MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115

Volume 09 No 03
Tahun 2021

PENGGUNAAN STRATEGI *HEDGING* (LINDUNG NILAI) PADA PEMODELAN OPSI SAHAM KARYAWAN YANG MENGALAMI PERGERAKAN PERDAGANGAN SECARA STATIS DAN DINAMIS

Putri Fadhilla
Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Unniversitas Negeri Surabaya.
e-mail: Putri.18007@mhs.unesa.ac.id

Rudianto Artiono
Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : rudiantoartiono@unesa.ac.id

Abstrak

Artikel ini bertujuan untuk memodelkan opsi saham karyawan yang mengalami pergerakan perdagangan secara statis dan dinamis menggunakan strategi *hedging* (lindung nilai). *Hedging* (lindung nilai) merupakan tindakan yang dilakukan untuk melindungi aset ataupun hutang sebuah perusahaan dari *exposure* terhadap perubahan nilai tukar sehingga dapat mengurangi atau meniadakan resiko pada suatu investasi di bursa saham. Strategi ini digunakan untuk melindungi nilai keuangan jangka panjang pada aset *non liquid* seperti opsi saham. Opsi saham merupakan suatu perjanjian yang memungkinkan pemiliknya untuk melakukan call (menjual) atau put (membeli) suatu saham dengan harga yang telah ditentukan pada waktu tertentu. Salah satu jenis opsi saham adalah opsi saham karyawan. Pemegang opsi saham karyawan dapat memaksimalkan keuntungan dan meminimalkan kerugian dari aset yang diperjualbelikan dengan melakukan lindung nilai. Metode ini menggabungkan antara pergerakan perdagangan dinamis dari aset liquid yang saling berkorelasi dan posisi statis dalam opsi yang diperdagangkan di bursa saham. Strategi lindung nilai statis-dinamis ini mengarah pada masalah kontrol stokastik dan Persamaan Diferensial Parsial Hamilton-Jacobi-Bellman melalui serangkaian transformasi yang dapat dilakukan untuk menyederhanakan masalah dan menghitung strategi lindung nilai yang optimal. Penelitian ini menghasilkan model matematika yang dapat digunakan untuk menentukan harga yang wajar dari suatu opsi saham karyawan yang mengalami pergerakan perdagangan secara statis dan dinamis.
Kata Kunci: Opsi Saham Karyawan, Strategi Hedging, PDP Hamilton-Jacobi-Bellman.

Abstract

This article aims to model employee stock options that experience trading movements statically and dynamically using a hedging strategy. Hedging is an action taken to protect a company's assets or debts from exposure to changes in exchange rates so as to reduce or eliminate the risk of an investment in the stock market. This strategy is used to protect the long-term financial value of non-liquid assets such as stock options. A stock option is an agreement that allows the owner to call (sell) or put (buy) a stock at a predetermined price at a certain time. One type of stock options is employee stock options. Holders of employee stock options can maximize profits and minimize losses from the assets traded by hedging. This method combines dynamic trading movements of correlated liquid assets and static positions in options traded on the stock exchange. This static-dynamic hedging strategy leads to the problem of stochastic control and the Hamilton-Jacobi-Bellman Partial Differential Equation through a series of transformations that can be performed to simplify the problem and calculate the optimal hedging strategy. This research produces a mathematical model that can be used to determine the fair price of an employee stock option that experiences static and dynamic trading movements.
Keywords: *Employee Stock Option, Hedging Strategy, PDE Hamilton-Jacobi-Bellman.*

PENDAHULUAN

Opsi saham merupakan produk turunan saham yang berupa kontrak antara dua pihak dimana pihak yang satu memberikan hak kepada yang lain untuk membeli atau menjual saham perusahaan pada harga dan jangka waktu tertentu. Pemegang opsi saham memiliki hak untuk menggunakan kontrak tersebut sampai masa berlaku nya habis. Pihak yang memiliki hak untuk membeli opsi disebut *option buyer*, sedangkan pihak yang memiliki hak untuk menjual opsi disebut *option writer*. Ketika waktu jatuh tempo, dan pihak pemegang opsi tidak menggunakan haknya, maka hak opsi tersebut akan hilang sehingga opsi tidak akan memiliki nilai (Hartono, 2017; Bodie, 2002; By David F. Larcker, 2021).

Pemegang opsi dapat memaksimalkan keuntungan dan meminimalkan kerugian dari aset yang diperjual belikan dengan melakukan strategi lindung nilai (*hedging*). Strategi ini adalah tindakan yang dilakukan untuk melindungi aset ataupun hutang sebuah perusahaan dari *exposure* terhadap perubahan nilai tukar. Hal ini dikarenakan penurunan nilai aset ataupun kenaikan dapat terjadi melalui penggunaan instrument *derivative* seperti kontrak–kontrak *forward, swap, futures*, ataupun *option. Exposure* terhadap fluktuasi nilai tukar adalah sejauh mana sebuah perusahaan dapat dipengaruhi oleh fluktuasi nilai tukar itu sendiri (Madura, 2000; Prasetiono. Hidayah, 2016; Halim, 2018)

Lindung nilai dapat dibagi menjadi dua yaitu lindung nilai statis dan dinamis. Lindung nilai dinamis dilakukan dengan cara menyeimbangkan bobot pada portofolio secara terus menerus sehingga terdapat biaya transaksi saat melakukan penyeimbangan portofolio. Sementara, lindung nilai statis tidak memerlukan penyeimbangan bobot portofolio sehingga biaya lindung nilai dan transaksi menjadi satu dalam harga bursa saham dari opsi yang dipakai dalam lindung nilai (Derman, 1994).

Dalam teori penetapan harga opsi tanpa *arbitrage* standar, posisi opsi diasumsikan melakukan lindung nilai secara sempurna dengan terus memperdagangkan aset dasar. Harga opsi dihitung dari ekspektasi bersyarat melalui potongan harga di bawah penetapan harga netral. Di beberapa aplikasi keuangan, aset dasar tidak diperdagangkan secara langsung. Sebaliknya, pemegang turunan aset dasar mengelola *eksposure* risikonya dengan memperdagangkan beberapa aset likuid yang berkorelasi dengan *underlying asset* (Carr P. , 1998).

