MATH*unesa*
Jurnal Ilmiah Matematika ***Volume 09 No 02***
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115 ***Tahun 2021***

BILANGAN KROMATIK MODULAR PADA BEBERAPA SUBKELAS GRAF

Fitri Aziza Kusumaningrum
Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : fitri.17030214009@mhs.unesa.ac.id

Budi Rahadjeng
Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : budirahadjeng@unesa.ac.id

Abstrak

Misalkan G sebuah graf, pewarnaan-k modular, $k \geq 2$ pada graf G tanpa titik terisolasi adalah suatu pewarnaan titik-titik pada graf G dengan elemen-elemen dalam himpunan bilangan bulat modulo k, $\mathbb{Z}_k$ yang memenuhi sifat untuk setiap dua titik yang bertetangga di G, jumlah warna $\sigma(v)$ dari tetangga-tetangga mereka berbeda dalam $\mathbb{Z}_k$. Bilangan kromatik modular $mc(G)$ pada G adalah bilangan bulat k terkecil dimana ada pewarnaan-k modular pada graf G. Pada artikel ini dijelaskan bilangan kromatik modular pada graf Bintang (S_n), graf Ulat ($C_{(m;n_1,n_2,\dots,n_m)}$), graf Kipas ($F_n$), graf Helm ($H_n$) dan graf Triangular Book (Bt_n).

Kata Kunci: *Pewarnaan modular, Bilangan kromatik modular*

Abstract

Let G be a graph, modular k-coloring, $k \geq 2$ on graph G without isolated vertex is a vertex coloring on graph G with elements in the set of integers modulo k, $\mathbb{Z}_k$ satisfying the properties for every two neighboring vertex in G, the number of colors $\sigma(v)$ from their different neigbors in $\mathbb{Z}_k$. The modular chromatic number $mc(G)$ in G is the minimum k integer where there is modular k-coloring on graph G. In this article describes modular chromatic numbers on Star Graph (S_n), Caterpillar Graph ($C_{(m;n_1,n_2,\dots,n_m)}$), Fan Graph ($F_n$), Helm Graph ($H_n$) and Triangular Book Graph (Bt_n).

Keywords: *Modular coloring, Modular chromatic number*

PENDAHULUAN

Matematika merupakan cabang ilmu yang perkembangannya sangat pesat dan paling banyak diterapkan dalam kehidupan manusia sehari-hari. Salah satu cabang ilmu matematika yang berkembang secara pesat adalah teori graf. Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh ilmuwan matematika yang bernama Leonhard Euler pada tahun 1736, dengan menerapkannya dalam pemecahan masalah pada jembatan Konigsberg yaitu mungkin tidaknya melewati tujuh jembatan yang ada dengan setiap jembatan hanya dilewati tepat satu kali. Salah satu topik yang ada pada teori graf adalah pewarnaan. Pewarnaan graf merupakan topik yang banyak diminati karena penerapannya yang luas dalam berbagai bidang. Terdapat 3 pewarnaan pada graf yaitu pewarnaan titik, pewarnaan sisi, dan pewarnaan bidang. Beberapa penerapan pewarnaan graf yaitu pada penentuan frekuensi radio, penjadwalan, pembagian tugas, penempatan bahan kimia secara efisien, desain protokol jaringan, dan lain sebagainya (Budayasa, 2007).

Dalam pewarnaan graf, pewarnaan titik merupakan penelitian yang banyak mendapat perhatian oleh ahli matematika. Salah satu kajian dalam pewarnaan titik adalah pewarnaan modular yang pertama kali diperkenalkan oleh Futaba Okamoto, Ebrahim Salehi, dan Ping Zhang pada tahun 2010. Dalam artikel tersebut, Futaba dkk. mengkaji permasalahan papan main dam. Dari permasalahan tersebut dilakukan pengamatan pada persegi sebuah papan main dam yang berukuran $m \times n$ (m baris dan n kolom) dimana $mn \geq 2$, yang diberi warna hitam dan merah secara bergantian.

Dua persegi dikatakan bertetangga jika kedua persegi tersebut berada pada baris atau kolom yang sama dan tidak ada persegi lain diantara keduanya, sehingga setiap dua persegi yang bertetangga memiliki warna yang berbeda. Permasalahan tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan pewarnaan modular pada graf G. Dalam artikel yang sama, dikaji juga bilangan kromatik modular pada graf siklus, graf pohon, graf roda, graf multi partit, join dari graf lintasan dan graf lengkap berorde 2 (Okamoto, dkk. 2010). Selain itu terdapat beberapa artikel terkait dengan bilangan kromatik modular diantaranya bilangan kromatik modular pada graf pohon dan graf ulat (Okamoto, dkk. 2009). Artikel mengenai bilangan kromatik modular pada graf kipas, graf helm, graf persahabatan, dan graf gear (Nicholas & Sanma, 2017). Artikel mengenai bilangan kromatik modular pada graf sikel, graf gear, graf lintasan dan graf persahabatan (Ajiji & Rahadjeng, 2020). Pada penelitian ini dijelaskan tentang bilangan kromatik modular pada graf Bintang (S_n), graf Ulat ($C_{(m;n_1,n_2,\dots,n_m)}$), graf Kipas ($F_n$), graf Helm ($H_n$) dan graf Triangular Book (Bt_n).

KAJIAN TEORI

Definisi 3.1

Sebuah graf $\boldsymbol{G}$ berisikan dua himpunan yaitu himpunan titik $\boldsymbol{V}$ dan himpunan sisi $\boldsymbol{E}$, dapat dituliskan $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$. Himpunan titik pada graf $\boldsymbol{G}$ disebut $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{G})$ dan himpunan sisi pada graf $\boldsymbol{G}$ disebut $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{G})$. Jika $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{uv}$, maka sisi $\boldsymbol{e}$ menghubungkan $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$, sedemikian hingga jika $\boldsymbol{uv}$ adalah sebuah sisi pada graf $\boldsymbol{G}$, maka $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ adalah titik yang bertetangga.

