

ANALISIS KESTABILAN MODEL EKO-EPIDEMIOLOGI DENGAN FUNGSI RESPON HOLLING TIPE I

Fadhilatun Ni'mah

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia
e-mail: fadhilatun.18015@mhs.unesa.ac.id

Dian Savitri

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia
Penulis Korespondensi: diansavitri@unesa.ac.id

Abstrak

Pada model *predator-prey* tidak selalu diasumsikan bahwa kedua populasi dalam kondisi sehat, karena secara alami di alam terdapat *predator* maupun *prey* dengan kondisi sakit atau terinfeksi. Hal ini dapat mempengaruhi perilaku kedua populasi untuk bertahan hidup dan berburu makanan. Pada penelitian ini, dikembangkan model eko-epidemiologi yang merupakan kombinasi dari dua ilmu pengetahuan yaitu ekologi dan epidemiologi. Model eko-epidemiologi menjelaskan interaksi antara *predator* dan *prey* dengan adanya infeksi atau penyakit. Tujuan penelitian untuk merekonstruksi model eko-epidemiologi dengan mengasumsikan penyebaran penyakit terjadi pada populasi *prey* mengikuti siklus rentan-terinfeksi-tersembunyi. Fungsi respon yang digunakan yaitu fungsi respon Holling tipe I. Analisis pada sistem dengan menentukan titik kesetimbangan dan kestabilan masing-masing solusi. Hasil analisis diperoleh lima titik kesetimbangan yaitu titik kepunahan ketiga populasi, titik kepunahan *prey* terinfeksi dan *predator*, titik kepunahan *prey* terinfeksi, titik kepunahan *predator*, serta titik eksistensi ketiga populasi. Titik kepunahan ketiga populasi merupakan titik pelana sehingga kondisi ini tidak terdefinisi secara biologis. Ke-empat titik kesetimbangan lainnya stabil dengan syarat. Simulasi numerik menunjukkan kesesuaian dengan hasil analisis kestabilan titik kesetimbangan. Hasil simulasi ditampilkan dalam potret fase dan grafik untuk dinamika solusi sistem menuju titik kesetimbangan yang stabil. Dengan nilai parameter yang telah ditentukan, diperoleh kestabilan titik kesetimbangan hanya terjadi pada E_5 yaitu titik eksistensi ketiga populasi. Perubahan laju pemangsaan *predator* terhadap *prey* rentan maupun *prey* terinfeksi mempengaruhi kestabilan dari titik kesetimbangan E_5 yang semula stabil menjadi tidak stabil dan titik kesetimbangan E_3 yang semula tidak stabil menjadi stabil.

Kata Kunci: *Predator-prey*, Eko-epidemiologi, Infeksi Penyakit, Holling tipe I, Titik Kesetimbangan.

Abstract

On the predator-prey model is not always assumed that both populations are in healthy condition because naturally there are predator and prey populations with sick or infected condition. This can affect the behavior of both populations to survive and hunt for food. In this study, developed a model of eco-epidemiology, which is a combination of two sciences ecology and epidemiology. The eco-epidemiology model describes an interaction between predator and prey with presence of infection or disease. This study aim is to reconstruct a model of eco-epidemiology by assuming the spread of disease that occurs in prey population follows the cycle of susceptible-infected-susceptible. The response function used is a response function of Holling type I. Analysis of system to determine the equilibrium point and stability of each solution. The results obtained by analysis of five equilibrium points i.e. the point of extinction of three populations, the point of extinction of infected prey and predator, the point of extinction of infected prey, the point of extinction of predator, and the point of existence of three populations. The point of extinction of three populations is a saddle point, so this condition is not well-defined biologically. The four equilibrium points other stable conditions. Numerical simulation indicates suitability with the results of stability analysis from equilibrium points. Simulation results are shown in portrait phase and chart for dynamics of system solutions towards the equilibrium point is stable. With the parameter values that have been determined, obtained the stability of equilibrium point occurs only at E_5 that is the point of existence of three populations. Change in rate of predation of predator against susceptible prey and infected prey affect the stability of equilibrium point E_5 was originally stable to unstable and equilibrium point E_3 was originally unstable to stable.

Keywords: *Predator-Prey*, Eco-epidmiology, disease infection, Holling type I, equilibrium point.