Salah satu opsi saham yang biasa digunakan masyarakat adalah opsi saham karyawan (Maulana & Sidarto, 2018). Opsi saham karyawan adalah kompensasi ekuitas yang diberikan oleh perusahaan kepada karyawan dan jajaran eksekutif suatu perusahaan yang berfungsi sebagai *reward* atas jasa yang diberikan, untuk membeli saham perusahaan pada waktu dan harga yang telah ditentukan. Pemegang opsi saham karyawan yang tidak melakukan perdagangan terhadap kepemilikan saham perusahaan atau yang menjualnya secara langsung ketika menerima opsi tersebut lebih baik melakukan strategi lindung nilai ini karena sebagian besar opsi yang diperdagangkan di bursa saham adalah kontrak jangka pendek. Selain itu, opsi *put* (jual) yang diperdagangkan di bursa saham juga dibeli berulang kali dari waktu ke waktu. Jadi baik jika melakukan lindung nilai statis secara berurutan dari waktu ke waktu hingga opsi jangka panjang berakhir.

Penelitian terdahulu dilakukan oleh (Zhou & Bayraktar, 2016) yang membahas tentang *Arbitrage, Hedging And Utility Maximization Using Semi-Static Trading Strategies With American Options*, kemudian (Clément, Sadefo-Kamdem, & Fono, 2019) juga membahas tentang *Dynamic Optimal Hedge Ratio Design when Price and Production are stochastic with Jump*. Sehingga peneliti tertarik untuk memodelkan opsi saham karyawan yang mengalami pergerakan perdagangan secara statis dan dinamis. Perdagangan statis dilakukan dengan cara memperdagangkan opsi pada posisi statis. Sedangkan, perdagangan dinamis dilakukan dengan cara memperdagangkan aset likuid yang bersifat dinamis. Hal ini dapat dilakukan karena penilaian dan *exercise* terhadap opsi saham karyawan masih bergantung pada preferensi risiko dari pemegang opsi saham tersebut. Untuk itu, peneliti menggunakan pendekatan maksimalisasi utilitas untuk menentukan posisi statis optimal pada waktu yang berbeda, bersama dengan strategi perdagangan dinamis yang optimal.

METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini mengikuti urutan sebagai berikut:

1) Perumusan model;
2) Penentuan model *Hedging* Statis Dinamis pada opsi saham karyawan yang mengikuti pola *European stock option;*
3) Penentuan model *Hedging* Statis Dinamis pada opsi saham karyawan yang mengikuti pola *American Stock Option*;
4) Kesimpulan.

Proses pendekatan dilakukan dengan menggunakan pendekatan maksimalisasi utilitas untuk menentukan posisi statis optimal pada waktu yang berbeda, bersama dengan strategi perdagangan dinamis yang optimal dan menggunakan metode lindung nilai opsi saham karyawan jangka panjang.

Langkah–langkah penelitian yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Merumuskan model penelitian untuk opsi saham karyawan yang *traded*, dan *non-traded* yang didapat dari persamaan *brownian motion*.

Misalkan : Periode = f tahun, Populasi $=\frac{r}{f}$, Populasi $ke\ 0\ =\ x_0$.

pada akhir tahun ke 1 $=\ x_1 = (1+\frac{r}{f})$,

pada akhir tahun ke $t, x_t = \left(1+\frac{r}{f}\right)^{ft}$.

Saat f nya tak hingga, maka

$$x_t = \lim_{f\to\infty} x_0 \left(1+\frac{r}{f}\right)^{ft}$$

$$x_t = x_0(e^r)^t$$

dimana $\lim_{f\to\infty}\left(1+\frac{r}{f}\right)^f = e^r$

Dengan menurunkan fungsi di atas, didapat:

$$\frac{dx_t}{dt} = x_0 \frac{d}{dt}\ e^{rt}$$

$$\frac{dx_t}{dt} = x_0 e^{rt}.r$$

$$\frac{dx_t}{dt} = x_t r$$

Dapat diformulasikan interval dengan pemilihan waktu terkecil menjadi,

$$x_{t+h} = x_0 e^{r(t+h)}.$$

Perhitungan perubahan populasi per satuan waktu:

$$\lim_{h\to 0}\frac{x_{t+h}-x_t}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x_0e^{r(t+h)}-x_0e^{rt}}{h},$$

$$\frac{dx_t}{dt} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{rh}-1}{h}x_0e^{rt}.$$

Ingat, ekspansi deret e:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

Ingat deret taylor:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x)\Delta x^2 + \cdots$$

Pada deret taylor, ganti fungsi menjadi e^x

Didapat:

$$e^{x+\Delta x} = e^x + e^x\Delta x + \frac{1}{2}e^x(\Delta x)^2 + \cdots$$

$$e^{\Delta x} = 1 + \Delta x + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 + \cdots$$

Karakterisasi pembatas

Berikut adalah binomial pangkat n

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^ny^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}n^{x-2} + y^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^0y^n$$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2 + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^n x^n$$

Sehingga,

$$\frac{dx_t}{dt} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(1+rh+\frac{(rh)^2}{2!}+\cdots\right)-1}{h}x_0e^{rt}$$

$$\frac{dx_t}{dt} = \lim_{h\to 0}\left(r+\frac{r^2h}{2!}+\cdots\right)x_0e^{rt}$$

$$\frac{dx_t}{dt} = rx_0e^{rt}$$

$$\frac{dx_t}{dt} = rx_t$$

Pada kondisi tertentu r dapat menjadi fungsi waktu sebagai berikut,

$$dx_t = r_tx_tdt$$

Perubahan acak tingkat pertumbuhan, (proses stokastik)

$$dx_t = x_t(r_td_t + dR_t)$$

Dengan dR_t adalah *Brownian Motion*

Dapat peneliti tulis

$$dx_t = x_t(r_td_t + dB_t)$$

Interval terdistribusi normal (BM standar) dengan $\bar{x} = 0, var =$ panjang interval

Maka proses ini dapat dikalikan dengan σ sehingga diperoleh:

$$dx_t = x_t(r_tdt + \sigma dB_t)$$

dengan σ, r = *interest rate*

2. Menganalisis strategi lindung nilai statis-dinamis sekuensial yang optimal.

a. Persamaan Hamilton-Jacobi-Bellman

Ingat masalah kontrol optimal deterministik generic,

$$V(X_0) = \max_{u(t)_{t=0}^{\infty}}\int_0^\infty e^{-\rho t}h(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t))dt.$$

Dengan,

$\boldsymbol{x}(t) = g(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)$ dan $\boldsymbol{u}(t) \in U$