(Budayasa, 2007)

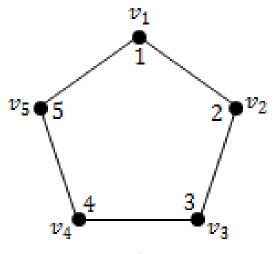
Definisi 3.2

Misal $\boldsymbol{G}$ graf. Pewarnaan-$\boldsymbol{k}$ titik sejati dari $\boldsymbol{G}$ adalah pewarnaan semua titik $\boldsymbol{G}$ dengan menggunakan $\boldsymbol{k}$ warna sehingga dua titik $\boldsymbol{G}$ yang bertetangga mendapat warna yang berbeda. Pewarnaan titik sejati dapat dianggap sebagai fungsi $\boldsymbol{c}: \boldsymbol{V}(\boldsymbol{G}) \to \boldsymbol{N}$ sehingga $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{u}) \neq \boldsymbol{c}(\boldsymbol{v})$ jika $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ bertetangga di graf $\boldsymbol{G}$. Jika setiap warna yang digunakan adalah satu dari $\boldsymbol{k}$ warna yang diberikan, maka pewarnaan tersebut adalah pewarnaan-$\boldsymbol{k}$. Pewarnaan-$\boldsymbol{k}$ pada graf $\boldsymbol{G}$ dapat ditunjukkan dengan memberi label pada setiap titik graf $\boldsymbol{G}$ dengan warna $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \dots, \boldsymbol{k}$. Warna yang digunakan biasanya berupa bilangan bulat positif.

(Budayasa, 2007)

Contoh 3.2

Berikut diberikan contoh pada Gambar 1 merupakan pewarnaan-5 pada graf $\boldsymbol{G}$ dimana titik yang bertetangga memiliki warna yang berbeda.



Gambar 1. Pewarnaan-5 Graf $\boldsymbol{G}$

Definisi 3.3

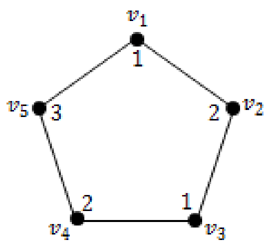
Bilangan bulat positif minimum $\boldsymbol{k}$ untuk $\boldsymbol{G}$ yang dapat diwarnai-$\boldsymbol{k}$ adalah bilangan kromatik pada $\boldsymbol{G}$ dan dilambangkan dengan $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{G})$, sehingga setiap dua titik yang bertetangga memiliki warna yang berbeda. Jelas bahwa, untuk setiap graf $\boldsymbol{G}$ yang memiliki titik $\boldsymbol{n}$, berlaku $\mathbf{1} \leq \boldsymbol{\chi}(\mathbf{G}) \leq \boldsymbol{n}$. Untuk graf $\boldsymbol{G}$ dengan subgraf $\boldsymbol{H}$ dari $\boldsymbol{G}$ diketahui bahwa $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{H}) \leq \boldsymbol{\chi}(\mathbf{G})$. Bilangan kromatik pada graf didefinisikan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{\chi}(\mathbf{G}) = \boldsymbol{min}\ \{\ \boldsymbol{k} | \boldsymbol{ada\ pewarnaan} - \boldsymbol{k\ pada\ G}\}$$

(Budayasa, 2007)

Contoh 3.3

Berikut diberikan contoh pada Gambar 2 merupakan pewarnaan-3 pada bilangan kromatik graf $\boldsymbol{G}$ atau $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{G}) = \mathbf{3}$.



Gambar 2. Pewarnaan-3 graf $\boldsymbol{G}$

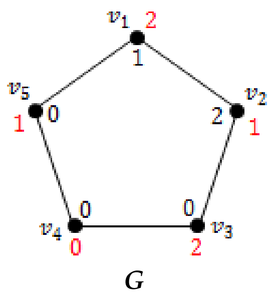
Definisi 3.4

Misalkan $G = (V, E)$ graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Untuk titik v pada graf $G, N(v)$ merupakan himpunan titik yang bertetangga dengan titik v. Pewarnaan modular pada graf G tanpa titik terisolasi adalah suatu pemetaan $c: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}_k$ untuk $k \geq 2$ dimana titik yang bertetangga boleh diberi warna sama dan jumlah warna $\sigma(v)$ pada titik v di G didefinisikan sebagai jumlah dalam $\mathbb{Z}_k$ dari warna titik-titik di $N(v)$, yaitu $\sigma(v) = \sum_{u \epsilon N(v)} c(u)$ dengan $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ dalam $\mathbb{Z}_k$ untuk setiap dua titik x, y bertetangga pada G. Pewarnaan c adalah pewarnaan modular jika c merupakan pewarnaan-k modular untuk suatu bilangan bulat $k \geq 2$. Bilangan kromatik modular $mc(G)$ pada G adalah bilangan bulat k terkecil untuk G yang mempunyai pewarnaan-k modular.

(Okamoto et al., 2010)

Contoh 3.4

Berikut diberikan contoh pada Gambar 3 merupakan pewarnaan-3 modular dengan $\boldsymbol{c}: \boldsymbol{V}(\boldsymbol{G}) \rightarrow \mathbb{Z}_3$ titik pada $\boldsymbol{c}$ yang bertetangga boleh diberi warna yang sama (warna titik dilabeli dengan angka bewarna hitam) dan $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{y})$ dalam $\mathbb{Z}_k$ untuk setiap dua titik $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ yang bertetangga pada $\boldsymbol{G}$ (warna titik dilabeli dengan angka bewarna merah). Maka bilangan kromatik modular graf $\boldsymbol{G}$ adalah 3 atau $\boldsymbol{mc}(\boldsymbol{G}) = \mathbf{3}$.



Gambar 3. Pewarnaan-3 Modular graf G

Definisi 3.5

Graf Bintang merupakan graf bipartit $\boldsymbol{K}_{\mathbf{1}, \boldsymbol{n}-\mathbf{1}}$ yang dinotasikan dengan $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{n}}$. Graf Bintang memiliki satu titik berderajat $\boldsymbol{n} - \mathbf{1}$ disebut titik pusat dan $\boldsymbol{n} - \mathbf{1}$ titik berderajat satu disebut daun.

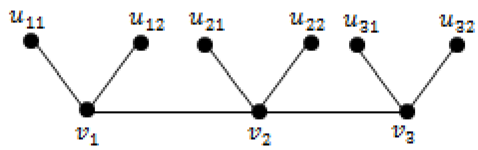
Definisi 3.6

Graf ulat (Caterpillars) adalah graf pohon yang apabila dihapus semua daunnya akan membentuk lintasan yang dinotasikan dengan $\boldsymbol{C}_{(\boldsymbol{m}; \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \ldots, \boldsymbol{n}_m)}$, dengan $\boldsymbol{m}$ adalah jumlah titik pada graf lintasan dan $\boldsymbol{n}_{\mathrm{i}}$ adalah jumlah daun dari setiap titik ke-$\boldsymbol{i}$ pada lintasan tersebut dimana $\boldsymbol{i}$ $(\mathbf{1} \leq \boldsymbol{i} \leq \boldsymbol{m})$, untuk $\boldsymbol{m} \geq \mathbf{2}$ $\boldsymbol{dan}$ $\boldsymbol{n}_{\mathrm{i}} \geq \mathbf{1}$. Jika jumlah daun dari setiap titik pada lintasan sama $(\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{n}_2 = \cdots = \boldsymbol{n}_m = \boldsymbol{n})$ maka graf tersebut merupakan graf ulat teratur yang dinotasikan dengan $\boldsymbol{C}_{(\boldsymbol{m}; \boldsymbol{n})}$.