PENDAHULUAN

Matematika merupakan salah satu ilmu yang mempresentasikan ide dan konsep dasar ilmu

pengetahuan, salah satunya yaitu ekologi. Ekologi adalah ilmu yang mengkaji tentang interaksi antara makhluk hidup dan lingkungan serta interaksi antara makhluk hidup yang satu dengan makhluk hidup

lain. Interaksi tersebut dapat berupa simbiosis, kompetisi, dan predasi. Predasi merupakan interaksi antara populasi *predator* (pemangsa) dan *prey* (mangsa) yang hidup pada lingkungan tertutup. Salah satu topik yang sering dibahas dalam ilmu ekologi adalah model *predator-prey*. Model *predator-prey* merepresentasikan hubungan predasi

Pemodelan matematika epidemiologi menarik untuk dibahas. Model epidemiologi terkait konsep dasar penyebaran penyakit. Pada artikel ini dibahas model eko-epidemiologi yang merupakan gabungan antara model ekologi dan model epidemiologi.

Menurut (Boyce dan Diprima, 2012), pada tahun 1926, Lotka dan Volterra memperkenalkan model *predator-prey* dengan mempertimbangkan mangsa (*prey*) merupakan sumber makanan utama untuk pemangsa (*predator*). Mu'tamar dan Zulkarnain (2017) mengatakan, model yang dikenalkan oleh Lotka dan Volterra diasumsikan bahwa populasi *predator* dan *prey* dengan keadaan sehat. Sedangkan, dalam kondisi nyata di lingkungan menunjukkan bahwa ada populasi *predator* atau *prey* dalam keadaan sakit atau terinfeksi. Oleh sebab itu, (May dan Leonard, 1975) mengkonstruksi model untuk mempelajari pengaruh penyebaran penyakit pada sistem *predator-prey*. Model tersebut menggabungkan model epidemik dasar dan model Lotka Volterra.

Beberapa peneliti membahas model *predator-prey* dimana populasi *prey* dalam keadaan terinfeksi. Wuhaib dan Abu-Hasan (2013) mengkonstruksi model eko-epidemiologi dengan siklus rentan-terinfeksi-rentan dan mempertimbangkan adanya pemanenan pada *prey* terinfeksi dimana *prey* terinfeksi tidak dimangsa oleh *predator*. Menurut (Halmes, dkk. 1972), ada beberapa kasus mengenai hal ini, contohnya interaksi antara siput air dan ikan.

Penelitian model eko-epidemiologi yang dibahas (Purnomo, dkk. 2017) mempertimbangkan *predator* hanya memangsa *prey* terinfeksi dan adanya pemanenan pada *prey* rentan. Selanjutnya, model eko-epidemiologi yang dikembangkan oleh (Maisaroh, dkk. 2020) dengan mengasumsikan *prey* terinfeksi tidak dapat kembali menjadi *prey* rentan serta adanya pemanenan pada *predator*.

Berbeda dengan penelitian-penelitian tersebut, pada artikel ini dikembangkan model yang mempertimbangkan siklus rentan-terinfeksi-rentan yang dialami *prey* dimana *predator* memangsa *prey*

rentan dan *prey* terinfeksi serta tidak mempertimbangkan adanya pemanenan. Menurut (Ghanbari, dkk. 2020), fungsi respon menggambarkan perilaku interaksi antara populasi *predator* dengan populasi *prey*. Pada artikel ini, diasumsikan interaksi *predator* dengan *prey* mengikuti fungsi respon Holling tipe I, yang artinya *predator* bersifat pasif dalam mencari *prey* untuk dimangsa.

Tujuan penelitian ini yaitu merekonstruksi model *predator-prey* dengan mempertimbangkan adanya infeksi atau penyakit pada populasi *prey*, menentukan titik kesetimbangan, menganalisis kestabilan titik kesetimbangan, dan simulasi numerik untuk menggambarkan kesesuaian dengan hasil perhitungan analisis kestabilan. Nilai parameter dalam simulasi numerik merujuk pada nilai parameter yang digunakan oleh Maisaroh, dkk. (2020) dan beberapa di antaranya diasumsikan oleh peneliti.