Untuk $t \geq 0, x(0) = x_0$, dengan

$\rho \geq 0$: pehitungan diskon

$\boldsymbol{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^m$: vektor awal

$\boldsymbol{u} \in U \subseteq \mathbb{R}^n$: vektor kontrol

Nilai fungsi dari masalah kontrol optimal secara umum memenuhi persamaan Hamilton-Jacobi-Bellman (Syahril, 1991)

$$\rho V(\boldsymbol{x}) = \max_{\boldsymbol{u}\in U} h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) + V'(\boldsymbol{x})\cdot g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\,.$$

Dalam kasus dengan lebih dari 1 variabel, $m > 1$, $V'(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^m$ adalah gradien dari nilai fungsi.

b. Ketidaksetaraan variasi

Dengan persamaan sistem:

Diketahui $K = R^n$ dan $F : R^n \to R^n$ adalah suatu fungsi yang diberikan. Sebuah vektor $\boldsymbol{x}^* \in R^n$ menghasilkan ketidaksetaraan variasi (F, R^n) jika dan hanya jika $F(\boldsymbol{x}^*) = 0$.

Bukti:

Jika $F(\boldsymbol{x}^*) = 0$, sedemikan hingga

$$\langle F(\boldsymbol{x}^*, x - \boldsymbol{x}^*\rangle \geq 0, \forall x \in K$$

Yang berarti:

$$F(\boldsymbol{x}^*)^T.\left(-F(\boldsymbol{x}^*)\right) \geq 0, \text{ atau}$$

$$-\|F(\boldsymbol{x}^*)\|^2 \geq 0,$$

Jadi $F(\boldsymbol{x}^*) \geq 0$.

3. Untuk menentukan posisi statis yang optimal peneliti mengggunakan fungsi utilitas eksponensial.

Fungsi utilitas eksponensial adalah sebagai berikut,

$$U(x) = 1 - e^{\frac{-x}{R}},$$

dimana R adalah *risk tolerance.*

Fungsi ini tidak diturunkan. Fungsi ini dapat digunakan untuk memodelkan perilaku pengambil keputusan dengan menghindari risiko.

Perhatikan bahwa, ketika x meningkat $U(x)$ akan mendekati 1 yang berarti utilitas tertinggi. Utilitas nol dalam persamaan ini, $U(0)$, sama dengan 0. Demikian juga utilitas untuk setiap x negatif, $U(x)$ sama dengan negatif.

4. Menerapkan serangkaian transformasi yang mengurangi masalah untuk traktabilitas (penyelesaian masalah yang dilakukan melalui analisis komputer).

HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 FORMULASI MODEL

Dari persamaan *brownian motion,* peneliti mempunyai persamaan *traded* dan *non-traded* sebagai berikut (Trimono, 2017; W Farida Agustini, 2018):

Persamaan *Traded*:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

dengan

S_t= Model harga saham pada waktu ke t,

μ = pengembalian yang diharapkan dari indeks pasar,

W = *standard Brownian motion under* $\mathbb{Q}$

Nilai aset *traded* S_T dengan $S_T = S_0\ \xi$

Dimana peubah acak $\xi = \xi^d$ atau $\xi = \xi^u$, dan $0 < \xi^d < 1 < \xi^u$.

Persamaan *Non-Traded*:

$$dY_t = (v - q)Y_t dt + \eta Y_t(\rho dW_t + \rho' d\hat{W}_t),$$

dengan

Y = Saham Perusahaan

$(v - q), \eta, \rho$ konstan

dimana v dan η adalah volatilitas dan pengembalian opsi saham ynag diharapkan.

q = *interest rate*

$W\ dan\ \hat{W}$ adalah proses *brownian motion* standar yang didefinisikan di $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t), \mathbb{P})$, dimana $\mathfrak{F}_t$adalah aljabar baru σ yang dibentuk oleh peubah acak S_t dan Y_t. Demikian juga $\rho \in (-1, 1)$ dan $\rho' = \sqrt{1-\rho^2}$, dengan asumsi rasio indeks bursa saham sebagai berikut:

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma},$$

$$\xi = \frac{v - q - r}{\eta}.$$

Selanjutnya, dengan strategi investasi dinamis, kekayaan perdagangan karyawan berkembang sesuai dengan proses sebagai berikut:

Misalkan θ adalah jumlah uang yang diinvestasikan dalam aset yang diperdagangkan pada waktu t, dengan $\boldsymbol{\tilde{X}_t^{\tilde{\theta}}}$ kekayaan yang sesuai, maka dengan asumsi $\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$ proses kekayaan $\boldsymbol{\tilde{X}_t^{\tilde{\theta}}}$ memenuhi persamaan diferensial stokastik berikut:

$$d\tilde{X}_t^{\tilde{\theta}} = r\tilde{X}\,_t^{\tilde{\theta}} dt + [\mu(Y_t, t) - r]\theta dt + \sigma(Y_t, t)\tilde{\theta} dB_t$$

Perhatikan rantai markovian, $\tilde{\theta}_t = \tilde{\theta}(t, \tilde{X}_t^{\tilde{\theta}}, Y_t)$ untuk beberapa fungsi deterministik $(t, x, y) \to \tilde{\theta}(t, x, y)$). Tulis $X_t^{\theta} = e^{r(T-t)}\tilde{X}_t^{\tilde{\theta}}$ sehingga proses keuntungan dinamik dapat dinyatakan sebagai:

$$dX_u^{\theta} = [\theta_u(\mu - r) + rX_u]du + \theta_u \sigma B_u\ ,$$

dimana $X_t = x$.

Variabel θ adalah jumlah uang tunai yang diinvestasikan dalam S_t. Dimana strategi Θ, terdiri dari semua *self-financing* $\mathfrak{F}_t$, proses yang terukur secara progresif $(\theta_t)_t \geq 0$ dengan $S_t = s$, sedemikian hingga kondisi integral yang memenuhi,

$$\mathbb{E}\{\int_0^T \boldsymbol{\theta_t^2 dt}\} < \infty. \text{ Untuk } 0 \leq s \leq t \leq T,$$

Ekspektasi harga opsi saham, θ ekpektasinya dari 0 sampai T. $\Theta_{s,t}$merupakan serangkaian strategi yang dapat diterima pada periode $[s, t]$.