(Turrahmah & Rudianto, 2016)

Contoh 3.6

Berikut diberikan contoh pada Gambar 4 merupakan graf ulat dengan jumlah titik pada graf lintasan sebanyak 3 dan jumlah daun secara berturut-turut sebanyak 2, 2 dan 2.



Gambar 4. Graf Ulat $\boldsymbol{C}_{(\mathbf{3}; \mathbf{2})}$

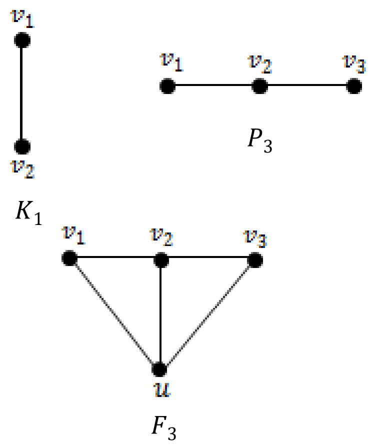
Definisi 3.7

Graf Kipas merupakan graf yang diperoleh dari operasi penjumlahan graf komplit $\boldsymbol{K}_{\mathbf{1}}$ dan graf lintasan $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n}}$. Graf Kipas dinotasikan dengan $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{n}}$ dengan $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{2}$.

(Tikasari & Rahadjeng, 2014)

Contoh 3.7

Berikut diberikan contoh pada Gambar 5 merupakan gambar graf kipas $\boldsymbol{F}_{\mathbf{3}}$ dengan menggabungkan graf komplit $\boldsymbol{K}_{\mathbf{1}}$ pada setiap titik graf lintasan $\boldsymbol{P}_{\mathbf{3}}$.



Gambar 5. Graf Kipas $\boldsymbol{F}_{\mathbf{3}}$

Definisi 3.8

Graf Roda merupakan graf yang diperoleh dari operasi penjumlahan graf sikel $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}}$ dan graf komplit $\boldsymbol{K}_{\mathbf{1}}$ dimana setiap titik pada sikel terhubung langsung pada titik pusat. Graf Roda dinotasikan dengan $\boldsymbol{W_n}$.

Definisi 3.9

Graf Helm merupakan graf yang terbentuk dari graf Roda $\boldsymbol{W_n}$ dengan menambahkan sisi daun pada setiap titik pada sikel. Graf Helm dinotasikan dengan $\boldsymbol{H_n}$ dengan $\boldsymbol{n \geq 3}$. Graf Helm memiliki $\boldsymbol{2n+1}$ titik dan $\boldsymbol{3n}$ sisi.

(Amalia & Darmaji, 2012)

Definisi 3.10

Graf Triangular Book merupakan graf yang terdiri dari $\boldsymbol{n}$ segitiga dengan $\boldsymbol{n \geq 3}$ dimana setiap segitiga memiliki dua titik dan satu sisi yang sama. Graf Triangular Book dinotasikan dengan $\boldsymbol{Bt_n}$ dengan $\boldsymbol{n+2}$ titik dan $\boldsymbol{2n+1}$ sisi.

(Riskawati et al., 2010)

METODE

Dalam penyusunan artikel ini metode yang digunakan adalah metode kajian pustaka. Dengan menggunakan metode tersebut dilakukan pemahaman dan identifikasi pengetahuan yang ada dalam kepustakaan (referensi, jurnal, ataupun hasil penelitian lain untuk menunjang penelitian). Adapun artikel yang digunakan yaitu *A Checkerboard Problem and Modular Colorings of Graphs* (Okamoto et al., 2010), *On Modular Colorings of Caterpillars* (Okamoto et al., 2009) dan *Modular Colorings of Cycle Related Graphs* (Nicholas & Sanma, 2017).

HASIL DAN PEMBAHASAN

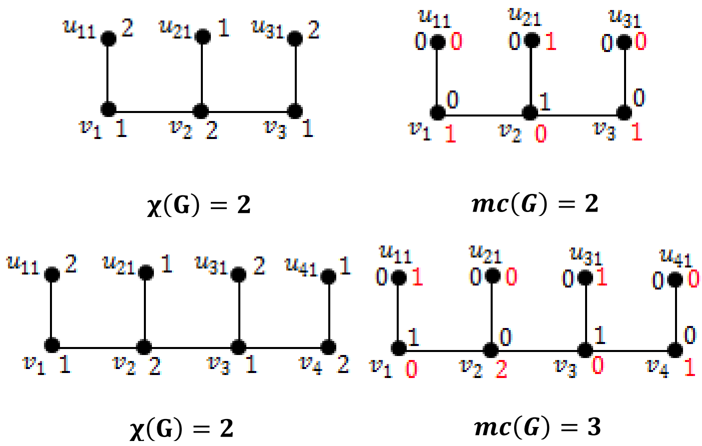
Pada bab ini dijelaskan bilangan kromatik modular pada beberapa subkelas graf dengan menggunakan batas bawah bilangan kromatik modular dan batas atas dari pewarnaan-k modular pada graf.

Observasi 4.1

Untuk setiap graf terhubung *taktrivial* $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{mc(G) \geq \chi(G)}$

Bukti :

Bilangan kromatik graf $\boldsymbol{G}$ adalah bilangan bulat positif minimum $\boldsymbol{k}$ untuk $\boldsymbol{G}$ yang dapat diwarnai- $\boldsymbol{k}$ sedemikian hingga setiap dua titik yang bertetangga mendapat warna yang berbeda. Sedangkan definisi dari bilangan kromatik modular graf $\boldsymbol{G}$ adalah bilangan bulat k minimum untuk $\boldsymbol{G}$ yang mempunyai pewarnaan-k modular dimana titik yang bertetangga boleh diberi warna yang sama dan jumlah warna $\boldsymbol{\sigma(v)}$ pada titik $\boldsymbol{v}$ di $\boldsymbol{G}$ didefinisikan sebagai jumlah di $\mathbb{Z}_k$ dari warna pada himpunan ketetanggan dititik $\boldsymbol{v}$ yang dinotasikan dengan $\boldsymbol{N(v)}$, yaitu $\boldsymbol{\sigma(v) = \sum_{u \in N(v)} c(u)}$ yang mana $\boldsymbol{\sigma(x) \neq \sigma(y)}$ dalam $\mathbb{Z}_k$ untuk setiap dua titik $\boldsymbol{x, y}$ bertetangga pada $\boldsymbol{G}$. Sehingga berdasarkan definisi tersebut $\boldsymbol{mc(G) \geq \chi(G)}$.