KAJIAN TEORI

SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL

Persamaan yang mengandung diferensial atau turunan dari satu atau lebih fungsi yang belum diketahui disebut persamaan diferensial. Sedangkan, sistem persamaan diferensial yaitu sistem dengan n persamaan diferensial dengan n fungsi yang belum diketahui, dimana $n \geq 2$. Secara umum, sistem ini mempunyai bentuk sebagai berikut:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (2.1)$$

dengan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ yakni fungsi t dan x yakni variabel terikat pada selang waktu t (Kreyszig, 2011).

TITIK KESETIMBANGAN

Titik kesetimbangan adalah solusi sistem persamaan yang tak berubah dalam waktu. Misalkan terdapat sistem persamaan diferensial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.2)$$

Sistem persamaan (2.2) memiliki titik kesetimbangan $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ apabila memenuhi $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}) = 0$ (Olsder & van der Woude, 2004).

LINEARISASI

Linearisasi yaitu proses mengubah sistem persamaan diferensial non-linear menjadi sistem persamaan diferensial linear. Linearisasi dilakukan untuk mengetahui perilaku sistem di sekitar titik kesetimbangan. Diperlukan matriks Jacobi untuk memperoleh hasil pelinearan tersebut.

Diberikan $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ pada sistem (2.2) dengan $f_i \in C^1(E), i = 1, 2, \dots, n$ (Hale, 1991).

$$J(f(\tilde{x})) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\tilde{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\tilde{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\tilde{x}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\tilde{x}) \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Persamaan (2.3) dinamakan matriks Jacobi dari f pada titik \tilde{x} . Kestabilan pada titik kesetimbangan dapat diketahui dengan mencari nilai eigen pada matriks Jacobi $J(f(\tilde{x}))$ jika titik kesetimbangan itu hiperbolik. Titik kesetimbangan \tilde{x} dapat dikatakan hiperbolik apabila seluruh nilai eigen dari matriks Jacobi $J(f(\tilde{x}))$ pada (2.3) memiliki bagian real tak nol (Perko, 2011).

NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN

Nilai eigen dari suatu matriks digunakan untuk menentukan kestabilan dari titik kesetimbangan. Menurut (Anton, 1987), apabila terdapat matriks A dengan ukuran $n \times n$ dimana Ax adalah kelipatan skalar dari x , maka vektor eigen dari A yaitu vektor tak nol x di dalam \mathbb{R}^n dan dapat dinyatakan pada persamaan berikut:

$$Ax = \lambda x \quad (2.4)$$

dimana λ adalah nilai eigen dari matriks A serta vektor x adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan λ .

Untuk menentukan nilai eigen dari matriks A dengan ukuran $n \times n$, maka persamaan (2.4) dapat diuraikan menjadi:

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad (2.5)$$

dimana I adalah matriks identitas. Untuk memperoleh λ sebagai nilai eigen, maka harus ada suatu solusi dari persamaan (2.5) yang merupakan solusi tak nol. Solusi tersebut dapat diperoleh melalui persamaan karakteristik yang dapat diuraikan pada persamaan berikut:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (2.6)$$

KESTABILAN TITIK KESETIMBANGAN

Kestabilan titik kesetimbangan dapat ditentukan oleh bagian real pada nilai eigen yang dihasilkan dari pelinearan dengan matriks Jacobi. Misalkan terdapat sistem persamaan linear $\dot{x} = Ax$ dengan A matriks berukuran $n \times n$ yang mempunyai m nilai eigen yang berbeda λ_i dimana $i = 1, 2, \dots, m$ dan $m \leq n$. Secara umum, kestabilan titik kesetimbangan mempunyai sifat (Tu, Pieerre N. V., 1994):

1. Stabil, jika:
 - a. Setiap nilai eigen real bernilai tak positif ($\lambda_i \leq 0, \lambda_i \in \mathbb{R}$) atau
 - b. Setiap bagian real dari nilai eigen kompleks bernilai tak positif ($Re(\lambda_i) \leq 0, \lambda_i \in \mathbb{C}$).
2. Stabil asimtotik, jika:
 - a. Setiap nilai eigen bernilai real negatif ($\lambda_i < 0, \lambda_i \in \mathbb{R}$) atau
 - b. Setiap bagian real dari nilai eigen bernilai negatif ($Re(\lambda_i) < 0, \lambda_i \in \mathbb{C}$).
3. Stabil murni, jika:

Setiap bagian real dari nilai eigen kompleks bernilai nol ($Re(\lambda_i) = 0, \lambda_i \in \mathbb{C}$).
4. Tidak stabil, jika:
 - a. Ada nilai eigen real bernilai positif ($\exists \lambda_i > 0, \lambda_i \in \mathbb{R}$) atau
 - b. Ada bagian real dari nilai eigen kompleks bernilai positif ($\exists \lambda_i \in \mathbb{C}, Re(\lambda_i) > 0, \lambda_i \in \mathbb{C}$).