Untuk menghindari peluang *arbitrage,* diasumsikan bahwa harga bursa saham yang diperdagangkan terletak dalam batas-batas tanpa *arbitrage* dimana aset dasar Y mengikuti gerakan *Brown* geometris. Hal ini dilakukan dengan menetapkan harga bursa saham menjadi harga *Black–Scholes* yang dilambangkan dengan $\pi(t, y)$ (Fitri, 2020).

Pada setiap pembelian, karyawan akan menahan opsi *put* sampai kadaluarsa. Biasanya opsi yang diperdagangkan di bursa saham memiliki jatuh tempo yang pendek sehingga karyawan akan mengulangi strategi beli dan tahan ini beberapa kali sampai opsi saham karyawan kedaluwarsa, tujuan dari strategi beli dan tahan ini adalah opsi *put* yang diperdagangkan di bursa saham jatuh tempo saat $\Delta t = \frac{T}{N}$, dimana T adalah waktu jatuh tempo dan N adalah integer positif sehingga $t_n = n\Delta t$ untuk $n = 0,1,\dots,N-1$. Pada saat karyawan melakukan pembelian opsi di waktu $\{0, t_1, t_2, \dots, t_{N-1}\}$ akan dilakukan pendekatan maksimalisasi utilitas untuk menentukan lindung nilai yang optimal. Secara khusus, dilakukan untuk karyawan yang memiliki preferensi risiko dengan fungsi utilitas eksponensial. Karyawan memiliki beberapa resiko seperti phk atau pengunduran diri dari perusahaan. Resiko ini dapat dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$U(x) = -e^{-\gamma x}, \text{dimana } x \in \mathbb{R}$$

Koefisien penghindaran risiko absolut konstan $\gamma > 0$. Peneliti menginterpretasikan $U(x)$ sebagai utilitas karyawan untuk memiliki kekayaan sebesar x dengan waktu T.

3.2 LINDUNG NILAI STATIS–DINAMIS UNTUK OPSI SAHAM KARYAWAN YANG MENGIKUTI POLA *EUROPEAN STOCK OPTION*

Peneliti membahas lindung nilai statis-dinamis dari opsi saham karyawan mengikuti penentuan harga opsi *call* Eropa dengan persamaan (Vulandari & Sutrima, 2020):

$$C(Y_T) = (Y_T - K)^+$$

Y_T = Keuntungan saham perusahaan

K = Harga Kesepakatan

3.2.1 KEUNTUNGAN UTILITAS MAKSIMAL

Selanjutnya peneliti mendefinisikan fungsi nilai pemegang opsi saham karyawan secara rekursif ke waktu sebelumnya. Untuk memulainya, misalkan pada waktu t_{n-1}, karyawan tersebut memegang opsi saham karyawan, bersama dengan b_{n-1} unit opsi *put* yang akan kadaluarsa pada waktu T dengan pembayaran $b_{N-1}D(Y_T) = b_{N-1}\,(K' - Y_T)^+$.

Oleh karena itu, fungsi nilai opsi saham karyawan di waktu T_{N-1} diberikan oleh:

$$V^{N-1}(t_{N-1}, x, y; b_{N-1}) = \sup_{\theta_{t_{N-1},T}} \mathbb{E}\{U\big(X_T + C(Y_T) + b_{N-1}D(Y_T)\big) \big| X_{t_{N-1}} = y\}.$$

Sekarang, dengan memperhitungkan harga bursa saham dari opsi *put* pada waktu t_{N-1}, karyawan memilih b_{N-1} untuk memaksimalkan fungsi nilai:

$$b^*_{N-1}(x, y) = \arg\max_{0 \le b < \infty} V^{N-1}(t_{N-1}, x - b\pi(t_{N-1}, y), y; b).$$

Lebih ringkasnya, fungsi nilai dan *indifference price (private valuation)* yang merespon lindung nilai statis optimal dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} &V*^{N-1}\,(t_{N-1}, x - b\pi(t_{N-1}, y), y; b) \\ &= V^{N-1}(\,t_{N-1}, x - b^*_{N-1}\pi(t_{N-1}, y; b^*_{N-1})p*^{(N-1)}\,(t_{N-1}, y) \\ &= p^{(N-1)}(t_{N-1}, x, y; b^*_{N-1}) - b^*_{N-1}\pi(t_{N-1}, y) \end{aligned}$$

Peneliti mempertimbangkan masalah investasi dimana karyawan yang menghindari risiko secara dinamis berdagang di bursa saham indeks dan rekening bank tanpa opsi apa pun hingga waktu T. Masalah ini pertama kali diperkenalkan oleh Merton melalui harapan maksimal karyawan utilitas, yang disebut fungsi Merton, diberikan oleh

$$M(t, x) = \sup_{\theta_t, T} \mathbb{E}\{U(X_T | X_t = x\}$$

$$= -e^{(-\gamma x T)^{T-t}} e^{-\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)(T-t)}$$ (Merton, 1969)

Pada saat $t \in [t_n, t_{n+1})$, *indifference price* dinyatakan sebagai $p^{(n)}(t, x, y, b_n)$untuk memenuhi opsi saham dan sebanyak b_n unit opsi *put* didefinisikan oleh persamaan:

$$V^{(n)}(t, x, y; b_n) = M(t, x + p^{(n)}(t, x, y; b_n)$$

Dimana $V^{(n)}(t,x,y;b_n)$ adalah nilai fungsi harga dari opsi saham karyawan pada rentang waktu $[t_n,t_{n+1})$.

$$b_n^*(x,y) = \arg_{0\le b\le\infty} \max p^n(t_n,x,y;b) - b\pi(t_n,y)$$

Posisi statis optimal ditemukan dari Fenchel–Legendre transformasi untuk *indifference price* pada harga opsi saham karyawan sebagai fungsi dari nilai put yang dievaluasi pada harga bursa saham. Nilai fungsi dan *indifference price* yang sesuai dengan statis optimal dengan strategi lindung nilai adalah:

$$V_*^{(n)}(t,x,y) = V^{(n)}(t,x-b_n^*\pi(t,y),y;b_n^*),$$
$$p_*^{(n)}(t,y) = p^{(n)}(t,x,y;b_n^*) - b_n^*\pi(t,y)$$

Pergerakan dengan waktu mundur dilakukan untuk menurunkan nilai fungsi $\{V^{(N-2)},V^{(N-3)},\dots,V^{(0)}\}$.

