

PENERAPAN MODEL *SEQIR* DENGAN KONTROL OPTIMAL PADA SISTEM DINAMIK PANDEMI COVID-19

Zhindy Armandani

S1 Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya

email: zhindy.17030214053@mhs.unesa.ac.id

Yusuf Fuad

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya

email: yusuffuad@unesa.ac.id

Abstrak

Belum tersedianya vaksin yang efektif untuk pencegahan Covid-19, tingkat penularan yang tinggi, dan sifat dari virus yang masih belum diketahui membuat pemerintah di beberapa negara misalnya India mengambil kebijakan total *lockdown* untuk pengendalian penularan Covid-19. Model matematika dapat membantu tindakan intervensi untuk memengaruhi sistem dinamik penyebaran penyakit maupun Covid-19. Penelitian ini menerapkan model dinamik *SEQIR* pada penyebaran Covid-19 dengan terlebih dahulu merekonstruksi model dinamik, menentukan titik ekuilibrium dan bilangan reproduksi dasar, menganalisis kestabilan sistem dan sensitivitas respon model dinamik, serta menampilkan simulasi numerik dengan nilai parameter dan nilai awal dari Mandal et al., (2020). Berdasarkan hasil pembahasan diperoleh bilangan reproduksi dasar $\Gamma_0 > 1$, artinya Covid-19 telah menjadi sebuah pandemi. Analisis kestabilan menunjukkan bahwa model *SEQIR* berdasarkan titik ekuilibrium bebas penyakit maupun titik ekuilibrium endemik adalah stabil asimtotik karena nilai eigen bernilai real negatif. Sedangkan analisis sensitivitas menunjukkan bahwa parameter A dan β memengaruhi tingkat penularan Covid-19. Hasil dari simulasi numerik dengan dan tanpa kontrol optimal di kasus New Delhi, India, yang menerapkan kebijakan total *lockdown* dan kasus sejenis di Jawa Timur, Indonesia yang tanpa kebijakan total *lockdown* mendemonstrasikan bahwa perilaku grafik solusinya sangat signifikan identik. Hasil tersebut menegaskan bahwa kebijakan *lockdown* tidak sepenuhnya efektif untuk mengurangi penyebaran virus Covid-19 di India. Untuk peneliti selanjutnya disarankan dapat menerapkan nilai parameter kontrol optimal yang lain pada model *SEQIR* dan atau model dinamik lain.

Kata Kunci: Bilangan reproduksi dasar, Covid-19, karantina, kontrol optimal, model matematika, sensitivitas.

Abstract

The unavailability of effectiveness vaccines for the prevention of Covid-19, high transmission rates, and the nature of the virus are still unknown, prompting governments in several countries, for instance India authorize a policy of total lockdown to control the transmission of Covid-19. A Mathematical model can intervene to influence the dynamic system of disease spread. This study applies the SEQIR model by firstly reconstructing the dynamic model, determining equilibrium points and basic reproduction numbers, analyzing system stability and response sensitivity, and demonstrating numerical simulations with parameter values and initial values that are taken from Mandal et al., (2020). Based on the results the basic reproduction number is $\Gamma_0 > 1$ which means that Covid-19 has become a pandemic. Stability analysis shows that the SEQIR model based on both the disease-free equilibrium point and the endemic equilibrium point are asymptotic stable because all eigen value are negative real. The sensitivity analysis emphasizes that parameters A and β are significantly affect Covid-19 transmissions. From numerical simulations with and without optimal control in New Delhi, India with the total lockdown and the similar East Java's case, Indonesia without the total lockdown demonstrated that all solution are significantly identical. For further researchers may compare this results for other optimal control parameters of the SEQIR models or with other dynamic model.

Keywords: Basic reproduction number, Covid-19, mathematical model, quarantine, optimal control, quarantine, sensitivity.

PENDAHULUAN

Covid-19 adalah penyakit yang disebabkan oleh infeksi virus *corona*. Virus ini pertama kali diidentifikasi di Wuhan, China pada tanggal 29

Desember 2019. Sejak awal tahun 2020 virus ini mulai menyebar ke seluruh dunia hingga mengakibatkan sekitar satu juta kasus kematian pada 27 April 2020 (WHO, 2020). Virus *corona* menjadi wabah atau pandemi karena beberapa alasan, antara lain belum

tersedianya vaksin atau pengobatan yang efektif, tingkat penularan yang tinggi, dan sifat dari virus yang masih belum diketahui.

Penyebaran Covid-19 yang telah terjadi di seluruh dunia membuat pemerintah dari beberapa negara melakukan tindakan pencegahan dan pengendalian virus Covid-19 dengan memberlakukan kebijakan *lockdown*. Total *lockdown* telah dilakukan di Wuhan, China dan merupakan salah satu cara yang dianggap efektif untuk pencegahan penularan (Ndairou et al., 2020). Tindakan yang diterapkan tersebut memiliki dampak yang buruk bagi perekonomian karena menyebabkan krisis keuangan yang signifikan.

Strategi lain untuk pencegahan penyebaran Covid-19 dengan analisis kualitatif yaitu menganalisis penyebaran Covid-19 dengan menyusun asumsi dasar dan proses sistematis dalam penelitian sehingga bisa mengambil kesimpulan yang efektif. Studi tentang model dinamik dari penyebaran Covid-19 diterapkan untuk mendapatkan sifat penyakit yang tepat dalam memprediksi aspek perilaku penyakit. Meskipun model matematika pada epidemiologi teoritis terlihat cukup sederhana namun tersusun secara matematis. Dengan kemajuan alat komputasi dan perangkat lunak masih mungkin dikembangkan model matematika yang lebih kompleks dan menganalisisnya secara menyeluruh secara ilmiah. Oleh karena itu, model matematika mampu mewakili sistem dinamik penyakit.

Masa inkubasi Covid-19 memerlukan waktu dua hari hingga dua minggu untuk orang yang terinfeksi virus *corona*. Selama periode itu orang tersebut bisa menulari orang lain yang rentan namun juga ada beberapa orang lain yang terinfeksi dan infeksi yang sangat ringan sehingga orang tersebut dapat langsung pulih karena kekebalan tubuhnya. Dalam penelitian ini istilah orang yang terinfeksi adalah orang yang dirawat di rumah sakit. Hanya orang yang terpapar dan orang yang terinfeksi tanpa gejala yang dapat menyebarkan virus. Dengan demikian, orang yang telah dirawat di rumah sakit dianggap tidak akan menyebarkan virus. Sifat Covid-19 bergantung pada parameter populasi terinfeksi seperti kekebalan pribadi, riwayat kunjungan ke negara dengan pandemi Covid-19, menjaga kebersihan, dan lain-lain. Model dinamik penyebaran Covid-19 sangat membantu bila diimbangi dengan vaksinasi atau pengobatan yang tepat dan

peningkatan kebersihan publik untuk mengurangi penularan penyebaran penyakit.

Penelitian ini terinspirasi oleh Mandal et al., (2020) yaitu membahas tentang model dinamik *SEQIR* untuk penularan Covid-19 dan strategi intervensi pemerintah dalam pengendalian Covid-19 di India, khususnya di New Delhi. Dalam penelitian ini dilakukan rekonstruksi model *SEQIR* dan respon solusi lainnya berdasarkan data penyebaran Covid-19 di New Delhi, India. Selanjutnya dilakukan analisis sensitivitas berbasis bilangan reproduksi dasar dan memperoleh hasil bahwa dengan mengurangi kontak manusia yang terpapar dan rentan adalah faktor paling penting dalam mencapai pengendalian penyakit agar mengurangi individu yang terinfeksi (Liu et al., 2020). Simulasi numerik dengan dan tanpa kontrol optimal pada model *SEQIR* disajikan dengan nilai parameter dan juga nilai awal yang diadopsi dari Mandal et al., (2020) dan hasilnya akan dibandingkan dengan kasus yang terjadi di Jawa Timur, Indonesia.

KAJIAN PUSTAKA

CORONAVIRUS DISEASE-2019 (COVID-19)

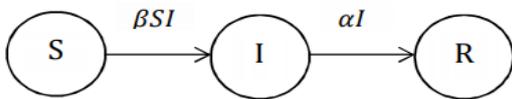
Penyakit menular yang disebabkan oleh virus *corona* dikenal dengan nama Covid-19, ialah jenis virus baru yang diketahui pada tahun 2019 dan belum pernah diidentifikasi menyerang pada manusia sebelumnya. Virus *corona* bisa menyebabkan penyakit mulai dari gejala flu hingga yang lebih serius seperti *Middle East Respiratory Syndrome (MERS-CoV)* and *Severe Acute Respirator Syndrome (SARS-CoV)* (WHO, 2019).

Kasus virus *corona* muncul dan mulai menyerang manusia pertama kali di provinsi Wuhan, China. Pada awal kemunculan virus *corona* diperkirakan merupakan penyakit *pneumonia*, dengan awal gejala seperti sakit flu pada umumnya. Gejala awal yang lainnya seperti batuk, demam, tidak nafsu makan, lemas, dan sesak napas. Berbeda dengan virus *influenza*, virus *corona* bisa berkembang dengan cepat hingga berakibat infeksi yang lebih parah bahkan gagal organ. Kondisi genting ini terjadi terutama pada pasien yang memiliki masalah kesehatan sebelumnya. Akibat penularan virus *corona* yang sangat cepat, Organisasi Kesehatan Dunia (WHO) menetapkan virus *corona* sebagai pandemi pada 11 Maret 2020. Status pandemi global menandakan bahwa penyebaran virus *corona* berlangsung sangat

cepat hingga hampir tidak ada negara yang dapat memastikan untuk terhindar dari virus *corona* (Widiyani, 2020).