Gambar 6. $mc(G) \geq \chi(\mathrm{G})$ dari graf G

Perhatikan ilustrasi pada Gambar 6. Pada gambar tersebut terlihat bahwa $mc(G) \geq \chi(\mathrm{G})$ karena dalam menentukan bilangan kromatik modular didefinisikan sebagai jumlah dalam $\mathbb{Z}_k$ yang mana anggota elemennya dimulai dari 0 sehingga tidak mungkin untuk $mc(G) \leq \chi(\mathrm{G})$.

Teorema 4.1

Jika $\boldsymbol{S_n}$ merupakan graf Bintang untuk setiap bilangan bulat $\boldsymbol{n \geq 3}$, maka $\boldsymbol{mc(S_n) = 2}$

Bukti :

Misalkan $\boldsymbol{u}$ merupakan titik pusat dari graf bintang, dan $\boldsymbol{v_i}$ dimana $\boldsymbol{i = 1, 2, 3, \dots, n}$ merupakan titik yang bertetangga dengan titik $\boldsymbol{u}$.

Definisikan pewarnaan $\boldsymbol{c: V(S_n) \to \mathbb{Z}_2}$ sebagai berikut

$$c(v) = \begin{cases} 1 \; jika \; v = u \\ 0 \; jika \; v = v_i \end{cases}$$

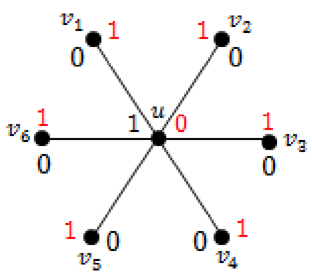
Oleh karena itu,

$$\sigma(v) = \begin{cases} 1 \; jika \; v = v_i \\ 0 \; jika \; v = u \end{cases}$$

Dari hal tersebut terlihat bahwa $\boldsymbol{\sigma(u) \neq \sigma(v_i)}$. Lebih lanjut jika $\boldsymbol{x, y}$ merupakan dua titik yang bertetangga pada $\boldsymbol{S_n}$ maka $\boldsymbol{\sigma(x) \neq \sigma(y)}$ dalam $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{k}}$. Sehingga c adalah pewarnaan-2 modular pada graf $\boldsymbol{S_n}$. Dengan demikian berdasarkan Definisi 3.4 $\boldsymbol{mc(S_n) \leq 2}$. Kemudian karena $\boldsymbol{\chi(S_n) = 2}$, maka berdasarkan Observasi 4.1 $\boldsymbol{mc(S_n) \geq 2}$. Jadi dapat disimpulkan $\boldsymbol{mc(S_n) = 2}$. ∎

Contoh 4.1

Berikut diberikan contoh pada Gambar 7 merupakan pewarnaan $c: V(S_7) \to \mathbb{Z}_2$ pada pewarnaan titik graf S_7 dimana titik yang bertetangga boleh diberi warna yang sama (warna titik dilabeli dengan angka bewarna hitam). Jumlah label pada titik u di peroleh dari pewarnaan pada titik $c(v_i)$ yaitu $0+0+0+0+0+0=0$, maka $\sigma(u) = 0$. Sedangkan jumlah label pada titik v_i diperoleh dari pewarnaan pada titik $c(u)$ yaitu 1, maka $\sigma(v_i) = 1$. Dari hal tersebut terlihat bahwa, untuk semua pasangan x, y yang merupakan dua titik yang bertetangga pada S_7 maka $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ dalam $\mathbb{Z}_2$ (warna titik dilabeli dengan angka bewarna merah). Dengan demikian $mc(S_7) \leq 2$. Jadi $mc(S_7) = 2$.



Gambar 7. Pewarnaan-2 Modular graf S_7

Teorema 4.2

Jika $\boldsymbol{C_{(m;n_1,n_2,\dots,n_m)}}$ merupakan graf Ulat untuk setiap bilangan bulat $\boldsymbol{m \geq 2}$ dan $\boldsymbol{n_i \geq 1}$, maka $\boldsymbol{mc(C_{(m;n_1,n_2,\dots,n_m)}) = 2}$

Bukti :

Misalkan v_i merupakan titik lintasan pada graf ulat dimana $i = 1, 2, 3, \dots, m$ dan u_{ij} merupakan titik daun pada graf ulat yang bertetangga dengan titik v_i dimana $j = 1, 2, 3, \dots, n_i$.

Definisikan pewarnaan $c: V(C_{(m;n_1,n_2,\dots,n_m)}) \to \mathbb{Z}_2$ sebagai berikut

$$c(v_i) = \begin{cases} 1 \ jika\ i\ ganjil \\ 0 \ jika\ i\ genap \end{cases}$$

dan

$$c(u_{ij}) = \begin{cases} 1 \ jika\ i\ genap\ dan\ j = 1\ untuk\ i < m \\ 0 \ lainnya \end{cases}$$

Oleh karena itu,

$$\sigma(v_i) = \begin{cases} 1 \ jika\ i\ genap \\ 0 \ jika\ i\ ganjil \end{cases}$$

dan

$$\sigma(u_{ij}) = \begin{cases} 1 \ jika\ i\ ganjil \\ 0 \ jika\ i\ genap \end{cases}$$

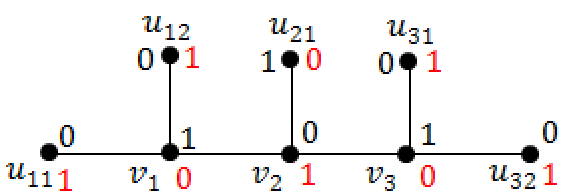
Maka diperoleh nilai $\sigma(v_i)$ secara berturut-turut yaitu

$$0,1,0,1, \dots, 0,1,0,1,0$$

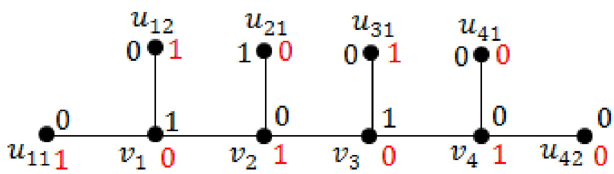
Dari hal tersebut terlihat bahwa $\sigma(v_i) \neq \sigma(u_{ij})$. Lebih lanjut jika x, y merupakan dua titik yang bertetangga pada $C_{(m;n_1,n_2,\dots,n_m)}$ maka $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ dalam $\mathbb{Z}_k$. Sehingga c adalah pewarnaan-2 modular pada graf $C_{(m;n_1,n_2,\dots,n_m)}$. Dengan demikian berdasarkan Definisi 3.4 $mc(C_{(m;n_1,n_2,\dots,n_m)}) \leq 2$. Kemudian karena $\chi(C_{(m;n_1,n_2,\dots,n_m)}) = 2$, maka berdasarkan Observasi 4.1 $mc(C_{(m;n_1,n_2,\dots,n_m)}) \geq 2$. Jadi dapat disimpulkan $mc(C_{(m;n_1,n_2,\dots,n_m)}) = 2$. ∎