Nilai fungsi dari harga opsi saham karyawan pada waktu $t\in[t_n,t_{n+1})$, untuk $n=N-2,N-3,\dots,0$, diberikan oleh

$$V^{(n)}(t,x,y;b_n)$$
$$= \sup_{\theta_{t_n},t_{n+1}} \mathbb{E}\{V_*^{n+1}(t_{n+1},X_{t_{n+1}}+b_nD(Y_{t_{n+1}}),Y_{t_{n+1}}|X_t=x;Y_t=y\}$$
$$= \sup_{\theta_{t_n},t_{n+1}} M(t_{n+1},X_{t_{n+1}}+p_*^{(n+1)}(t_{n+1},Y_{t_{n+1}})+b_nD(Y_{t_{n+1}}),Y_{t_{n+1}}|X_t = x;Y_t=y\}$$

3.2.2 SISTEM REKURSIF PERSAMAN DIFERENSIAL PARSIAL

Perhatikan operasi diferensial parsial orde 2 berikut:

$$\mathcal{L} = \frac{\eta^2y^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \rho\theta\gamma\eta y\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \frac{\theta^2y^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (v-q)y\frac{\partial}{\partial y} + [\theta(\mu-r)+rx]\frac{\partial}{\partial x},$$
$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{\eta^2y^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(v-q-\rho\frac{\mu-r}{\sigma}\eta\right)y\frac{\partial u}{\partial y},$$
$$\mathcal{A}^{ql}u = \frac{\partial u}{\partial t} + \tilde{\mathcal{L}}u - eu - \frac{1}{2}\gamma(1-\rho^2)\eta^2y^2e^{r(T-t)}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

Operator $\mathcal{L}$ adalah generator yang sangat kecil dari (X,Y), $\tilde{\mathcal{L}}$ adalah generator yang sangat kecil dari Y di bawah ukuran *entropi martingale* minimal, Q^E, dan operator terakhir $\mathcal{A}^{ql}$ adalah *quasilinear*.

Nilai fungsi $V^{(N-1)}(t,x,y;b)$ untuk menyelesaikan Persamaan *Hamilton Jacobi Bellman* sebagi berikut:

$$V_t^{(N-1)} + \sup_\theta \mathcal{L}V^{(N-1)} = 0,$$

Untuk $(t,x,y)\in[t_{N-1},T)\times\mathbb{R}\times(0,+\infty)$. Dengan kondisi sebagai berikut:

$$V^{(N-1)}(T,x,y;b) = -e^{-\gamma(x+C(y)+bD(y))},$$
$$V^{(N-1)}(T,x,0;b) = -e^{-\gamma(xe^{r(T-t)}+bK)}e^{-\frac{(\mu-r)^2}{2\sigma^2}}(T-t).$$

Dengan adanya fungsi utilitas eksponensial, nilai fungsi memiliki variabel pemisah sebagai berikut:

$$V^{(N-1)}(T,x,y;b) = M(t,x).H^{(N-1)}(t,y;b)^{\frac{1}{1-\rho^2}}.$$

Fungsi $H^{(N-1)}$ menyelesaikan persamaan:

$$H_t^{(N-1)} + \tilde{\mathcal{L}}H^{(N-1)} = 0,$$

Untuk $(t,y)\in[t_{N-1},T)\times(0,+\infty)$, dengan kondisi

$$H^{(N-1)}(T,y;b) = e^{-\gamma(1-\rho^2)(C(y)+bD(y))},$$
$$H^{(N-1)}(t,0;b) = e^{-\gamma(1-\rho^2)bK}.$$

3.2.3 *INDIFFERENCE PRICE (PRIVATE VALUATION)*

Peneliti menggunakan definisi, fungsi $H^{(N-1)}$ berkaitan dengan *indifference price* $p^{(N-1)}$ sebagai berikut:

$$P^{(N-1)}(t,y;b)$$
$$= -\frac{1}{\gamma(1-\rho^2)e^r(T-t)}\log H^{(N-1)}(t,y;b),$$
$$t\in[t_{N-1},T].$$

Dengan diberikan:

$$V^{N-1}(t,x,y;b) = M(t,x)\cdot e^{-\gamma p^{(N-1)}(t,y;b)e^{r(T-t)}},$$
$$\mathcal{A}^{ql}p^{(N-1)} = 0,$$

Dengan kondisi:

$$p^{(N-1)}(T,y;b) = C(y) + bD(y),$$
$$p^{(N-1)}(t,0;b) = bKe^{-r(T-t)}.$$

Peneliti menyelesaikan Persamaan diferensial parsial untuk $H^{(N-1)}(t,y;b)$. Selanjutnya, peneliti melakukan optimalisasi b untuk memperoleh lindung nilai statis secara optimal b_{N-1}^* di waktu t_{N-1}, yang bersesuaian dengan $V_*^{(N-1)}(t,x,y)$, $H_*^{(N-1)}(t,y)$ dan $p_*^{(N-1)}(t,y)$, yang muncul dalam kondisi terminal untuk $V^{(N-2)}(t,x,y;b)$. Pada saat $t\in[t_n,t_{n+1})$, nilai fungsi $V^n(t,x,y;b)$ memenuhi persamaan:

$$V_t^{(n)} + \sup_\theta \mathcal{L}V^{(n)} = 0,$$

Untuk $(t,x,y) \in [t_n, t_{n+1}) \times \mathbb{R} \times (0,+\infty)$. Dengan kondisi:

$$V^{(n)}(t_{n+1},x,y;b) = V_*^{(n+1)}(t_{n+1},x+bD(y),y),$$

$$V^{(n)}(t,x,y;b) = e^{-\gamma(xr^{(T-t)}+bK)}e^{-\frac{(\mu-r)^2}{2\sigma^2}}(T-t)$$

Indifference price diberikan oleh:

$$p^{(n)}(t,y;b) = -\frac{1}{\gamma(1-\rho^2)e^r(T-t)}\log H^{(n)}(t,y;b), t \in [t_n, t_{n+1}),$$

Menghasilkan:

$$\mathcal{A}^{ql}p^{(n)} = 0,$$

Untuk $(t,y) \in [t_n, t_{n+1}) \times (0,+\infty)$, dengan kondisi

$$p^{(n)}(t_{n+1},y;b) = p_*^{(n+1)}(t_{n+1},y) + bD(y),$$

$$p^{(n)}(t,0;b) = bKe^{-r(T-t)}.$$

3.3 LINDUNG NILAI STATIS–DINAMIS UNTUK OPSI SAHAM KARYAWAN YANG MENGIKUTI POLA *AMERICAN STOCK OPTION*

Selanjutnya dilakukan analisis posisi statis optimal di bawah waktu, dan memeriksa efek *non-trivial* dari lindung nilai statis pada strategi opsi saham karyawan.