MODEL SIR

Pemodelan matematika adalah proses mengontruksi suatu masalah untuk menggambarkan perilaku dinamik suatu sistem (Giordano et al., 2003). Model matematika yang sering digunakan untuk penyakit menular adalah model *SIR*. Model *SIR* menggunakan sistem persamaan diferensial yang menggambarkan laju perubahan pada banyaknya individu yang rentan atau *susceptible* (*S*), banyaknya individu yang terinfeksi penyakit menular atau *infected* (*I*) dan banyaknya individu yang sembuh dari penyakit menular atau *recovered* (*R*) didalam sebuah populasi (Brauer, 2008 dan Hethcote 1994). Berikut ini adalah diagram kompartemen untuk model *SIR*:



Gambar 1. Model *SIR* (Murray, 1993)

dengan persamaan diferensialnya ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \alpha I \\ \frac{dR}{dt} &= \alpha I \end{aligned}$$

Dengan $N(t)$ merupakan total populasi dari kompartemen *susceptible* (*S*), *infected* (*I*), dan *recovered* (*R*) pada waktu t : $S(t) + I(t) + R(t) = N(t)$.

TITIK EKUILIBRIUM

Titik ekuilibrium *T* adalah titik yang didapatkan ketika suatu sistem ada pada saat keadaan setimbang. Ada dua kemungkinan titik ekuilibrium pada model penularan penyakit, yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit (T^0) dan titik ekuilibrium endemik (T^*).

Diberikan suatu sistem dinamik dengan bentuk :

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), x, f \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$$

Titik $T \in \mathbb{R}^n$ disebut titik ekuilibrium dari sistem dinamik di atas, jika $f(T) = 0$ (Tu, 1994).

BILANGAN REPRODUKSI DASAR

Bilangan reproduksi dasar (*basic reproduction number*) Γ_0 adalah rata-rata dari banyaknya populasi rentan yang terinfeksi secara langsung dari populasi

lain yang telah terinfeksi (Giesecke, 2002). Γ_0 merupakan salah satu parameter yang akan digunakan untuk menentukan tingkat penyebaran penyakit.

Jika $\Gamma_0 < 1$ maka tidak ada penyebaran penyakit.

Jika $\Gamma_0 > 1$ maka penyebaran penyakit akan meningkat hingga menjadi pandemi atau wabah.

Jika $\Gamma_0 = 1$ maka ada penyebaran penyakit tetapi tidak menimbulkan wabah.

Nilai Γ_0 dapat ditentukan dengan menggunakan matriks *next generation* (Driessche dan Watmough, 2002). Matriks *next generation* K yang terdiri dari matriks U dan V berukuran $n \times n$ dengan $U = \frac{\partial u_i(T^0)}{\partial x_j}$ dan $V = \frac{\partial v_i(T^0)}{\partial x_j}$. Didefinisikan matriks K sebagai berikut:

$$K = UV^{-1}$$

Nilai dari infeksi sekunder pada individu rentan adalah radius spektral atau maksimum modulus nilai eigen dari matriks K (Driessche dan Watmough, 2002) sehingga

$$\Gamma_0 = \rho(UV^{-1}).$$

ANALISIS KESTABILAN

Untuk menganalisis kestabilan suatu sistem dinamik digunakan matriks Jacobian. Matriks Jacobian adalah matriks ber-ordo $n \times n$ yang melibatkan fungsi $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dengan komponen fungsi f_1, f_2, \dots, f_n , dan $\frac{\partial f_i(T)}{\partial x_j}$ adalah entri matriks pada baris ke- i dan kolom ke- j yang merupakan derivatif pertama parsial dari f_i terhadap variabel $x_j, i = 1, 2, 3, \dots, n; j = 1, 2, 3, \dots, n$ pada titik ekuilibrium T . Matriks

$$J_f(T) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(T)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(T)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(T)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(T)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(T)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(T)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(T)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(T)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(T)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

dinamakan matriks Jacobian dari f di titik ekuilibrium T (Kocak dan Hole, 1991).

Kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit T^0 adalah stabil tanpa gejala jika $\Gamma_0 > 1$ dan tidak stabil jika $\Gamma_0 < 1$. (Zhang & Liu, 2008). Kestabilan suatu titik ekuilibrium menentukan apakah solusi sistem dinamik mendekat atau menjauhi dari titik ekuilibrium tersebut. Secara umum, perilaku kestabilan titik ekuilibrium sebagai berikut (Tu, 1994):

1. Sistem stabil, jika setiap nilai eigen real memiliki nilai tak positif ($\lambda_i \leq 0, \lambda_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, n$) atau setiap bagian real dari nilai eigen kompleks bernilai tak positif ($Re(\lambda_i) \leq 0, \lambda_i \in \mathbb{C}, \forall i = 1, \dots, n$).
2. Sistem stabil asimtotik, jika setiap nilai eigen memiliki nilai real negatif ($\lambda_i < 0, \lambda_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, n$) atau setiap bagian real dari nilai eigen kompleks bernilai negatif ($Re(\lambda_i) < 0, \lambda_i \in \mathbb{C}, \forall i = 1, \dots, n$).
3. Sistem stabil murni, jika setiap bagian real dari nilai eigen kompleks memiliki nilai nol atau imajiner murni ($Re(\lambda_i) = 0, \lambda_i \in \mathbb{C}, \forall i = 1, \dots, n$).
4. Sistem tidak stabil, jika ada nilai eigen real memiliki nilai positif $\exists \lambda_i > 0, \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ atau ada bagian real dari nilai eigen kompleks bernilai positif ($\exists \lambda_i \in \mathbb{C}, Re(\lambda_i) > 0, \lambda_i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, n$).

KRITERIA KESTABILAN ROUTH-HURWITZ

Kriteria Routh-Hurwitz merupakan suatu metode untuk menentukan nilai eigen yang berasal dari matriks Jacobian di titik ekuilibrium. Misalkan suatu persamaan karakteristik sistem dinamik disajikan dalam bentuk polinomial sebagai berikut:

$$a_0s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + a_3s^{n-3} + \dots + a_n = 0$$

Jika persamaan karakteristik di atas mempunyai akar-akar dengan bagian real negatif maka $\frac{a_1}{a_0} > 0, \frac{a_2}{a_0} > 0, \dots, \frac{a_n}{a_0} > 0$ (Hanh, 1967).

Selanjutnya, susun persamaan karakteristiknya menjadi

$$\begin{matrix} s^n & a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\ s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ s^0 & x & y & z & \dots \end{matrix}$$

dengan

$$b_1 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1}, b_2 = \frac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1}, b_3 = \frac{a_1a_6 - a_0a_7}{a_1}, \dots$$

$$c_1 = \frac{b_1a_3 - a_1b_2}{b_1}, c_2 = \frac{b_1a_5 - a_1b_3}{b_1}, c_3 = \frac{b_1a_7 - a_1b_4}{b_1}, \dots$$

Sistem dinamik dikatakan stabil/stabil asimtotik atau setiap bagian real dari nilai eigen kompleks bernilai negatif jika dan hanya jika elemen pada kolom pertama ($a_0, a_1, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2 \dots$) memiliki tanda koefisien yang sama.

ANALISIS INDEKS SENSITIVITAS

Analisis indeks sensitivitas dilakukan untuk mengetahui pengaruh perubahan nilai parameter

pada sistem dinamik terhadap nilai rasio bilangan reproduksi dasar dan titik kesetimbangan endemik. Indeks sensitivitas adalah nilai pengaruh dari setiap parameter penyebaran penyakit dan diperoleh dari indeks sensitivitas ξ dalam D yang terdiferensialkan pada parameter p dan didefinisikan sebagai berikut:

$$\xi_p^Q = \frac{\partial D}{\partial p} \times \frac{p}{D}$$

dimana D adalah variabel yang akan dianalisis dan p adalah parameter (Chitnis dkk., 2008).

KONTROL OPTIMAL

Kontrol optimal adalah suatu model optimasi untuk mencari nilai fungsi kontrol yang akan diproses didalam sistem dinamik agar memenuhi kendala (*constraint*) dengan tujuan meminimumkan atau memaksimumkan fungsi objektif. Fungsi objektif melibatkan fungsi kontrol $u(t)$ dan variabel state $x(t)$ yang akan dioptimalkan dan bergantung pada waktu t . Untuk mengontrol trayektori/variabel state $x(t)$ pada waktu tertentu dapat ditentukan nilai optimalnya dari kontrol optimal $u^*(t)$ dan trayektori $x^*(t)$ dari permasalahan telah diberikan.

Secara umum, persamaan masalah kontrol optimal dirumuskan sebagai berikut:

Maksimumkan

$$G(t) = L(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} M(x(t), u(t), t) dt$$

dengan kendala

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

dengan kondisi awal $x(t_0) = x_0$, kondisi akhir $x(t_f) = x_f$ dan $u(t)$ sebagai fungsi kontrol pada waktu t . Kemudian, t_0 dan t_f masing-masing adalah waktu awal dan akhir pemberian kontrol, sedangkan L, M dan f adalah fungsi skalar. Kontrol $u^*(t)$ merupakan nilai fungsi kontrol optimalnya, jika disubstitusikan ke dalam sistem persamaan diatas maka akan memperoleh kontrol optimal $x^*(t)$ dan pada saat yang sama dapat mengoptimalkan masalah optimal kontrol. (Lewis & Syrmos, 2012).