Contoh 4.2 :

Berikut merupakan contoh pewarnaan modular pada graf Ulat $C_{(m;n_1,n_2,\dots,n_m)}$. Perhatikan bahwa untuk setiap dua titik yang bertetangga pada $C_{(m;n_1,n_2,\dots,n_m)}$ maka $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ dalam $\mathbb{Z}_k$ (warna titik dilabeli dengan angka bewarna merah). Sedangkan titik yang bertetangga boleh diberi warna yang sama (warna titik dilabeli dengan angka bewarna hitam).



Gambar 8. Pewarnaan-2 Modular graf $\boldsymbol{C_{(3;2,1,2)}}$



Gambar 9. Pewarnaan-2 Modular graf $\boldsymbol{C_{(4;2,1,1,2)}}$

Teorema 4.3

Jika $\boldsymbol{F_n}$ merupakan graf Kipas untuk setiap bilangan bulat $\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{2}$, maka $\boldsymbol{mc}(\boldsymbol{F_n}) = \boldsymbol{3}$

Bukti :

Kasus 1. $\boldsymbol{n = 2}$. Definisikan pewarnaan $\boldsymbol{c}: \boldsymbol{V}(\boldsymbol{F_n}) \to \mathbb{Z}_3$ sebagai berikut

$$c(v) = \begin{cases} 0 \; jika \; v = u \\ 1 \; jika \; v = v_1 \\ 2 \; jika \; v = v_2 \end{cases}$$

Oleh karena itu,

$$\sigma(v) = \begin{cases} 0 \; jika \; v = u \\ 1 \; jika \; v = v_2 \\ 2 \; jika \; v = v_1 \end{cases}$$

Dari hal tersebut terlihat bahwa $\sigma(u) \neq \sigma(v_i)$. Lebih lanjut jika x, y merupakan dua titik yang bertetangga pada F_n maka $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ dalam $\mathbb{Z}_k$. Sehingga c adalah pewarnaan-3 modular pada graf F_n. Dengan demikian berdasarkan Definisi 3.4 $mc(F_n) \leq 3$. Kemudian karena $n = 2$ maka $\chi(F_n) = 3$. Sehingga berdasarkan Observasi 4.1 $mc(F_n) \geq 3$. Jadi dapat disimpulkan $mc(F_n) = 3$.

Kasus 2. $\boldsymbol{n = 3}$. Definisikan pewarnaan $\boldsymbol{c}: \boldsymbol{V}(\boldsymbol{F_n}) \to \mathbb{Z}_3$. sebagai berikut

$$c(v) = \begin{cases} 0 \; jika \; v = u \\ 1 \; jika \; v = v_i \; untuk \; i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Oleh karena itu,

$$\sigma(v) = \begin{cases} 0 \; jika \; v = u \\ 1 \; jika \; v = v_1, v_3 \\ 2 \; jika \; v = v_2 \end{cases}$$

Dari hal tersebut terlihat bahwa $\sigma(u) \neq \sigma(v_i)$. Lebih lanjut jika x, y merupakan dua titik yang bertetangga pada F_n maka $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ dalam $\mathbb{Z}_k$. Sehingga c adalah pewarnaan-3 modular pada graf F_n. Dengan demikian berdasarkan Definisi 3.4 $mc(F_n) \leq 3$. Kemudian karena $n = 3$ maka $\chi(F_n) = 3$. Sehingga berdasarkan Observasi 4.1 $mc(F_n) \geq 3$. Jadi dapat disimpulkan $mc(F_n) = 3$.

Kasus 3. $\boldsymbol{n = 4a + b}$ dimana $\boldsymbol{b = 1, 2, 3}$ dan $\boldsymbol{a \equiv 0} \; (\boldsymbol{mod\ 3})$. Definisikan pewarnaan $\boldsymbol{c}: \boldsymbol{V}(\boldsymbol{F_n}) \to \mathbb{Z}_3$ sebagai berikut

$$c(v) = \begin{cases} 2 \; jika \; v = u \\ 1 \; jika \; v = v_i \; untuk \; i \equiv 1 \; (mod \; 4) \\ 0 \; lainnya \end{cases}$$

Oleh karena itu,

$$\sigma(v) = \begin{cases} 0 \; jika \; v = v_i \; untuk \; i \; genap \\ 1 \; jika \; v = u \\ 2 \; jika \; v = v_i \; untuk \; i \; ganjil \end{cases}$$

Maka diperoleh nilai $\sigma(v_i)$ secara berturut-turut yaitu

2,0,2,0, … ,2,0,2,0,2

Dari hal tersebut terlihat bahwa $\boldsymbol{\sigma(u) \neq \sigma(v_i)}$. Lebih lanjut jika $\boldsymbol{x, y}$ merupakan dua titik yang bertetangga pada $\boldsymbol{F_n}$ maka $\boldsymbol{\sigma(x) \neq \sigma(y)}$ dalam $\mathbb{Z}_k$. Sehingga c adalah pewarnaan-3 modular pada graf $\boldsymbol{F_n}$. Dengan demikian berdasarkan Definisi 3.4 $\boldsymbol{mc(F_n) \leq 3}$. Kemudian karena $\boldsymbol{n = 4a + b}$ dimana $\boldsymbol{b = 1, 2, 3}$ dan $\boldsymbol{a \equiv 0} \; (\boldsymbol{mod\ 3})$ maka $\boldsymbol{\chi(F_n) = 3}$. Sehingga berdasarkan Observasi 4.1 $\boldsymbol{mc(F_n) \geq 3}$. Jadi dapat disimpulkan $\boldsymbol{mc(F_n) = 3}$.