Tulis $\mathcal{T}$ adalah himpunan semua waktu berhenti sehubungan dengan $\mathbb{F}$ yang diambil pada $[0,T]$. Untuk $s,u \in \mathcal{T}$ dengan $s \leq u$, peneliti tuliskan himpunan dari waktu yang berhenti diantaranya dengan $\mathcal{T}_{s,u} := \{\mathrm{T} \in \mathcal{T} : s \leq \mathrm{T} \leq u\}$.

3.3.1 KEUNTUNGAN UTILITAS MAKSIMAL

Asumsikan karyawan akan menginvestasikan kembali hasil opsi saham karyawan, ke dalam portofolio perdagangan yang dinamis. Setelah *exercise* opsi saham karyawan, tidak ada kebutuhan lindung nilai statis di masa depan, sehingga lindung nilai statis berurutan akan berakhir dengan tanggal kedaluwarsa berikutnya. Tepatnya, jika opsi saham karyawan telah dilakukan pada waktu $t \in (t_n, t_{n+1}], n \in \{0,1,\dots,N-1\}$, karyawan yang memiliki beberapa unit a dari penjualan *European option* yang kedaluarsa di t_{n+1}, dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$u^{(n)}(t,x,y;a) \sup_{\theta_t,t_{n+1}} \mathbb{E}\{M(t_{n+1},X_{t_{n+1}} + aD(Y\_t_{n+1}))|X_t = x, Y_t = y\}.$$

Selanjutnya peneliti menggambarkan ketentuan *indifference price* dari opsi *put* yang dinotasikan dengan: $h^{(n)}(t,y;a)$:

$$u^{(n)}(t,y,x;a) = M\left(t, x + h^{(n)}(t,y;a)\right).$$

Misal karyawan tersebut memiliki opsi saham karyawan yang bertipe *American option* di t_{N-1}, dengan a_{N-1} unit dari opsi *put*. Sehingga, nilai fungsi dari opsi saham karyawan tersebut diberikan oleh (Tim, et al., 2012):

$$\hat{V}^{N-1}(T_{N-1},x,y;a_{N-1}) = \sup_{\mathrm{T}\in\mathcal{T}_{t_{N-1},T}} \sup_{\theta_{t_{N-1},T}} \mathbb{E}\{M(\mathrm{T}, X_\mathrm{T} + C(Y_\mathrm{T}) + h^{N-1}(\mathrm{T},Y_\mathrm{T};a_{N-1}))|X_{t_{N-1}} = x, Y_{t_{N-1}} = y\}$$

Selanjutnya, untuk harga bursa saham π dari opsi *put* di waktu t_{N-1}, dipilih a_{N-1} opsi saham karyawan untuk memaksimalkan nilai fungsi:

$$a_{N-1}^*(x,y) = \arg\max_{0\leq a<\infty} \hat{V}^{(N-1)}t_{(N-1)},x - a\pi(t_{N-1},y)),y;a)$$

Untuk sebarang waktu $t \in [t_n, t_{n+1})$, *indifference price* pada $\hat{p}^{(n)}(t,x,y,a_n)$ digunakan untuk memenuhi opsi saham karyawan tipe Amerika sebanyak a_n *unit put option* yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\hat{V}^{(n)}(t,x,y;a_n) = M(t,x+\hat{p}^{(n)}(t,x,y;a_n))$$

Selanjutnya dapat digambarkan posisi statis optimal a_n^* *unit put option* tepat pada waktu t_n sehingga *indifference price* dan harga bursa saham dapat dinyatakan oleh:

$$a_n^*(x,y) \arg\max_{0\leq a<\infty} \hat{p}^{(n)}(t_n,x,y;a) - a\pi(t_n,y).$$

Nilai fungsi dari opsi saham karyawan dan *indifference price* dengan lindung nilai statis optimal digambarkan sebagai berikut:

$$\hat{V}_*^{(n)}(t,x,y) = \hat{V}^{(n)}(t, x - a_n^* \pi(t,y), y; a_n^*),$$
$$\hat{p}_*^{(n)}(t,y) = \hat{p}^{(n)}(t,x,y;a_n^*) - a_n^* \pi(t,y)$$

Selanjutnya, untuk $n \in \{N-2, N-3, \ldots, 0\}$, nilai fungsi dari opsi saham karyawan di waktu $t \in [t_n, t_{n+1})$ dengan a_n *unit put option* diberikan oleh:

$$\hat{V}^{(n)}(t,x,y;a_n)$$
$$= \sup_{\mathrm{T} \in \mathcal{T}_{t_{N-1}}, T} \sup_{\theta_{t_{N-1}}, T} \mathbb{E}\{\hat{V}_*^{(n+1)} \times (t_{n+1}, X_{t_{n+1}} + a_n D(Y_{t_{n+1}}), Y_{t_{n+1}} \cdot 1_{\{\mathrm{T}=t_{n+1}\}}$$
$$+ u^{(n)}(\mathrm{T}, X_{\mathrm{T}} + C(Y_{\mathrm{T}}), Y_{\mathrm{T}}; a_n) \cdot 1_{\{\mathrm{T}<t_{n+1}\}} | X_t = x, Y_t = y\}$$

3.3.2 SISTEM REKURSIF DARI MASALAH BATAS BEBAS

Peneliti mendefinisikan ketidaksetaraan variasi sebagai berikut:

$$\{\hat{V}^{(N-1)}, \hat{V}^{(N-2)}, \ldots \hat{V}^{(0)}\}$$

Ketidaksetaraan variasi tersebut mengarah pada sistem masalah batas bebas untuk *indifference price* yang sesuai. Kemudian, peneliti mempertimbangkan ketidaksetaraan variasi $\hat{V}^{(N-1)}(t,x,y;a)$.

$$\hat{V}_t^{N-1} + \sup_\theta \mathcal{L}\hat{V}^{(N-1)} \le 0,$$
$$\hat{V}^{(N-1)} \ge M\left(t, x + C(y) + h^{(N-1)}(t,y;a)\right),$$
$$\left(\hat{V}_*^{(N-1)} + \sup_\theta \mathcal{L}\hat{V}^{(N-1)}\right) \cdot \left(M\left(t, x, +C(y) + h^{(N-1)}(t,y;a)\right) - \hat{V}^{(N-1)}\right) = 0,$$

Untuk $(t,x,y) \in [t_{N-1}, T) \times \mathbb{R} \times (0, +\infty)$.