Masalah kontrol optimal yang bersifat non-linier ada yang tidak mempunyai solusi analitik, oleh karena itu diperlukan metode lain untuk mengestimasi dari masalah kontrol tersebut. Metode Prinsip Maksimum Pontryagin merupakan salah satu metode yang dapat menyelesaikan masalah kontrol optimal bersifat non-linier.

PRINSIP MAKSIMUM PONTRYAGIN

Berikut prosedur analitik dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin (Naidu, 2002).

1. Bentuk fungsi Hamiltonian

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = M(x(t), u(t), \lambda(t), t) + \lambda'(t)f(x(t), u(t), \lambda(t), t)$$

2. Tentukan nilai maksimum H terhadap semua vektor kontrol

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

Kemudian diperoleh nilai dari kontrol optimal $u^*(t)$ yang memungkinkan dengan

$$u^*(t) = h(x^*(t), \lambda^*(t), t)$$

3. Dengan menggunakan $u^*(t)$ yang telah diperoleh pada langkah 2, akan diperoleh fungsi Hamiltonian optimal yaitu H^* .

$$H^*(t)(x^*(t), h(x^*(t), \lambda^*(t), t), \lambda^*(t), t) = H^*(x^*(t), \lambda^*(t), t)$$

4. Selesaikan persamaan *state* dan *costatena*

$$\dot{x}^*(t) = \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right) \text{ dan } \dot{\lambda}^*(t) = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)'$$

Dengan kondisi awal x_0 dan kondisi akhir x_f , diperoleh

$$\left[H^* + \frac{\partial S}{\partial t} \right]_{t_f} \delta t_f + \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right) - \lambda^*(t) \right]'_{t_f} \delta x_f = 0$$

5. Terakhir, substitusikan semua hasil yang didapatkan pada langkah 4 ke persamaan $u^*(t)$ pada langkah 2 untuk memperoleh kontrol optimalnya. (Naidu, 2002).

METODE PENELITIAN

JENIS PENELITIAN

Penelitian merupakan penelitian studi literatur yang membahas tentang model dinamik pada pandemi Covid-19 dengan kontrol optimal. Penelitian ini terinspirasi dari Mandal et al., (2020) dan menggabungkan dengan metode semi eksperimen yang menggunakan pendekatan rekonstruksi pemodelan, menentukan titik ekuilibrium serta bilangan reproduksi dasar, menganalisis kestabilan sistem, menampilkan simulasi numerik, dan menganalisis sensitivitas parameter terhadap respon solusi numerik. Kemudian respon solusi tersebut dibandingkan dengan respon dari kasus Covid-19 di Jawa Timur, Indonesia.

RANCANGAN PENELITIAN

Rancangan penelitian dimulai dari studi literatur, menyusun asumsi dan batasan masalah untuk

merekonstruksi model dinamik *SEQIR*. Selanjutnya, menentukan titik ekuilibrium bebas penyakit maupun endemik dan bilangan reproduksi dasar. Lalu peneliti menganalisis kestabilan sistem, merekonstruksi solusi kontrol optimal, dan menampilkan simulasi numerik dengan dan tanpa kontrol optimal dari model *SEQIR* dengan nilai parameter dan nilai awal yang diadopsi dari Mandal et al., (2020). Kemudian hasilnya dibandingkan dengan kasus Covid-19 yang terjadi di Jawa Timur dan dilakukan juga analisis sensitivitas parameter terhadap respon solusi kuantitatif.

SUMBER DATA

Data yang digunakan adalah data sekunder dan data hasil eksperimen dengan variasi perubahan nilai parameter. Sumber data utama dari Mandal et al., (2020) dan data Satgas Covid-19 di Jawa Timur dari tautan: (<http://infocovid19.jatimprov.go.id>)

ANALISIS DATA

Analisis data pada penyebaran Covid-19 dengan kontrol optimal dilakukan dengan tahapan sebagai berikut: (1) Menyusun asumsi dan batasan masalah, (2) Merekonstruksi model *SEQIR*, (3) Menentukan titik ekuilibrium dan bilangan reproduksi dasar, (4) Menganalisis stabilitas sistem & sensitivitas parameter, (5) Merekonstruksi solusi model dengan dan tanpa kontrol optimal, (6) Menentukan indeks sensitivitas yang "proporsional" untuk simulasi, dan (7) Melakukan perbandingan respon solusi dari kasus New Delhi, India dan kasus Jawa Timur, Indonesia.

HASIL DAN PEMBAHASAN

REKONSTRUKSI MODEL *SEQIR*

Model *SEQIR* merupakan model dinamik penyebaran Covid-19 dengan kontrol optimal yang diadopsi dari Mandal et., (2020) dan terdiri dari lima populasi yaitu *Susceptibel (S)*, *Exposed (E)*, *Quarantine (Q)*, *Infected (I)*, dan *Recovered (R)* populasi sembuh. Model *SEQIR* yang diterapkan di India menggunakan kontrol optimal berupa kebijakan *lockdown* pada populasi rentan dan populasi sembuh. Asumsi-asumsi yang digunakan untuk merekonstruksi model *SEQIR* sebagai berikut:

1. Populasi tertutup, artinya faktor imigrasi dan emigrasi diabaikan, dengan total populasi (N) pada waktu t , dinotasikan dengan

$$N = S + E + Q + I + R$$

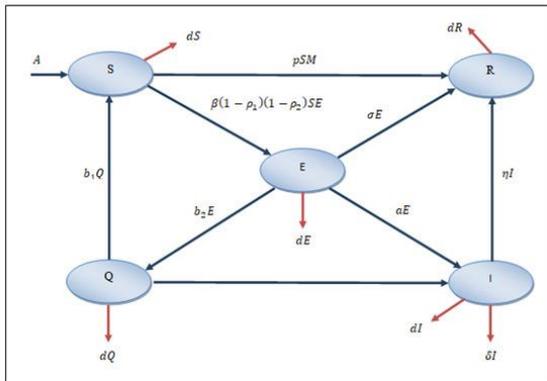
2. Total populasi sehat dan dapat menularkan penyakit diasumsikan dengan (*A*) dan β merupakan rasio penularan Covid-19.

3. Penularan Covid-19 dari populasi rentan (*S*) ke populasi terpapar (*E*) bergantung dengan tindak pencegahannya, ketika tidak menerapkan tindak pencegahan dinotasikan ρ_1 dengan $0 < \rho_1 < 1$. Jika menerapkan tindak pencegahan penularan penyakit seperti menggunakan masker, mencuci tangan dengan sabun, dan lainnya maka dinotasikan ρ_2 dengan $0 < \rho_2 < 1$.

4. Upaya pemerintah dalam mengendalikan penularan Covid-19 yaitu menerapkan kebijakan *lockdown* yang dinotasikan dengan *M*, $0 < M < 1$. Ketika *M* = 0 artinya tanpa *lockdown* dan ketika *M* = 1 artinya total *lockdown* dengan rasio implementasi kebijakan yang dinotasikan *p*.

5. Populasi sembuh (*R*) tidak bisa menjadi populasi rentan (*S*) Kembali.

Berdasarkan asumsi-asumsi dan batasan masalah di atas, diagram kompartemen dinamik pandemi Covid-19 dengan model *SEQIR* disajikan serikut ini



Gambar 1. Model diagram kompartemen dinamik penyebaran Covid-19 (Mandal et al., 2020)

Berdasarkan diagram kompartemen di atas, model dinamik Covid-19 dinyatakan dalam sistem persamaan diferensial berikut ini:

$$\frac{dS}{dt} = A - \beta(1 - \rho_1)(1 - \rho_2)SE + b_1Q - oS - pSM. \tag{1}$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta(1 - \rho_1)(1 - \rho_2) - b_2E - \alpha E - \sigma E - oE. \tag{2}$$

$$\frac{dQ}{dt} = b_2E - b_1Q - cQ - oQ. \tag{3}$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha E + cQ - (\eta + o + \delta)I. \tag{4}$$

$$\frac{dR}{dt} = \eta I + \sigma E - oR + pSM. \tag{5}$$

Dengan kondisi $S(0) \geq 0, E(0) \geq 0, Q(0) \geq 0, I(0) \geq 0, R(0) \geq 0$.

Dalam artikel ini, nilai-nilai parameter diadopsi dari Mandal et al., (2020) dan eksperimen oleh peneliti dan disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1 Nilai dan parameter

Parameter	New Delhi	Jawa Timur
<i>A</i>	800	400
β	0.025	0.05
ρ_1	0.72	0.72
ρ_2	0.82	0.82
<i>o</i>	0.0036	0.0036
<i>b</i> ₁	0.045	0.045
<i>b</i> ₂	0.685	0.685
α	0.25	0.25
η	0.25	0.25
σ	0.14	0.14
<i>c</i>	0.12	0.12
δ	0.0232	0.0232
<i>M</i>	0.933	0.5
<i>p</i>	0.923	0.923

TITIK EKUILIBRIUM

a. Titik ekuilibrium bebas penyakit

Titik ekuilibrium bebas penyakit $T^0 = (S^0, E^0, Q^0, I^0, R^0)$ dengan $E^0 = Q^0 = I^0 = 0$.