KRITERIA ROUTH-HURWITZ

Apabila A yaitu matriks berukuran $n \times n$ untuk nilai eigen λ , maka persamaan (2.6) dapat diturunkan menjadi persamaan polinomial orde ke- n . Persamaan polinomial ini dinamakan persamaan karakteristik serta dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0 \quad (2.7)$$

dimana $a_0 \neq 0$ adalah koefisien dari persamaan karakteristik. Akar-akar dari persamaan karakteristik (2.7) dapat diperoleh dengan penyusunan tabel Routh-Hurwitz sebagai berikut:

Tabel 1. Tabel Routh-Hurwitz

a_0	a_2	a_4	...	a_{2n-2}
a_1	a_3	a_5	...	a_{2n-2}
b_1	b_2	b_3
c_1	c_2	c_3
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

dimana $n = 1, 2, 3, \dots, k$ dinyatakan:

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}, b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}, b_n = \frac{a_1 a_{2n} - a_0 a_{2n+1}}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}, c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}, c_n = \frac{b_1 a_{2n+1} - a_1 b_{n+1}}{b_1}$$

Perhitungan dilakukan sampai seluruh elemen pada kolom pertama didapatkan hasil berupa nilai

nol. Pada kriteria Routh-Hurwitz, seluruh akar-akar dari persamaan (2.7) mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika seluruh elemen pada kolom pertama table Routh-Hurwitz memiliki tanda sama, yaitu semua bernilai positif ataupun semua bernilai negatif (Olsder & Woude, 2004).

MODEL LOTKA-VOLTERRA

Alfred James Lotka dan Vito Volterra memperkenalkan model *predator-prey* dimana model tersebut menggambarkan interaksi antara populasi *predator* (pemangsa) dengan populasi *prey* (mangsa) dan dikenal sebagai model Lotka Volterra (Wiggins, 2003). Representasi $x(t)$ adalah jumlah *prey* dan $y(t)$ adalah jumlah *predator* pada suatu daerah di waktu t . Perubahan jumlah masing-masing populasi ditulis dalam persamaan:

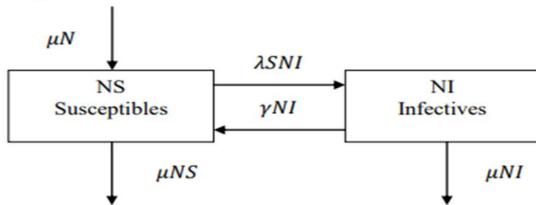
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} &= \beta xy - by \end{aligned} \tag{2.8}$$

dimana $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. Model persamaan (2.8) menyatakan bahwa:

1. Jumlah *prey* tumbuh proporsional sebesar a dan berkurang sebab dimakan *predator* tergantung frekuensi interaksi sebesar α .
2. Jumlah *predator* tumbuh proporsional sebesar b serta tumbuh disebabkan kecukupan pangan sesuai frekuensi interaksi dengan *prey* sebesar β .

MODEL SIS

Model SIS (*Susceptible Infective Susceptible*) yakni model penyebaran penyakit melalui karakter tiap individu rentan terinfeksi penyakit, lalu sembuh melalui proses medis ataupun secara alami. Namun, kesembuhan individu tak menjamin kebal pada infeksi. Yang artinya, individu tersebut sewaktu-waktu kembali terinfeksi penyakit yang sama. Diagram kompartemen model SIS dapat dinyatakan sebagai berikut (Hethcote, 1989).



