measles from Europe*. Epidemiology & Infection, 125(2), 377-383.

- Heinzerling, L., Künzi, V., Oberholzer, P. A., Kündig, T., Naim, H., & Dummer, R. 2005. *Oncolytic measles virus in cutaneous T-cell lymphomas mounts antitumor immune responses in vivo and targets interferon-resistant tumor cells*. *Blood*, 106(7), 2287-2294.
- Jin, X., Lian, J. S., Hu, J. H., Gao, J., Zheng, L., Zhang, Y. M., ... & Yu, G. D. 2020. *Epidemiological, clinical and virological characteristics of 74 cases of coronavirus-infected disease 2019 (COVID-19) with gastrointestinal symptoms*. *Gut*, 69(6), 1002-1009.
- Kemendes RI. 2017a. *Peraturan Menteri Kesehatan Republik Indonesia nomor 12 tentang penyelenggara imunisasi*. Jakarta: Kementerian Kesehatan RI.
- Kemendes RI. 2018. *Situasi Campak dan Rubella di Indonesia*. Jakarta: Kementerian Kesehatan RI.
- Kemendes RI. 2018. *APA YANG HARUS DILAKUKAN MASYARAKAT UNTUK CEGAH PENULARAN COVID-19?*. Jakarta: Kementerian Kesehatan RI.
- Kemendes RI. 2019. *Profil Kesehatan Indonesia Tahun 2019*. Jakarta: Kementerian Kesehatan RI.
- Kermack, W. O., dan McKendrick, A. G. 1927. *A contribution to the mathematical theory of epidemics. Proceedings of the royal society of london. Series A, Containing papers of a mathematical and physical character*, 115(772), 700-721.
- Novel, C. P. E. R. E. 2020. *The epidemiological characteristics of an outbreak of 2019 novel coronavirus diseases (COVID-19) in China*. *Zhonghua liu xing bing xue za zhi= Zhonghua liuxingbingxue zazhi*, 41(2), 145.
- Okosun, K. O., & Makinde, O. D. (2014). *A co-infection model of malaria and cholera diseases with optimal control*. *Mathematical biosciences*, 258, 19-32.
- Olsder, G. J., & van der Woude, J. W. 2003. *Mathematical Systems Theory*. Edisi 2. Netherlands: Delft University of Technology.
- Parker Fiebelkorn, A., Redd, S. B., Gallagher, K., Rota, P. A., Rota, J., Bellini, W., & Seward, J. 2010. *Measles in the United States during the postelimination era*. *The Journal of infectious diseases*, 202(10), 1520-1528.
- Ross, C. C. 2004. *Differential Equation*. Second Edition. New York: Springer
- Rothe, C., Schunk, M., Sothmann, P., Bretzel, G., Froeschl, G., Wallrauch, C., ... & Seilmaier, M. 2020. *Transmission of 2019-nCoV infection from an asymptomatic contact in Germany*. *New England: Journal of Medicine*, 382(10), 970-971.
- Setiawaty, V., Puspaningrum, M. A., Nugraha, A. A., & Wahyono, D. J. 2018. *Deteksi Virus Penyebab Infeksi Saluran Pernafasan Akut di Rumah Sakit (Studi Pendahuluan dengan Uji Fast-Track® Diagnostik)*. *Media Penelitian dan Pengembangan Kesehatan*, 28(4), 257-262.
- Sihotang, W. D., Simbolon, C. C., Hartiny, J., Tindaon, D., & Sinaga, L. P. 2019. *Analisis Kestabilan Model SEIR Penyebaran Penyakit Campak dengan Pengaruh Imunisasi dan Vaksin MR*. *Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi*, 16(1), 107-113.
- Strebel, P. M., Papania, M. J., Fiebelkorn, A. P., & Halsey, N. A. 2012. *Measles vaccine*. *Vaccines*, 6, 352-387.
- Tosepu, R., Gunawan, J., Effendy, D. S., Lestari, H., Bahar, H., & Asfian, P. 2020. *Correlation between weather and Covid-19 pandemic in Jakarta, Indonesia*. *Science of The Total Environment*, 138436.
- Van den Driessche, P. 2017. *Reproduction numbers of infectious disease models*. *Infectious Disease Modelling*, 2(3), 288-303.
- Wang, W., Tang, J., dan Wei, F. 2020. *Updated understanding of the outbreak of 2019 novel coronavirus (2019-nCoV) in Wuhan, China*. *Journal of medical virology*, 92(4), 441-447.
- WHO. 2020. *Coronavirus*. di https://www.who.int/health-topics/coronavirus#tab=tab_1 (diakses pada 16 November 2020).
- WHO. 2020. *WHO Coronavirus Disease (COVID-19) Dashboard*. di https://covid19.who.int/?gclid=EAIaIQobChMI25S-2LWY7QIVRDVYCh2QWgCvEAAYASAAEgLW_W_D_BwE (diakses pada 22 November 2020).
- Yang, Z., Zeng, Z., Wang, K., Wong, S. S., Liang, W., Zanin, M., ... & Liang, J. 2020. *Modified SEIR and AI prediction of the epidemics trend of COVID-19 in China under public health interventions*. *Journal of Thoracic Disease*, 12(3), 165.
- Yulida, Y., dan Karim, M. A. 2020. *Pemodelan Matematika Penyebaran COVID-19 di Provinsi Kalimantan Selatan*. *Media Bina Ilmiah*, 14(10), 3257-3264