Dengan membuat ruas kanan pada model dinamik (1)-(5) sama dengan nol diperoleh bahwa:

$$A - (o + pM)S = 0 \Rightarrow S^0 = \frac{A}{o+pM} \tag{6}$$

dan

$$-oR + pSM = 0$$

$$R = pSM$$

Substitusi nilai S^0 diperoleh

$$R^0 = \frac{ApM}{o(o+pM)}. \tag{7}$$

Jadi, diperoleh $T^0 = (\frac{A}{o+pM}, 0, 0, 0, \frac{ApM}{o(o+pM)})$

b. Titik ekuilibrium endemik

Titik ekuilibrium endemik terjadi ketika ada populasi yang menyebarkan Covid-19. Karena pada kondisi endemik terjadi penyebaran Covid-19 maka $E^* \neq 0, Q^* \neq 0, I^* \neq 0$.

Analog dengan penentuan titik ekuilibrium bebas penyakit, dengan membuat ruas kanan pada model dinamik (1)-(5) sama dengan nol, diperoleh titik ekuilibrium endemik adalah $T^* = (S^*, E^*, Q^*, I^*, R^*)$, dengan

$$S^* = \frac{b_2 + \alpha + \sigma + o}{\beta(1 - \rho_1)(1 - \rho_2)}$$

$$\begin{aligned}
 E^* &= (b_1 + c + \\
 & o) \frac{A\beta(1 - \rho_1)(1 - \rho_2) - (o + pM)(b_2 + \alpha + \sigma + o)}{\beta(1 - \rho_1)(1 - \rho_2)\{b_2(c + o) + (\alpha + \sigma + o)(b_1 + c + o)\}} \\
 Q^* &= b_2 \frac{A\beta(1 - \rho_1)(1 - \rho_2) - (o + pM)(b_2 + \alpha + \sigma + o)}{\beta(1 - \rho_1)(1 - \rho_2)\{b_2(c + o) + (\alpha + \sigma + o)(b_1 + c + o)\}} \\
 I^* &= \frac{\{\alpha(b_1 + c + o)b_2c\}\{A\beta(1 - \rho_1)(1 - \rho_2) - (o + pM)(b_2 + \alpha + \sigma + o)\}}{\beta(1 - \rho_1)(1 - \rho_2)\{b_2(c + o) + (\alpha + \sigma + o)(b_1 + c + o)\}} \\
 R^* &= \frac{\eta I^* + \sigma E^* + pMS^*}{o}. \tag{8}
 \end{aligned}$$

BILANGAN REPRODUKSI DASAR

Untuk mendapatkan bilangan reproduksi dasar digunakan metode matriks *next generation* yang diperoleh dari populasi E, Q , dan I sehingga diperoleh berikut:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U} &= \begin{pmatrix} \beta(1 - \rho_1)(1 - \rho_2)SE \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dan} \\
 \mathcal{V} &= \begin{pmatrix} (b_2 + \alpha + \sigma + o)E \\ (b_1 + c + o)Q - b_2E \\ (\eta + o + \delta)I - \alpha E - cQ \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Selanjutnya bentuk matriks Jacobian dari \mathcal{U} dan \mathcal{V} pada titik ekuilibrium bebas penyakit sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 U &= \begin{pmatrix} \beta(1 - \rho_1)(1 - \rho_2) \frac{A}{o + pM} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 V &= \begin{pmatrix} b_2 + \alpha + \sigma + o & 0 & 0 \\ -b_2 & b_1 + c + o & 0 \\ -\alpha & -c & \eta + o + \delta \end{pmatrix}, \text{ dan} \\
 V^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{b_2 + \alpha + \sigma + o} & 0 & 0 \\ \frac{1}{-b_2} & \frac{1}{b_1 + c + o} & 0 \\ \frac{1}{-\alpha} & \frac{1}{-c} & \frac{1}{\eta + o + \delta} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh matriks *next generation* berikut

$$\begin{aligned}
 K &= UV^{-1} \\
 \Leftrightarrow K &= \begin{pmatrix} \beta(1 - \rho_1)(1 - \rho_2) \frac{A}{o + pM} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \\
 & \begin{pmatrix} \frac{1}{b_2 + \alpha + \sigma + o} & 0 & 0 \\ \frac{1}{-b_2} & \frac{1}{b_1 + c + o} & 0 \\ \frac{1}{-\alpha} & \frac{1}{-c} & \frac{1}{\eta + o + \delta} \end{pmatrix} \\
 \Leftrightarrow K &= \begin{pmatrix} \frac{A\beta(1 - \rho_1)(1 - \rho_2)}{(o + pM)(b_2 + \alpha + \sigma + o)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Nilai eigen dari matriks UV^{-1} adalah

$$\lambda_1 = \frac{A\beta(1 - \rho_1)(1 - \rho_2)}{(o + pM)(b_2 + \alpha + \sigma + o)}; \lambda_2 = 0; \lambda_3 = 0. \tag{9}$$

Bilangan reproduksi dasar (Γ_0) adalah *spectral radius* dari (UV^{-1}) , yaitu $\Gamma_0 = (UV^{-1}) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = \frac{A\beta(1 - \rho_1)(1 - \rho_2)}{(o + pM)(b_2 + \alpha + \sigma + o)}$

Dengan mensubstitusi nilai parameter dari Tabel 1 ke persamaan (9), diperoleh $\Gamma_0 = 1.087$ Karena $\Gamma_0 > 1$ maka Covid-19 telah menyebar dan menjadi pandemik di New Delhi, India.

ANALISIS KESTABILAN

Pada titik ekuilibrium bebas penyakit matriks Jacobiannya adalah

$$\begin{pmatrix} -(o + pM) & -\beta(1 - \rho_1)(1 - \rho_2)S^0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta(1 - \rho_1)(1 - \rho_2)S^0 - (b_2 + \alpha + \sigma + o) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & -(b_1 + c + o) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & c & -(\eta + o + \delta) & 0 \\ pM & \sigma & 0 & \eta & -o \end{pmatrix}$$

Nilai eigen diperoleh dari

$$|J - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -(o + pM) - \lambda & -\beta(1 - \rho_1)(1 - \rho_2)S^0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta(1 - \rho_1)(1 - \rho_2)S^0 - (b_2 + \alpha + \sigma + o) - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & -(b_1 + c + o) - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & c & -(\eta + o + \delta) - \lambda & 0 \\ pM & \sigma & 0 & \eta & -o - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Maka persamaan karakteristiknya adalah $(\lambda + o)(\lambda + o + pM)(\lambda + b_1 + c + o)(\lambda + \eta + o + \delta)(\lambda + (1 - \Gamma_0)) = 0$. (10)

Dari persamaan (10) dan nilai parameter pada Tabel 1, nilai eigen dari matriks Jacobian adalah real negatif jika dan hanya jika $\Gamma_0 < 1$. Jadi, titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik (lokal) karena nilai eigen dari matriks Jacobian bernilai real negatif.

Pada titik ekuilibrium endemik matriks Jacobiannya adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 J(T^*) &= \\
 & \begin{pmatrix} a_{11} & -\beta(1 - \rho_1)(1 - \rho_2)S^* & b_1 & 0 & 0 \\ \beta(1 - \rho_1)(1 - \rho_2)E^* & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & -(b_1 + c + o) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & c & -(\eta + o + \delta) & 0 \\ pM & \sigma & 0 & \eta & -o \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Nilai eigen diperoleh dari

$$|J - \lambda I| = 0$$

Dimana, $a_{11} = -\beta(1 - \rho_1)(1 - \rho_2)E^* - (o + pM)$
 $a_{22} = \beta(1 - \rho_1)(1 - \rho_2)S^* - (b_2 + \alpha + \sigma + o)$
 Sehingga didapatkan persamaan karakteristik (11) dari matriks Jacobian pada titik ekuilibrium endemik sebagai berikut :

$$(\lambda + o)(\lambda + \eta + o + \delta)(\lambda^3 + C_1\lambda^2 + C_2\lambda + C_3) = 0 \tag{11}$$

dengan $C_1 = 2o + b_1 + c + pM + \beta(1 - \rho_1)(1 - \rho_2)$, $C_2 = ((b_1 + c + o)(o + pM + \beta(1 - \rho_1)(1 - \rho_2)E^*) + (b_2 + \alpha + \sigma + o)\beta(1 - \rho_1)(1 - \rho_2))$, $C_3 = \{(b_2 + \alpha + \sigma + o)(b_1 + c + o) - b_1b_2\}\beta(1 - \rho_1)(1 - \rho_2)E^*$.

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz maka sistem dikatakan stabil asimtotik.

Karena dua akar pertama pada persamaan (11) adalah bilangan real negatif dan akar yang tersisa adalah akar dari polinomial derajat tiga dan dengan mensubstitusikan nilai dari Tabel 1 maka nilai $C_1 = 1.03185$, $C_2 = 1.01627$, $C_3 = 0.02268$ karena nilai C_1, C_2, C_3 positif dapat disimpulkan bahwa sistem persamaan (1)-(5) stabil asimtotik di sekitar titik ekuilibrium endemik.