Kasus 4. $\boldsymbol{n = 4a + b}$ dimana $\boldsymbol{b = 1, 2, 3}$ dan $\boldsymbol{a \equiv 1} \; (\boldsymbol{mod\ 3})$. Definisikan pewarnaan $\boldsymbol{c}: \boldsymbol{V}(\boldsymbol{F_n}) \to \mathbb{Z}_3$ sebagai berikut

$$c(v) = \begin{cases} 1 \; jika \; v = v_i \; untuk \; i \equiv 1 \; (mod \; 4) \\ 0 \; lainnya \end{cases}$$

Oleh karena itu,

$$\sigma(v) = \begin{cases} 0 \; jika \; v = v_i \; untuk \; i \; ganjil \\ 1 \; jika \; v = v_i \; untuk \; i \; genap \\ 2 \; jika \; v = u \end{cases}$$

Maka diperoleh nilai $\sigma(v_i)$ secara berturut-turut yaitu

0,1,0,1,0, … ,0,1,0,1,0

Dari hal tersebut terlihat bahwa $\boldsymbol{\sigma(u) \neq \sigma(v_i)}$. Lebih lanjut jika $\boldsymbol{x, y}$ merupakan dua titik yang bertetangga pada $\boldsymbol{F_n}$ maka $\boldsymbol{\sigma(x) \neq \sigma(y)}$ dalam $\mathbb{Z}_k$. Sehingga c adalah pewarnaan-3 modular pada graf $\boldsymbol{F_n}$. Dengan demikian berdasarkan Definisi 3.4 $\boldsymbol{mc(F_n) \leq 3}$. Kemudian karena $\boldsymbol{n = 4a + b}$ dimana $\boldsymbol{b = 1, 2, 3}$ dan $\boldsymbol{a \equiv 1} \; (\boldsymbol{mod\ 3})$ maka $\boldsymbol{\chi(F_n) = 3}$. Sehingga berdasarkan Observasi 4.1 $\boldsymbol{mc(F_n) \geq 3}$. Jadi dapat disimpulkan $\boldsymbol{mc(F_n) = 3}$.

Kasus 5. $\boldsymbol{n = 4a + b}$ dimana $\boldsymbol{b = 1, 2, 3}$ dan $\boldsymbol{a \equiv 2} \; (\boldsymbol{mod\ 3})$. Definisikan pewarnaan $\boldsymbol{c}: \boldsymbol{V}(\boldsymbol{F_n}) \to \mathbb{Z}_3$ sebagai berikut

$$c(v) = \begin{cases} 1 \; jika \; v = u \; dan \; v_i \; untuk \; i \equiv 1 \; (mod \; 4) \\ 0 \; lainnya \end{cases}$$

Oleh karena itu,

$$\sigma(v) = \begin{cases} 0 \; jika \; v = u \\ 1 \; jika \; v = v_i \; untuk \; i \; ganjil \\ 2 \; jika \; v = v_i \; untuk \; i \; genap \end{cases}$$

Maka diperoleh nilai $\sigma(v_i)$ secara berturut-turut yaitu

1,2,1,2,1, … ,2,1,2,1

Dari hal tersebut terlihat bahwa $\boldsymbol{\sigma(u) \neq \sigma(v_i)}$. Lebih lanjut jika $\boldsymbol{x, y}$ merupakan dua titik yang bertetangga pada $\boldsymbol{F_n}$ maka $\boldsymbol{\sigma(x) \neq \sigma(y)}$ dalam $\mathbb{Z}_k$. Sehingga c adalah pewarnaan-3 modular pada graf $\boldsymbol{F_n}$. Dengan demikian berdasarkan Definisi 3.4

$\boldsymbol{mc(F_n) \leq 3}$. Kemudian karena $\boldsymbol{n = 4a + b}$ dimana $\boldsymbol{b = 1, 2, 3}$ dan $\boldsymbol{a \equiv 2\ (mod\ 3)}$ maka $\boldsymbol{\chi(F_n) = 3}$. Sehingga berdasarkan Observasi 4.1 $\boldsymbol{mc(F_n) \geq 3}$. Jadi dapat disimpulkan $\boldsymbol{mc(F_n) = 3}$.

Kasus 6. $\boldsymbol{4n}$. Definisikan pewarnaan $\boldsymbol{c: V(F_n) \to \mathbb{Z}_3}$ sebagai berikut

$$c(v_i) = \begin{cases} 2\ jika\ v_i = v_{3+4t}\ untuk\ t = 0, 1, 2, \dots, (n-1) \\ 1\ jika\ v_i = v_{2+4t}\ untuk\ t = 0, 1, 2, \dots, (n-2) \\ 0\ lainnya\ dan\ v_i = u \end{cases}$$

Oleh karena itu,

$$\sigma(v) = \begin{cases} 0\ jika\ v = u \\ 1\ jika\ v = v_i\ untuk\ i\ ganjil \\ 2\ jika\ v = v_i\ untuk\ i\ genap \end{cases}$$

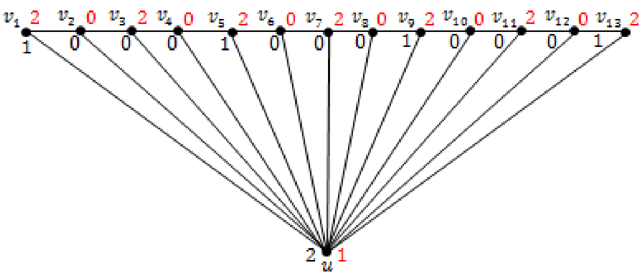
Maka diperoleh nilai $\sigma(v_i)$ secara berturut-turut yaitu

$$1,2,1,2, \dots, 1,2,1,2$$

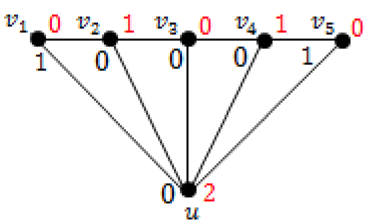
Dari hal tersebut terlihat bahwa $\boldsymbol{\sigma(u) \neq \sigma(v_i)}$. Lebih lanjut jika $\boldsymbol{x, y}$ merupakan dua titik yang bertetangga pada $\boldsymbol{F_n}$ maka $\boldsymbol{\sigma(x) \neq \sigma(y)}$ dalam $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{k}}$. Sehingga c adalah pewarnaan-3 modular pada graf $\boldsymbol{F_n}$. Dengan demikian berdasarkan Definisi 3.4 $\boldsymbol{mc(F_n) \leq 3}$. Kemudian karena $\boldsymbol{n = 4n}$ maka $\boldsymbol{\chi(F_n) = 3}$. Sehingga berdasarkan Observasi 4.1 $\boldsymbol{mc(F_n) \geq 3}$. Jadi dapat disimpulkan $\boldsymbol{mc(F_n) = 3}$. ■

Contoh 4.3

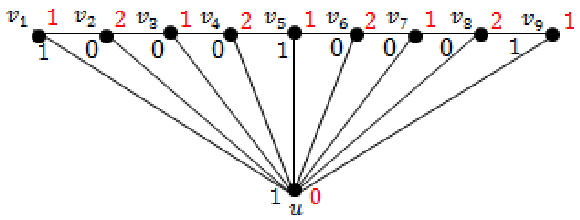
Berikut merupakan contoh pewarnaan modular pada graf kipas $\boldsymbol{F_n}$. Perhatikan bahwa untuk setiap dua titik yang bertetangga pada $\boldsymbol{F_n}$ maka $\boldsymbol{\sigma(x) \neq \sigma(y)}$ dalam $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{k}}$ (warna titik dilabeli dengan angka bewarna merah). Sedangkan titik yang bertetangga boleh diberi warna yang sama (warna titik dilabeli dengan angka bewarna hitam).