Dengan kondisi:

$$\hat{V}^{(N-1)}(T,x,y;a) = e^{-\gamma(x + C(y) + aD(y))},$$
$$\hat{V}^{(N-1)}(t,x,0;a) = -e^{-\gamma(xe^{r(T-t)} + aK)} e^{-\frac{(\mu-r)^2}{2\sigma^2}}(T-t)$$

Nilai fungsi dari opsi saham karyawan memiliki variabel pemisah sebagai berikut:

$$\hat{V}^{(N-1)}(t,x,y;a) = M(t,x) \cdot \hat{H}^{(N-1)}(t,y;a)^{\frac{1}{(1-\rho^2)}},$$

sehingga $\hat{H}^{(N-1)}$ dapat menyelesaikan masalah linier batas bebas,

$$\hat{H}_t^{(N-1)} + \tilde{\mathcal{L}}\hat{H}^{(N-1)} \ge, \hat{H}^{(N-1)} \le k_{N-1},$$
$$\left(\hat{H}_t^{(N-1)} + \tilde{\mathcal{L}}\hat{H}^{(N-1)}\right) \cdot (k_{N-1} - \hat{H}^{(N-1)} = 0,$$

Untuk $(t,y) \in [t_{N-1}, T) \times (0, +\infty)$, dimana:

$$k_{N-1}(t,y;a) = e^{-\gamma(1-\rho^2)\left(C(y) + h^{(N-1)}(t,y;a)\right)e^{r(T-t)}}.$$

Dengan kondisi batas:

$$\hat{H}^{(N-1)}(T,y;a) = e^{-\gamma(1-\rho^2)(C(y) + aD(y))},$$
$$\hat{H}^{(N-1)}(t,0;a) = e^{-\gamma(1-\rho^2)aK}.$$

3.3.3 *INDIFFERENCE PRICE*

Berdasarkan penelitian yang dilakukan oleh (Tim, et al., 2012), peneliti mendefinisikan *indifference price* pada fungsi $H^{(N-1)}$, dengan

$$\hat{p}^{(N-1)}(t,y;a) = -\frac{1}{\gamma(1-\rho^2)e^{r(T-t)}} \log \hat{H}^{(N-1)}(t,y;a,), t \in [t_{N-1}, T],$$

Menghasilkan pertidaksamaan kuasilinier berikut ini:

$$\mathcal{A}^{ql}\hat{p}^{(N-1)} \le 0, \hat{p}^{(N-1)} \ge C(y) + h^{(N-1)}(t,y;a),$$
$$\mathcal{A}^{ql}\hat{p}^{(N-1)} \cdot \left(C(y) + h^{(N-1)}(t,y;a) - \hat{p}^{(N-1)}\right) = 0$$

Untuk $(t,y) \in [t_{N-1}, T) \times (0, +\infty)$.

Dimana,

$$\hat{p}^{(N-1)}(T,y;a) = C(y) + aD(y)$$
$$\hat{p}^{(N-1)}(t,0;a) = aKe^{-r(T-t)}$$

Peneliti mengoptimalisasi lebih dari a unit untuk mendapatkan lindung nilai statis yang optimal pada saat a_{N-1}^* di waktu t_{N-1}, yang bersesuaian dengan $\hat{V}^{(N-2)}(t,x,y)$ dan $\hat{p}_*^{(N-1)}(t,y)$ yang muncul dalam kondisi terminal untuk $\hat{V}^{(N-2)}(t,x,y;b)$. Pada waktu t_n, nilai fungsi $\hat{V}^{(n)}(t,x,y;a)$ memenuhi pertidaksamaan variasi *Hamillton Jacobi Bellman* sebagai berikut:

$$\hat{V}_t^{(n)} + \sup_\theta \mathcal{L}\hat{V} \le 0$$
$$\hat{V}^{(N-1)} \ge M\left(t, x + C(y) + h^{(N-1)}(t,y;a)\right),$$
$$\left(\hat{V}_t^{(N-1)} + \sup_\theta \mathcal{L}\hat{V}^{(N-1)}\right) \cdot (M\left(t, x + C(y) + h^{(N-1)}(t,y;a)\right) - \hat{V}^{(N-1)}) = 0,$$

untuk$(t,x,y) \in [t_n, t_{n+1}) \times \mathbb{R} \times (0, +\infty)$.

Dengan kondisi batas linear,

$$\hat{V}^{(n)}(t_{n+1}, x, y; a) = \hat{V}_*^{(n+1)}(t_{n+1}, x + aD(y), y),$$

$$\hat{V}^{(n)}(t, x, 0; a) = -e^{-\gamma(xe^{r(T-t)}+aK)}e^{-\frac{(\mu-r)^2}{2\sigma^2}}(T-t)$$

Nilai fungsi dari opsi saham karyawan memiliki variabel pemisah,

$$\hat{V}^{(n)}(t, x, y; a) = M(t, x) \cdot \hat{H}^{(n)}(t, y; a)^{\frac{1}{(1-\rho^2)}}$$

Dimana $\hat{H}^{(N-1)}$ menyelesaikan masalah linear batas bebas,

$$\hat{H}_t^{(n)} + \tilde{\mathcal{L}}\hat{H}^{(n)} \geq 0, \hat{H}^{(n)} \leq k_n,$$

$$\left(\hat{H}_t^{(n)} + \tilde{\mathcal{L}}\hat{H}^{(n)}\right) \cdot \left(k_n - \hat{H}^{(n)}\right) = 0,$$

untuk $(t, y) \in [t_n, t_{n+1}) \times (0, +\infty)$, dimana

$$\hat{H}^{(n)}(t_{n+1}, y; a) = e^{-\gamma(1-\rho^2)(aD(y))}\hat{H}_*^{(n+1)}(t_{n+1}, y),$$

$$\hat{H}^{(n)}(t, 0; a) = e^{-\gamma(1-\rho^2)aK}$$

Indifference price diberikan oleh

$$\hat{p}(t, y; a) = -\frac{1}{\gamma(1-\rho^2)e^{r(T-t)}}\log \hat{H}^{(n)}(t, y; a), t \in [t_n, t_{n-1}),$$

Sehingga diperoleh pertidaksamaan variasi kuasilinier

$$\mathcal{A}^{ql}\hat{p}^{(n)} \leq 0,$$

$$\hat{p}^{(n)} \geq C(y) + h^{(n)}(t, y; a),$$

$$\mathcal{A}^{ql}\hat{p}^{(n)} \cdot \left(C(y) + h^{(n)}(t, y; a) - \hat{p}^{(n)}\right) = 0,$$

Untuk $(t, y) \in [t_n, t_{n+1}) \times (0, +\infty)$.