KONTROL OPTIMAL DENGAN PRINSIP MAKSIMUM PONTYAGIN

Dengan merujuk artikel dari Mandal et al., (2020) masalah kontrol optimal dirumuskan sebagai berikut:

$$\min_{M \in \Omega} J(M) = \int_0^{tf} [\zeta_1 I(t) + \zeta_2 M(t)] dt. \tag{12}$$

dengan ζ_1 sebagai batasan jumlah pada populasi yang terinfeksi dan ζ_2 sebagai batasan pada kebijakan pemerintah yaitu *lockdown*.

Selanjutnya, Prinsip Maksimum Pontryagin digunakan untuk mendapatkan kondisi yang diperlukan untuk kontrol optimal.

Diperoleh fungsi Lagrangian

$$L(I, M) = \zeta_1 I(t) + \zeta_2 M(t). \tag{13}$$

1. Diperoleh fungsi Hamiltonian adalah

$$H(I, M, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) = L(I, M) + \lambda_1(t) \frac{dS}{dt} + \lambda_2(t) \frac{dE}{dt} + \lambda_3(t) \frac{dQ}{dt} + \lambda_4(t) \frac{dI}{dt} + \lambda_5(t) \frac{dR}{dt}. \tag{14}$$

dengan

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1(t) &= -\frac{\partial H}{\partial S} = (\beta(1 - \rho_1)(1 - \rho_2)E + o + pM)\lambda_1 - \beta(1 - \rho_1)(1 - \rho_2)E\lambda_2 - \lambda_5 pM, \\ \dot{\lambda}_2(t) &= -\frac{\partial H}{\partial E} = \beta(1 - \rho_1)(1 - \rho_2)S\lambda_1 + (b_2 + \alpha + \sigma + o - \beta(1 - \rho_1)(1 - \rho_2)S)\lambda_2 - b_2\lambda_3 - \alpha\lambda_4 - \sigma\lambda_5, \\ \dot{\lambda}_3(t) &= -\frac{\partial H}{\partial Q} = (b_1 + c + o)\lambda_3 - \lambda_1 b_1 - c\lambda_4, \\ \dot{\lambda}_4(t) &= -\frac{\partial H}{\partial I} = (\eta + o + \delta)\lambda_4 - c_1 - \eta\lambda_5, \\ \dot{\lambda}_5(t) &= -\frac{\partial H}{\partial R} = o\lambda_5. \end{aligned} \tag{15}$$

dengan kondisi transversal $\lambda(tf) = 0$,

2. Ditetapkan nilai maksimum H terhadap semua vektor control yang dipenuhi oleh

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial M} \right) = \frac{d}{dt} (\zeta_2 + (\lambda_5 - \lambda_1)pS) \\ &= -\dot{\lambda}_1 pS - \lambda_1 p\dot{S} + \dot{\lambda}_5 pS - \lambda_5 p\dot{S} \end{aligned}$$

Substitusikan dari persamaan (15), diperoleh

$$(kE(\lambda_2 - \lambda_1) - o\lambda_1)pS + (A - kSE + b_1Q - oS)(\lambda_5 - \lambda_1)p + poS\lambda_5. \tag{16}$$

3. Ditetapkan fungsi Hamiltonian yang optimal, dan karena parameter M belum eksplisit maka menggunakan derivatif kedua dan diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial M} \right) = [k(E(\dot{\lambda}_2 - \dot{\lambda}_1) + (\lambda_2 - \lambda_1)\dot{E}) - o\dot{\lambda}_1]pS + (kSE(\lambda_2 - \lambda_1) - o\lambda_1)p\dot{S} + (A - k(\dot{S}E + \dot{E}S) + b_1\dot{Q} - o\dot{S})(\lambda_5 - \lambda_1)p + (A - kSE + b_1Q - oS)(\dot{\lambda}_5 - \dot{\lambda}_1)p + poS\dot{\lambda}_5 + p\dot{o}S\dot{\lambda}_5. \end{aligned} \tag{17}$$

Dengan $k = \beta(1 - \rho_1)(1 - \rho_2)$.

4. Ditetapkan persamaan *state* dan *costatenya*

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial M} \right) &= [kEp((\lambda_5 - \lambda_1) + op^2S(\lambda_5 - \lambda_1) - p^2S(kE(\lambda_5 - \lambda_1) - o\lambda_1) + (kpSE + opS)(\lambda_5 - \lambda_1)p + (A - kSE + b_1Q - oS)(\lambda_5 - \lambda_1)p - p^2So\lambda_5)M(t) + (k^2ES(\lambda_1 - \lambda_2) + Ek\lambda_2(b_2 + \alpha + \sigma + o) - (b_2\lambda_3 + \alpha\lambda_4 + \sigma\lambda_5)kE - k^2E^2(\lambda_1 - \lambda_2) - oK\lambda_1E + k(\lambda_2 - \lambda_1)(kSE - (b_2 + \alpha + \sigma + o)E))]pS - (opkSE + o^2pS)\lambda_1 + opkSE\lambda_2 + (kE(\lambda_2 - \lambda_1) - o\lambda_1)(A - kSE + b_1Q - oS)p + [A - k(A - kSE + b_1Q - oS)E - kS(kSE - b_2E - \alpha E - \sigma E - oE) + b_1(b_2E - (b_1 + c + o)Q - o(A - kSE + b_1Q - oS))]p(\lambda_5 - \lambda_1) + (A - kSE + b_1Q - oS)(o\lambda_5 - (kE + o)\lambda_1 + kE\lambda_2)p + pSo^2\lambda_5 + poS\lambda_5(A - kSE + b_1Q - oS). \end{aligned} \tag{18}$$

Dari persamaan (18) bisa ditulis menjadi $\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial M} \right) = \phi_1(t)M(t) + \phi_2(t) = 0$

dengan

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= [kEp((\lambda_5 - \lambda_1) + op^2S(\lambda_5 - \lambda_1) - p^2S(kE(\lambda_5 - \lambda_1) - o\lambda_1) + (kpSE + opS)(\lambda_5 - \lambda_1)p + (A - kSE + b_1Q - oS)(\lambda_5 - \lambda_1)p - p^2So\lambda_5), \\ \phi_2(t) &= (k^2ES(\lambda_1 - \lambda_2) + Ek\lambda_2(b_2 + \alpha + \sigma + o) - (b_2\lambda_3 + \alpha\lambda_4 + \sigma\lambda_5)kE - k^2E^2(\lambda_1 - \lambda_2) - oK\lambda_1E + k(\lambda_2 - \lambda_1)(kSE - (b_2 + \alpha + \sigma + o)E))]pS - (opkSE + o^2pS)\lambda_1 + opkSE\lambda_2 + (kE(\lambda_2 - \lambda_1) - o\lambda_1)(A - kSE + b_1Q - oS)p + [A - k(A - kSE + b_1Q - oS)E - kS(kSE - b_2E - \alpha E - \sigma E - oE) + b_1(b_2E - (b_1 + c + o)Q - o(A - kSE + b_1Q - oS))]p(\lambda_5 - \lambda_1) + (A - kSE + b_1Q - oS)(o\lambda_5 - (kE + o)\lambda_1 + kE\lambda_2)p + pSo^2\lambda_5 + poS\lambda_5(A - kSE + b_1Q - oS). \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh penyelesaian singular berikut

$$M_{singular}(t) = -\frac{\phi_2(t)}{\phi_1(t)} \text{ dengan } \phi_1(t) \neq 0 \text{ dan } a \leq -\frac{\phi_2(t)}{\phi_1(t)} \leq b.$$

Agar kondisi kontrol tunggal menjadi optimal, maka $\frac{d}{dt} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial M} \right) = \phi_1(t)$ harus bernilai negatif. Sehingga, kondisi kontrol optimal pada interval nontrivial sebagai berikut:

Jika $\frac{\partial H}{\partial M} < 0$ maka $M^*(t) = b,$

Jika $\frac{\partial H}{\partial M} > 0$ maka $M^*(t) = a,$

Jika $\frac{\partial H}{\partial M} = 0$ maka $M_{singular}(t) = -\frac{\phi_2(t)}{\phi_1(t)}.$

Jadi, kontrol optimal dipenuhi oleh $\phi_1(t) < 0$ dan $a \leq -\frac{\phi_2(t)}{\phi_1(t)} \leq b.$

Berdasarkan Mandal et al., (2020) dan dengan mengestimasi fungsi kontrol sebagai fungsi yang kontinu sepotong-potong (*piecewise continuous function*) didapatkan hasil bahwa nilai $0 \leq M(t) \leq 1.$

ANALISIS SENSITIVITAS

Analisis sensitivitas digunakan untuk menentukan nilai parameter yang berdampak tinggi pada ambang batas penularan Covid-19 yaitu bilangan reproduksi dasar Γ_0 . Indeks sensitivitas ω dalam Γ_0 penulis mempertimbangkan beberapa parameter yang memengaruhi penularan Covid-19 yaitu $A, \beta, \rho_1, \rho_2, \alpha, o, p, M, b_2,$ dan σ . Sesuai dengan definisi indeks sensitivitas didapatkan indeks sensitivitas Γ_0 yang memengaruhi parameter tersebut dan mensubstitusikan nilai parameter artikel pada Tabel 1, diperoleh:

$$\omega_A^{\Gamma_0} = \frac{\partial \Gamma_0}{\partial A} \times \frac{A}{\Gamma_0} = \frac{\beta(1-\rho_1)(1-\rho_2)}{(o+pM)(b_2+\alpha+\sigma+o)} \times \frac{(o+pM)(b_2+\alpha+\sigma+o)A}{A\beta(1-\rho_1)(1-\rho_2)} = 1, \omega_\beta^{\Gamma_0} = 1, \omega_{\rho_1}^{\Gamma_0} = -2.571, \omega_{\rho_2}^{\Gamma_0} = -4.555, \omega_\alpha^{\Gamma_0} = -0.232, \omega_o^{\Gamma_0} = -0.526, \omega_p^{\Gamma_0} = -0.996, \omega_M^{\Gamma_0} = -0.996, \omega_{b_2}^{\Gamma_0} = -0.023, \omega_\sigma^{\Gamma_0} = -0.130.$$

Didapatkan hasil bahwa nilai indeks sensitivitas $1 \leq \omega \leq 0$ adalah parameter A dan β . Jadi, dapat disimpulkan bahwa sensitivitas Γ_0 bergantung pada nilai A dan β .