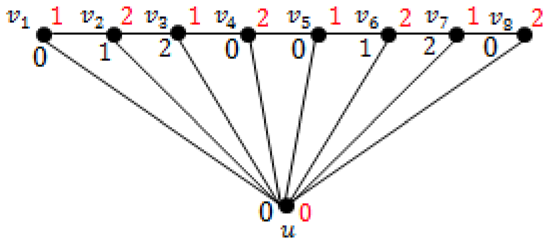
Gambar 10. Pewarnaan-3 Modular graf $\boldsymbol{F_{13}}$



Gambar 11. Pewarnaan-3 Modular graf $\boldsymbol{F_5}$



Gambar 12. Pewarnaan-3 Modular graf $\boldsymbol{F_9}$



Gambar 13. Pewarnaan-3 Modular graf $\boldsymbol{F_8}$

Teorema 4.4

Jika $\boldsymbol{H_n}$ merupakan graf Helm untuk setiap bilangan bulat $\boldsymbol{n \geq 3}$, maka

$$mc(H_n) = \begin{cases} 3\ jika\ n\ genap \\ 4\ jika\ n\ ganjil \end{cases}$$

Bukti :

Misalkan $\boldsymbol{u}$ merupakan titik pusat dari graf helm, dengan $\boldsymbol{v_i}$ dimana $\boldsymbol{i = 1, 2, 3, \dots, n}$ merupakan titik yang bertetangga dengan titik $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{w_j}$ dimana $\boldsymbol{j = 1, 2, 3, \dots, n}$ merupakan titik yang bertetangga dengan titik $\boldsymbol{v_i}$. Selanjutnya perhatikan dua kasus yaitu sebagai berikut

Kasus 1. $n\ genap$. Definisikan pewarnaan $c: V(H_n) \to \mathbb{Z}_3$ sebagai berikut

$$c(v) = \begin{cases} 0\ jika\ v = u\ dan\ v_i\ untuk\ i = 1, 2, 3, \dots, n \\ 1\ jika\ v = w_j\ untuk\ j\ ganjil \\ 2\ lainnya \end{cases}$$

Oleh karena itu,

$$\sigma(v) = \begin{cases} 0\ jika\ v = u\ dan\ w_j\ untuk\ j = 1, 2, \dots, n \\ 1\ jika\ v = v_i\ untuk\ i\ ganjil \\ 2\ jika\ v = v_i\ untuk\ i\ genap \end{cases}$$

Maka diperoleh nilai $\sigma(v_i)$ secara berturut-turut yaitu

$$1,2,1,2, \dots, 1,2,1,2$$

Karena x, y merupakan dua titik yang bertetangga pada H_n maka $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ dalam $\mathbb{Z}_k$. Sehingga c adalah pewarnaan-3 modular pada graf H_n. Dengan demikian berdasarkan Definisi 3.4 $mc(H_n) \leq 3$. Kemudian karena n genap maka $\chi(H_n) = 3$.

Sehingga berdasarkan Observasi 4.1 $mc(H_n) \geq 3$. Jadi dapat disimpulkan $mc(H_n) = 3$.

Kasus 2. *n ganjil*. Definisikan pewarnaan $c: V(H_n) \rightarrow \mathbb{Z}_4$ sebagai berikut

$$c(v) = \begin{cases} 0 \; jika \; v = u \; dan \; v_i \; untuk \; i = 1, 2, 3, \dots, n \\ 1 \; jika \; v = w_j \; untuk \; j \; ganjil \; dan \; j \neq n \\ 2 \; jika \; v = w_j \; untuk \; j \; genap \\ 3 \; jika \; v = w_n \end{cases}$$

Oleh karena itu,

$$\sigma(v) = \begin{cases} 0 \; jika \; v = u \; dan \; w_j \; untuk \; j = 1, 2, 3, \dots, n \\ 1 \; jika \; v = v_i \; untuk \; i \; ganjil \\ 2 \; jika \; v = v_i \; untuk \; i \; genap \\ 3 \; lainnya \end{cases}$$

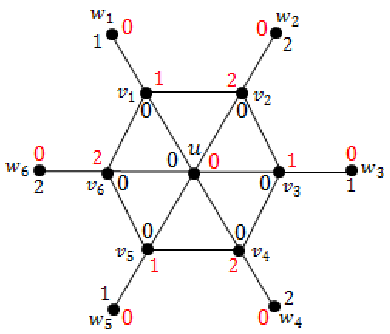
Maka diperoleh nilai $\sigma(v_i)$ secara berturut-turut yaitu

1,2,1,2, … ,1,2,1,2,3

Karena x, y merupakan dua titik yang bertetangga pada H_n maka $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ dalam $\mathbb{Z}_k$. Sehingga c adalah pewarnaan-4 modular pada graf H_n. Dengan demikian berdasarkan Definisi 3.4 $mc(H_n) \leq 4$. Kemudian karena n ganjil maka $\chi(H_n) = 4$. Sehingga berdasarkan Observasi 4.1 $mc(H_n) \geq 4$. Jadi dapat disimpulkan $mc(H_n) = 4$. ∎

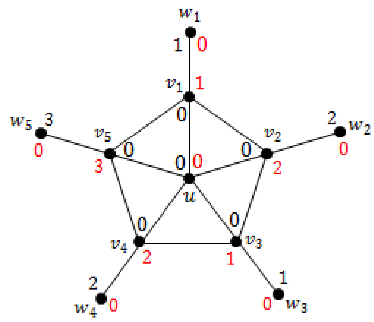
Contoh 4.4

Perhatikan contoh pada Gambar 14 merupakan pewarnaan $c: V(H_6) \rightarrow \mathbb{Z}_3$ dengan $n = 6$ pada pewarnaan titik graf H_6 dimana titik yang bertetangga boleh diberi warna yang sama (warna titik dilabeli dengan angka bewarna hitam). Sedangkan jumlah label untuk semua pasangan x, y yang merupakan dua titik yang bertetangga pada H_6 maka $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ dalam $\mathbb{Z}_3$ (warna titik dilabeli dengan angka bewarna merah). Dengan demikian untuk n genap $mc(H_6) \leq 3$. Jadi $mc(H_6) = 3$.