Dengan kondisi batas:

$$\hat{p}^{(n)}(t_{n+1}, y; a) = \hat{p}_*^{(n+1)}\left(t_{(n+1)}, y\right) + aD(y),$$

$$\hat{p}^{(n)}(t, 0; a) = aKe^{-r(T-t)}.$$

Hasil penelitian ini lebih kompleks dari pada penelitian oleh (Zhou & Bayraktar, 2016) dan (Clément, Sadefo-Kamdem, & Fono, 2019) karena penelitian ini membahas dua pergerakan saham yaitu pergerakan statis dan dinamis dengan menggunakan metode PDP Hamilton-Jacobi-Bellman untuk menentukan strategi lindung nilai statis-dinamis sekuensial yang optimal dan metode utilitas eksponensial untuk menentukan posisi statis optimal yang berbeda dari kedua penelitian sebelumnya.

SIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan, waktu jatuh tempo yang relatif singkat dari sebagian besar opsi yang diperdagangkan di bursa saham, memotivasi peneliti untuk merevisi lindung nilai statis yang berurutan dari waktu ke waktu sampai derivatif jangka panjang berakhir. Untuk menganalisis strategi ini secara optimal, peneliti menggunakan metode PDP Hamilton-Jacobi-Bellman, ketidaksetaraan variasi, dan menerapkan serangkaian transformasi yang mengurangi masalah untuk traktabilitas dengan utilitas eksponensial. Sehingga strategi ini menghasilkan model matematika yang dapat digunakan untuk menentukan harga yang wajar dari suatu opsi saham karyawan yang mengalami pergerakan perdagangan secara statis dan dinamis.

Model tersebut dapat digunakan untuk memperkirakan waktu kedepan. Pemegang opsi saham karyawan dapat memperbarui kontrak jangka pendek secara acak, dan tidak harus sesuai dengan jadwal yang ditetapkan. Keputusan berikutnya akan mengarah pada masalah penghentian berganda optimal. Hal ini juga terkait dengan waktu optimal untuk pembelian opsi berikutnya.

DAFTAR PUSTAKA

Bodie, K. M. (2002). Investments. *3.New York, New Jersey: Prentice Hall*.

By David F. Larcker, B. T. (2021, August 16). Stock-Option Financing in Pre-IPO Companies. doi: https://doi.org/10.1111/jofi.12752

Carr, P. (1998). Randomization and the American put. *Review of Financial Studies*.

Carr, p. E. (1998). Static Hedging of Exotic Options . *The Journal Of Finance , vol LIII, NO. 3*.

Clément, N. T., Sadefo-Kamdem, J., & Fono, L. A. (2019). Dynamic Optimal Hedge Ratio Design when Price and.

Derman, E. E. (1994). Static Options Replication. *Master thesis in Financial Economics*.

Fitri, A. (2020). Penentuan Nilai Opsi Saham Karyawan (OSK) dengan Menghitungkan Efek Dilusi menggunakan Metode Black-Scholes. *Penentuan Nilai Opsi Saham Karyawan (OSK) dengan Menghitungkan Efek Dilusi menggunakan Metode Black-Scholes.*(Skripsi thesis).

Halim, A. (2018). Analisis Investasi dan Aplikasinya: Dalam Aset Keuangan. *Edisi 2*.

Hartono. (2017). Teori Portofolio dan Analisis Investasi. *Edisi Kesepuluh*.

Jogiyanto. (2016, Sept). Teori Portofolio dan Analisis Investasi. *Edisi kesepuluh*.

Madura, J. (2000). Manajemen Keuangan Internasional. *(Edisi Keempat)*.

Maulana, H., & Sidarto, K. A. (2018). PENENTUAN NILAI OPSI SAHAM KARYAWAN (OSK)

DENGAN MEMPERHITUNGKAN. *Seminar Nasional Pendidikan MIPA*.

Merton, R. C. (1969, August). Lifetime Portofolio Selection Under Uncertainty : The Continous Time Case. *The Review of Economics and Statistics*, *51*(No, 3).

Prasetiono. Hidayah, N. (2016). Faktor Penentu Perusahaan Melakukan Pengambilan Keputusan Hedging Pada Derivatif Valuta Asing (Studi Kasus Pada Perusahaan Manufaktur Yang Terdaftar di Bei Periode 2011-2014). *Journal of Management*.

Syahril, E. (1991). A Maximum Principle in Stochastic Optimal Control, Graduate Diploma Project, Department of Applied Mathematics.

Tim, L., AitSahlia, F., Lee, K., Yamazaki, K., Egami, M., Hadjiliadis, O., . . . Lorig, M. (2012). Employee Stock Option : Exercise Timing, Hedging, and Valuation. (J. Yulin, Ed.) *3*.

Trimono, D. A. (2017). PEMODELAN HARGA SAHAM DENGAN GEOMETRIC BROWNIAN MOTION. *JURNAL GAUSSIAN*, *6*(2), 261-270. Retrieved from http://ejournal-s1.undip.ac.id/index.php/gaussian

Vulandari, R. T., & Sutrima. (2020). Black-Scholes Model of European Call Option. *INTERNATIONAL JOURNAL OF COMPUTING SCIENCE AND APPLIED MATHEMATICS, VOL. 6, NO. 2*,, 46-49.

W Farida Agustini, e. a. (2018). Stock price prediction using geometric Brownian. doi:10.1088/1742-6596/974/1/012047

Zhou, Z., & Bayraktar, E. (2016). ARBITRAGE, HEDGING AND UTILITY MAXIMIZATION USING SEMI-STATIC TRADING STRATEGIES WITH AMERICAN OPTIONS. *National Science Foundation*.