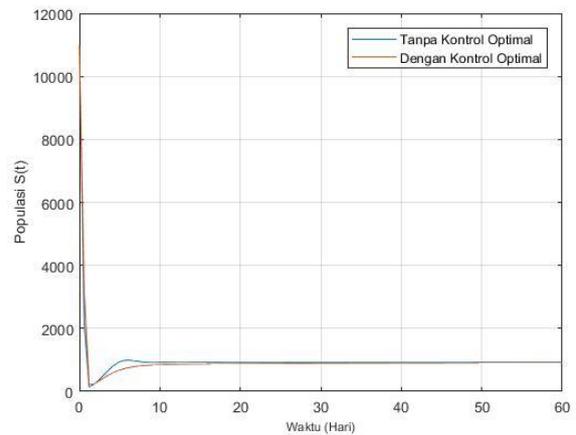
SIMULASI NUMERIK

Simulasi numerik dari model dinamik *SEQIR* diperoleh dengan menggunakan ODE23tb pada Matlab R2017a. Simulasi numerik dilakukan untuk mengetahui respon dari model dinamik *SEQIR* dengan dan tanpa kontrol optimal pada pandemi Covid-19 di New Delhi, India. Kemudian hasil

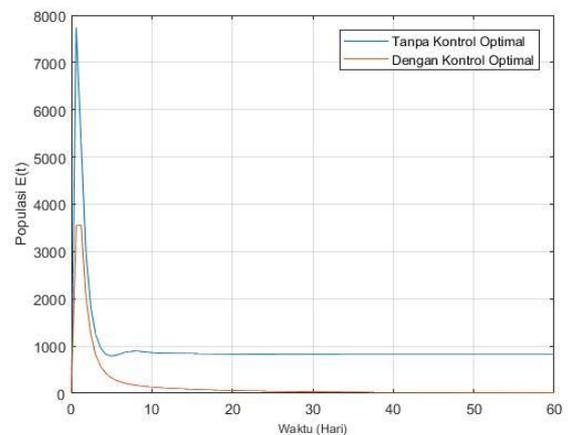
simulasi numerik di New Delhi akan dibandingkan hasilnya dengan data riil dari Satgas Covid-19 di Jawa Timur untuk mengetahui kesesuaiannya. Nilai parameter yang digunakan berdasarkan Tabel 1.

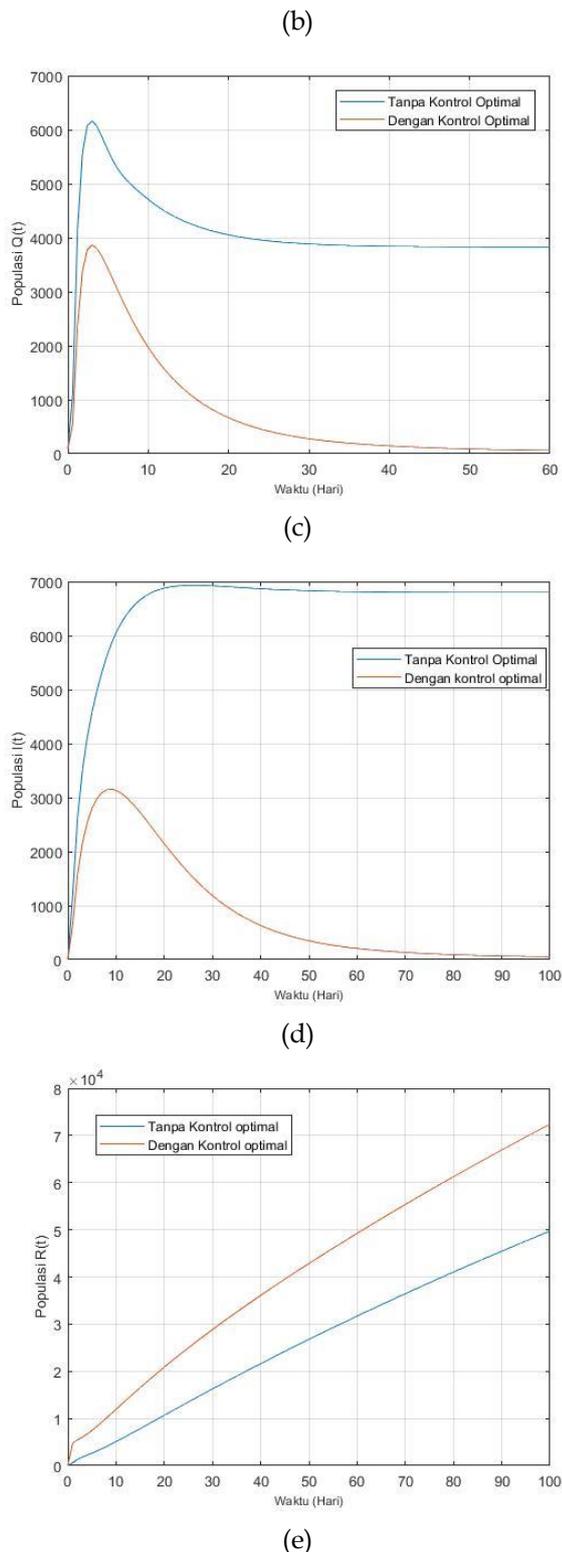
SIMULASI NUMERIK DI NEW DELHI

Populasi penduduk di New Delhi 21,75 juta jiwa, diasumsikan $N = 22.000.000/2000$ dengan 2000 merupakan nilai dari mobilitas penduduk. Dengan menerapkan model dinamik *SEQIR* dengan nilai wal di New Delhi (11000; 20; 80; 2; 0) dan dengan interval waktu [0, 100], serta parameter $\beta = 0.025$ dengan parameter kontrol optimal $M = 0.933$ berdasarkan Mandal et al., (2020) karena di New Delhi menerapkan total *lockdown*, sehingga simulasi dari setiap populasi pada kasus New Delhi dengan dan tanpa kontrol disajikan berikut ini.



(a)





Gambar 32. Grafik perubahan populasi (a) *Susceptible*, (b) *Exposed*, (c) *Quarantine*, (d) *Infected*, dan (e) *Recovered* pada kasus New Delhi

Gambar 3 menunjukkan simulasi semua populasi dengan dan tanpa kontrol optimal di New Delhi, India. Grafik berwarna biru menunjukkan populasi tanpa kontrol optimal atau $M = 0$ dan grafik

berwarna merah menunjukkan populasi dengan kontrol optimal atau $M = 0.933$.

Gambar 3(a) merupakan populasi $S(t)$ dan dihasilkan grafik berwarna biru pada hari ke-2 hingga ke-6 terjadi kenaikan kasus dari 137 menjadi 992. Sedangkan grafik merah pada hari ke-2 hingga ke-40 dari 224 menjadi 911. Artinya semakin bertambahnya waktu, penularan Covid-19 pada populasi $S(t)$ semakin bertambah.

Gambar 3(b) menunjukkan populasi $E(t)$ dengan grafik biru menurun secara signifikan dari 7735 menjadi 892, dan grafik merah dari 3556 menjadi 21. Jadi, populasi $E(t)$ pada awal pandemi melonjak kemudian berangsur menurun karena penerapan tindak pencegahan pemulanan Covid-19 dan total *lockdown*.

Gambar 3(c) merupakan populasi $Q(t)$ dengan grafik biru menurun secara bertahap dari 6163 menjadi 3830 dan signifikan berbeda dengan grafik merah dari 3865 menjadi 24. Jadi, populasi $Q(t)$ pada awal pandemi melonjak kemudian berangsur menurun karena penerapan tindak pencegahan pemulanan Covid-19 dan total *lockdown*.

Gambar 3(d) merupakan populasi $I(t)$ dengan berwarna biru naik secara bertahap hingga 6933 dan pada grafik merah menurun secara bertahap dari 3155 menjadi 55. Artinya, populasi $I(t)$ terjadi penurunan kasus akibat penerapan total *lockdown*.

Gambar 3(e) merupakan populasi $R(t)$, dimana grafik biru lebih rendah kenaikannya daripada grafik merah seiring berjalannya waktu. Jadi, populasi $R(t)$ dari awal pandemi terjadi kenaikan terus menerus seiring bertambahnya.