Gambar 14. Pewarnaan-3 Modular graf H_6

Pada contoh Gambar 15 merupakan pewarnaan $c: V(H_5) \rightarrow \mathbb{Z}_4$ dengan $n = 5$ pada pewarnaan titik graf H_5 dimana titik yang bertetangga boleh diberi warna yang sama (warna titik dilabeli dengan angka bewarna hitam). Sedangkan jumlah label untuk semua pasangan x, y yang merupakan dua titik yang bertetangga pada H_5 maka $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ dalam $\mathbb{Z}_4$ (warna titik dilabeli dengan angka bewarna merah). Dengan demikian untuk n ganjil $mc(H_5) \leq 4$. Jadi $mc(H_5) = 4$.



Gambar 15. Pewarnaan-4 Modular graf H_5

Teorema 4.5

Jika Bt_n merupakan graf Triangular Book untuk setiap bilangan bulat $n \geq 3$, maka $mc(Bt_n) = 3$

Bukti :

Definisikan pewarnaan $c: V(Bt_n) \rightarrow \mathbb{Z}_3$ sebagai berikut

$$c(v) = \begin{cases} 0 \; jika \; v = v_i \; untuk \; i = 1, 2, 3, \dots, n \\ 1 \; jika \; v = u_1 \\ 2 \; jika \; v = u_2 \end{cases}$$

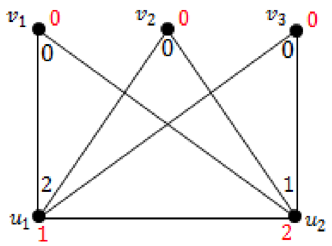
Oleh karena itu,

$$\sigma(v) = \begin{cases} 0 \; jika \; v = v_i \; untuk \; i = 1, 2, 3, \dots, n \\ 1 \; jika \; v = u_2 \\ 2 \; jika \; v = u_1 \end{cases}$$

Dari hal tersebut terlihat bahwa $\sigma(v_i) \neq \sigma(u_j)$. Lebih lanjut jika x, y merupakan dua titik yang bertetangga pada Bt_n maka $\sigma(x) \neq \sigma(y)$. Sehingga c adalah pewarnaan-3 modular pada graf Bt_n. Dengan demikian berdasarkan Definisi 3.4 $mc(Bt_n) \leq 3$. Kemudian karena $\chi(Bt_n) = 3$, maka berdasarkan Observasi 4.1 $mc(Bt_n) \geq 3$. Jadi dapat disimpulkan $mc(Bt_n) = 3$. ∎

Contoh 4.5

Perhatikan contoh pada Gambar 16 merupakan pewarnaan $c: V(Bt_3) \rightarrow \mathbb{Z}_3$ pada pewarnaan titik graf Bt_3 dimana titik yang bertetangga boleh diberi warna yang sama (warna titik dilabeli dengan angka bewarna hitam). Sedangkan jumlah label untuk semua pasangan x, y yang merupakan dua titik yang bertetangga pada Bt_3 maka $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ dalam $\mathbb{Z}_3$ (warna titik dilabeli dengan angka bewarna merah). Dengan demikian $mc(Bt_3) \leq 3$. Jadi $mc(Bt_3) = 3$.



Gambar 16. Pewarnaan-3 Modular graf Bt_3

PENUTUP

SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan pada artikel ini, maka dapat disimpulkan bahwa bilangan kromatik modular pada beberapa subkelas graf yaitu sebagai berikut :

1. Graf Bintang $(\boldsymbol{S_n})$ dengan $\boldsymbol{n \geq 3}$ memiliki bilangan kromatik modular yaitu $\boldsymbol{mc(S_n) = 2}$
2. Graf Ulat $\left(\boldsymbol{C_{(m;n_1,n_2,\dots,n_m)}}\right)$ dengan $\boldsymbol{m \geq 2}$ dan $\boldsymbol{n_i \geq 1}$ memiliki bilangan kromatik modular yaitu $\boldsymbol{mc\left(C_{(m;n_1,n_2,\dots,n_m)}\right) = 2}$
3. Graf Kipas (F_n) dengan $n \geq 2$, memiliki bilangan kromatik modular $mc(F_n) = 3$
4. Graf Helm $(\boldsymbol{H_n})$ dengan $\boldsymbol{n \geq 3}$ memiliki bilangan kromatik modular yaitu
$$mc(H_n) = \begin{cases} 3 \; jika \; n \; genap \\ 4 \; jika \; n \; ganjil \end{cases}$$
5. Graf Triangular Book (Bt_n) dengan $n \geq 3$, memiliki bilangan kromatik modular yaitu $mc(Bt_n) = 3$

SARAN

Dalam penulisan artikel ini, memfokuskan pewarnaan modular pada graf Bintang, graf Ulat, graf Kipas, graf Helm, dan graf Triangular Book. Bagi pembaca yang tertarik mengembangkan tulisan ini dapat membahas pewarnaan modular pada jenis graf yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Ajiji, M. A., & Rahadjeng, B. (2020). *Pewarnaan Modular Pada Beberapa Subkelas Graf*. *7*(2), 104–110.

Amalia, R., & Darmaji. (2012). *Dimensi Partisi pada Graf Serupa Roda dengan Penambahan Anting*. *1*(1), 1–6.

Budayasa, I. K. (2007). *Teori Graph dan Aplikasinya*.Surabaya: Unesa University Press.

Nicholas, T., & Sanma, G. R. (2017). *Modular Colorings of Cycle Related Graphs*. *13*(7), 3779–3788.

Okamoto, F., Salehi, E., & Zhang, P. (2009). On modular colorings of caterpillars. *Congr. Numerantium*, *197*, 213–220.

Okamoto, F., Salehi, E., & Zhang, P. (2010). A checkerboard problem and modular colorings of graphs. *Bull. Inst. Comb. Appl.*, *58*(January 2010), 29–47.

Paramaguru, N., & Sampathkumar, R. (2014). *Modular colorings of join of two special graphs*. *2*(June 2013), 139–149.

Tikasari, A., & Rahadjeng, B., (2014). *Pelabelan Sisi Ajaib Dan Sisi Ajaib Super Pada Graf Kipas , Graf Tangga , Graf Prisma , Graf Lintasan , Graf Sikel , Dan Graf Buku*. 1–5.

Turrahmah, F., & Rudianto, B. (2016). Dimensi Partisi Dari Graf Ulat. *Jurnal Matematika UNAND*, *5*(3), 1.