Jadi, grafik simulasi pada gambar 3 kasus New Delhi signifikan identic dengan grafik simulasi dari Mandal et al., (2020). Grafik simulasi sebelum diterapkan total *lockdown* atau tanpa kontrol optimal pada populasi *susceptible*, *exposed*, *quarantine*, dan *infected* lebih tinggi jumlah populasinya dibandingkan dengan setelah diterapkan total *lockdown* atau dengan kontrol optimal pada waktu t . Persentase efektifitas penerapan kontrol optimal yaitu 40%.

SIMULASI HASIL EKSPERIMEN ANALISIS SENSITIVITAS

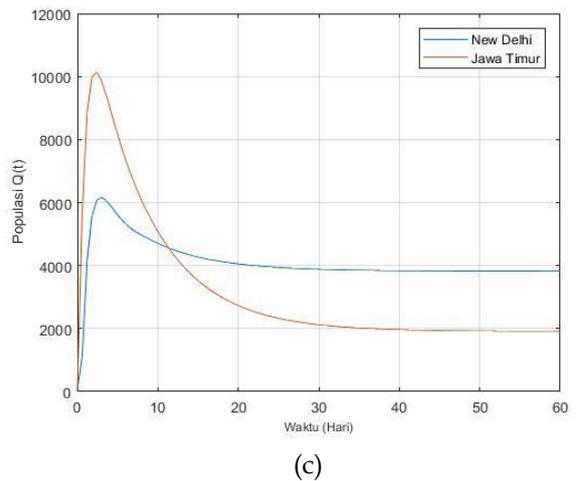
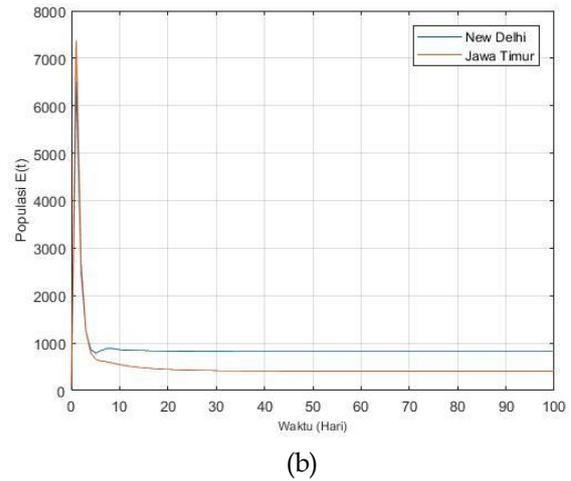
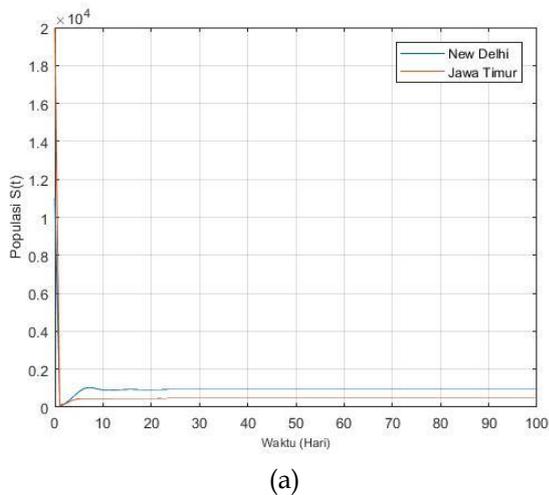
Berdasarkan analisis sensitivitas, indeks sensitivitas Γ_0 dipengaruhi oleh parameter β . Untuk menentukan nilai β yang akan digunakan, maka penulis melakukan eksperimen simulasi model

dinamik *SEQIR*. Berdasarkan eksperimen penulis, batas interval nilai parameter yang disarankan agar dapat digunakan untuk menghasilkan respon yang cukup rasional adalah $0.01 \leq \beta \leq 0.05$.

SIMULASI TANPA KONTROL OPTIMAL DI NEW DELHI DAN JAWA TIMUR

Simulasi pada studi kasus di Jawa Timur dilakukan untuk membandingkan perilaku populasi *susceptible*, *quarantine* dan *infected* antara data riil dari Satgas Covid-19 Jawa Timur dengan data dari kasus New Delhi dengan menggunakan model *SEQIR*. Data riil Satgas Covid-19 Jawa Timur yang digunakan pada periode 6 Agustus-5 Oktober 2020 selama 60 hari. Selama periode tersebut Jawa Timur menerapkan Pembatasan Sosial Berskala Besar (PSBB) atau tidak menerapkan total *lockdown*.

Populasi penduduk di Jawa Timur adalah 39,74 juta yang berbeda dengan populasi penduduk di New Delhi yang 21,75 juta jiwa. Diasumsikan total populasi yang diteliti sebesar $N = 40.000.000/2000$ dengan 2000 merupakan nilai dari mobilitas penduduk. Dengan menerapkan model *SEQIR* dengan nilai awal di Jawa Timur (20000; 60; 0; 0; 0) dengan parameter $\beta = 0.05$ dan nilai awal di New Delhi (11000; 20; 80; 2; 0) dengan parameter $\beta = 0.025$ dan nilai parameter pada Tabel 1. hasil simulasi disajikan berikut:



Gambar 3. Grafik penerapan tanpa kontrol optimal pada kasus New Delhi dan Jawa Timur: (a) *Susceptible*,(b) *Exposed*,(c) *Quarantine*

Gambar 4 menunjukkan simulasi perilaku populasi *susceptible*, *quarantine* dan *infected* tanpa kontrol optimal di New Delhi, India dan Jawa Timur, Indonesia. Grafik biru merupakan grafik kasus di New Delhi dan grafik merah kasus di Jawa Timur.

Gambar 4(a) grafik biru merupakan populasi $S(t)$ di New Delhi dengan populasi awalnya 11000, pada hari pertama 147 kemudian naik hingga hari ke-18 menjadi 934. Sedangkan grafik merah untuk Jawa Timur dengan populasi awalnya 20000, pada hari pertama 39 kemudian naik hingga hari ke-36 menjadi 467.

Pada Gambar 4(b) grafik biru merupakan populasi $E(t)$ di New Delhi pada hari ke-1 6507 menurun drastis menjadi 830 pada hari ke-22. Sedangkan grafik merah menyatakan kasus di Jawa Timur pada hari ke-1 7375 kemudian menurun drastis menjadi 414 pada hari ke-17.

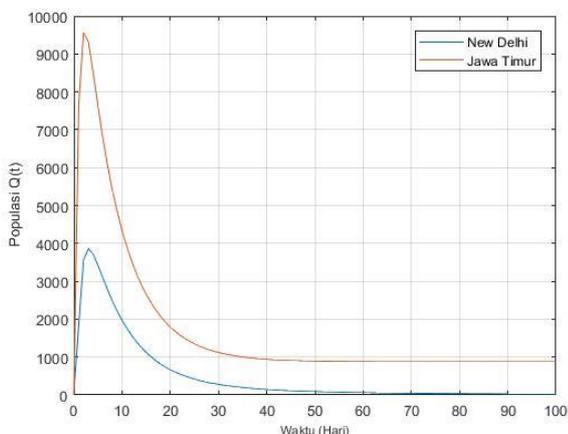
Gambar 4(c) grafik biru merupakan populasi $Q(t)$ di New Delhi. Pada hari ke-3 populasinya 6163 lalu menurun bertahap hingga sekitar 3832 pada hari ke-50. Sedangkan grafik biru yang merupakan populasi $Q(t)$ di Jawa Timur pada hari ke-2 populasi awalnya 10112 lalu menurun bertahap hingga 1917.

Jadi, simulasi pada gambar 4 untuk setiap populasi tanpa kontrol optimal di New Delhi dan Jawa Timur perilaku kurva grafiknya signifikan identik. Rasio jumlah penurunan populasi kasus penularan Covid-19 tanpa kontrol optimal di Jawa Timur lebih tinggi dibandingkan di New Delhi.

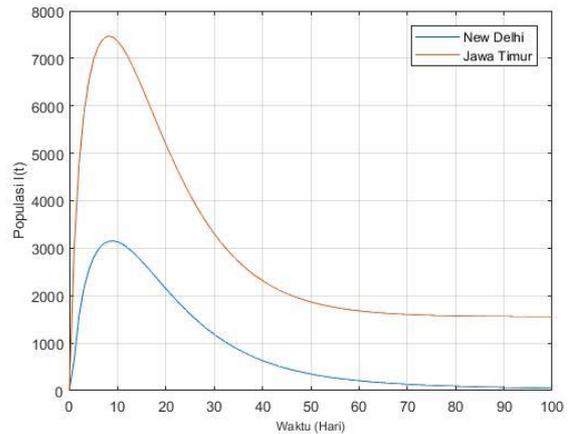
SIMULASI DENGAN KONTROL OPTIMAL DI NEW DELHI DAN JAWA TIMUR

Selain populasi penduduk New Delhi lebih rendah dari pada populasi untuk Jawa Timur, serta pemerintah New Delhi menerapkan total *lockdown* sedangkan Jawa Timur tidak menerapkan total *lockdown*. Berdasarkan jumlah populasi penduduk dan kebijakan pemerintah dalam pencegahan penularan Covid-19 maka diasumsikan rasio penularan penyakit β New Delhi lebih rendah dari pada Jawa Timur

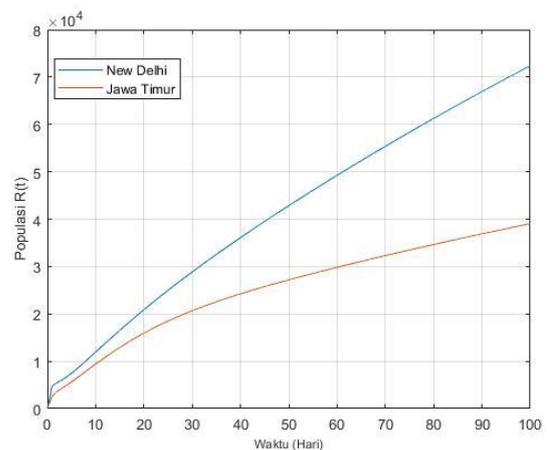
Penerapan model dinamik *SEQIR* dengan nilai awal di New Delhi (11000; 20; 80; 2; 0) nilai parameter $\beta = 0.025$ dan $M = 0.933$ sedangkan nilai awal di Jawa Timur (20000; 60; 0; 0; 0) dengan nilai parameter $\beta = 0.05$ dan parameter kebijakan *lockdwon* $M = 0.5$ karena di Jawa Timur tidak menerapkan total *lockdown* atau hanya menerapkan Pembatasan Sosial Skala Besar (PSBB) serta parameter lainnya pada Tabel 1. diperoleh:



(a)



(b)



(c)

Gambar 5. Grafik penerapan kontrol optimal pada kasus New Delhi dan Jawa Timur: (a) *Quarantine*, (b) *Infected*, dan (c) *Recovered*

Gambar 5 menunjukkan simulasi populasi *quarantine*, *infected* dan *recovered* dengan kontrol optimal di New Delhi, India dan Jawa Timur, Indonesia. Grafik biru merupakan grafik kasus di New Delhi dan grafik merah kasus Jawa Timur.

Pada gambar 5(a) grafik biru merupakan populasi $Q(t)$ di New Delhi dengan populasi sekitar 3864 pada hari ke-3 kemudian berangsur menurun hingga 30 pada hari ke-89. Sedangkan grafik merah merupakan populasi $Q(t)$ di Jawa Timur yang lebih tinggi populasi pada hari ke-2 yaitu 9570 lalu berangsur menurun hingga 877 pada hari ke-80.

Pada gambar 5(b) grafik biru menyatakan populasi $I(t)$ di New Delhi, pada hari ke-9 populasi *infected* 3155 orang lalu menurun secara bertahap hingga 54 pada hari ke-100. Sedangkan grafik merah yang merupakan populasi $I(t)$ di Jawa Timur, yang hari ke-8 populasinya 7473 kemudian menurun

secara bertahap hingga populasinya 1561 pada hari ke-95.

Pada gambar 5(c) grafik biru merupakan populasi $R(t)$ di New Delhi yang terjadi peningkatan populasi hingga hari ke 100 yaitu 72400. Sedangkan grafik merah adalah populasi $R(t)$ di Jawa Timur yang juga mengalami peningkatan hingga hari ke 100 yaitu 39055.

Jadi, simulasi pada gambar 5 menunjukkan setiap populasi dengan kontrol optimal di New Delhi perilaku kurva grafiknya menyerupai kasus di Jawa Timur, hanya berbeda pada jumlah populasi disetiap kasusnya dikarenakan populasi di Jawa Timur hampir 2 kali dari populasi di New Delhi. Dengan adanya penerapan kontrol optimal pada kedua daerah ini memberikan dampak yang berpengaruh dalam mengurangi populasi kasus penularan Covid-19.

PENUTUP

SIMPULAN

Model dinamik $SEQIR$ yang diadopsi dari Mandal et al., (2020) menunjukkan respon yang realistis terhadap penyebaran Covid-19 di New Delhi. Hasil pembahasan diperoleh bilangan reproduksi dasar $\Gamma_0 > 1$ yang artinya Covid-19 sudah menyebar dan telah menjadi pandemi. Berdasarkan analisis kestabilan menunjukkan bahwa model $SEQIR$ berdasarkan titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik, adalah stabil asimtotik. Analisis sensitivitas menunjukkan bahwa indeks sensitivitas A dan β memengaruhi penularan Covid-19. Berdasarkan simulasi numerik dengan dan tanpa kontrol optimal di kasus New Delhi, India yang menerapkan kebijakan total *lockdown* dan kasus yang terjadi di Jawa timur, Indonesia yang tanpa kebijakan total *lockdown* mendemonstrasikan bahwa perilaku kurva grafik solusinya signifikan identik. Rasio jumlah penurunan populasi kasus penularan Covid-19 di Jawa Timur lebih tinggi dibandingkan di New Delhi. Hasil tersebut menegaskan bahwa kebijakan total *lockdown* tidak sepenuhnya efektif untuk mengurangi penyebaran virus Covid-19 di New Delhi, India.

SARAN

Untuk peneliti selanjutnya disarankan dapat menerapkan nilai parameter kontrol optimal yang

lain dari yang diterapkan pada model $SEQIR$ atau dengan model dinamik lain.

DAFTAR PUSTAKA

- Brauer, F. 2008. Compartmental models in epidemiology, in *Mathematical epidemiology*, volume 1945 of *Lecture Notes in Math*, pp. 19-79.
- Chitnis, N., Hyman, J. M. & Cushing, J. M. 2008. Determining Important Parameters in the Spread of Malaria Through the Sensitivity Analysis of a Mathematical Model. *Bulletin of Mathematical Biology*, 70, 1272-96.
- Diekmann, O., Heesterbeek J. A. P. 2000. *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases: Model Building, Analysis, and Interpretation*. Chichester: John Wiley and Sons
- Diekmann, O., Metz, J.A.J., Heesterbeek, J.A.P. 1990. On the definition on the computation of the basic reproduction number ratio r_0 in models for infectious diseases in heterogeneous population. *J Math Biol*, 28, 365-82.
- Driessche P.V., Watmough J. 2002. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Math Biosci*, 180, 29-48.
- Giescke, J. 2002. *Modern Infectious Disease Epidemiology, Second Edition*. Florida: CRC Press.
- Giordano F.R, Weir M.D, & Fox W.P, 2003. *A First Course in Mathematical Modeling*. Brooks/Cole, USA.
- Hanh, W. 1967. *Stability of Motion*. New York: Springer-Verlag.
- Hui, D. S., Azhar, E. I., Madani, T. A., Ntoumi, F., Kock, R., Dar, O., Ippolito, G., Mchugh, T. D., Memish, Z. A., & Drosten, C. 2020. The continuing 2019-nCoV epidemic threat of novel coronaviruses to global health – The latest 2019 novel coronavirus outbreak in Wuhan, China. *International Journal of Infectious Diseases*, 91, 264-266.
- Kar, T.K, Nandi S.K, Jana S, Mandal M. 2019. Stability and bifurcation analysis of an epidemic model with the effect of media. *Chaos Solitons Fractals*, 120, 188-99.
- Kocak, H. & Hole, J.K. 1991. *Dynamic and Bifurcation*. New York: Springer - Verlag.
- Kucharski, A. J., Russell, T. W., Diamond, C., Liu, Y., Edmunds, J., Funk, S., Eggo, R.M. 2020. Early 2dynamics of transmission and control of COVID-19: a mathematical modelling study. *The lancet infectious diseases*, 20, 5, 553-558.
- Liu, Y., Gong, M., Liu, S., Pan, Y., & Huo, Y. 2020. Effects of blood glucose on vaspin secretion in patients with gestational diabetes mellitus. *Gynecological Endocrinology*, 1-4.

- Lewis, F.L., Vrabie, D., & Syrmos, V. L. 2012. *Optimal Control*. John Wiley & Sons.
- Mandal, M., Jana, Soovoojeet., Nandi, S.K., Khatua, Anupam., Adat, Sayani., Kar, T.K. 2020. A model based study on the dynamic of COVID-19: Prediction and Control. *Chaos Solitons & Fractals*. 136, 109889.
- Murray, J.D. 1993. *Mathematical Biology* (2nd ed.), New York: Springer-Verlag.
- Naidu, D. S. 2002, *Optimal Control Systems*, New York.
- Ndairou, F., Area, I., Nieto, J. J., & Torres, D. F. 2020. Mathematical modeling of COVID-19 transmission dynamics with a case study of Wuhan. *Chaos, Solitons & Fractals*, 135, 109846.
- Official updates coronavirus, COVID-19 in India, government of India. 2020. <https://www.mygov.in/covid-19>, Retrieved: 27-04-2020.
- Satgas Covid-19. (2020). *Data Real-Time Pemantauan Covid-19 di Jawa Timur*. <http://infocovid19.jatimprov.go.id> (Diakses 30 November 2020).
- Tu, P.N.V. 1994. *Dynamical System : An Introduction with Applications in Economics and Biology*. Springer-Verlag, New York.
- WHO. 2019. *Coronavirus*. <https://www.who.int/health-topics/coronavirus>
- WHO. 2020. "Pertanyaan dan Jawaban Terkait Coronavirus." <https://www.who.int/indonesia/news/novel-coronavirus/qa-for-public> (diakses Okt 02, 2020).
- Zhang, X., & Liu, X. 2008. Backward bifurcation of an epidemic model with saturated treatment function. *Journal of mathematical analysis and applications*, 348(1), 433-443.