Gambar 1: Diagram kompartemen model SIS

Sistem persamaan tersebut yaitu:

$$\begin{aligned} (NS(t))' &= -\lambda SNI + \gamma NI + \mu N - \mu NS \\ (NI(t))' &= \lambda SNI - \gamma NI - \mu NI \\ NS(0) &= NS_0 > 0, \\ NI(0) &= I_0 > 0, NS(t) + NI(t) = 1 \end{aligned} \tag{2.9}$$

dimana N merupakan ukuran populasi konstan, S populasi rentan, I populasi terinfeksi, λ laju terinfeksi, γ laju rentan, μN laju kelahiran rentan, dan μNS laju kematian rentan, dan μNI laju kematian terinfeksi.

PERTUMBUHAN LOGISTIK

Asumsi yang digunakan pada model pertumbuhan logistik yaitu jumlah populasi mendekati titik kesetimbangan di masa tertentu. Misalkan populasi satu spesies mengalami pertumbuhan alami dengan persamaan logistik, dengan N menunjukkan populasi, K adalah *carrying capacity* serta \bar{a} laju pertumbuhan intrinsik atau daya tumbuh suatu populasi. Model pertumbuhan logistik dinyatakan dengan persamaan sebagai berikut (Sunarsih & Hidayati, 2010):

$$\frac{dN}{dt} = \bar{a}N \left(1 - \frac{N}{K}\right) \tag{2.10}$$

FUNGSI RESPON

Fungsi respon mengacu meningkatnya populasi *predator* atau menurunnya populasi *prey* ketika berinteraksi. Fungsi respon merupakan tingkat predasi ataupun daya makan *predator* pada jumlah makanan atau mangsa. Holling memperkenalkan 3 fungsi respon, yakni fungsi respon Holling tipe I, tipe II, serta tipe III (Holling, 1965).

Fungsi respon Holling tipe I terjadi ketika *predator* bersifat pasif dimana saat populasi *prey* meningkat, maka akan meningkat juga daya konsumsi *predator*. Persamaan fungsi respon Holling tipe I yaitu:

$$p(x) = mx. \tag{2.11}$$

Fungsi respon Holling Tipe II terjadi ketika *predator* bersifat aktif dalam mencari *prey* serta membutuhkan waktu untuk mencerna *prey* tersebut. Persamaan fungsi respon Holling tipe II dapat dinyatakan sebagai berikut:

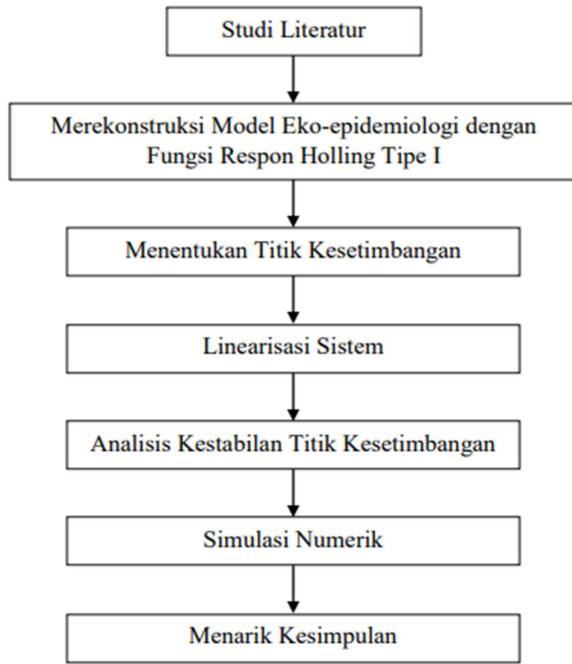
$$p(x) = \frac{mx}{a + x}. \tag{2.12}$$

Fungsi respon Holling tipe III terjadi ketika populasi *prey* berkurang sehingga *predator* mencari populasi *prey* yang lain untuk dimangsa. Persamaan fungsi respon Holling tipe III yaitu:

$$p(x) = \frac{mx^2}{a^2 + x^2}. \tag{2.13}$$

METODE

Rancangan penelitian model eko-epidemiologi dengan fungsi respon Holling tipe I sebagai berikut:



Gambar 2. Tahapan Penelitian

Jenis penelitian ini adalah studi literatur yang mempelajari konsep serta teori mengenai permasalahan yang dibahas melalui berbagai sumber pustaka berupa buku referensi, artikel, dan jurnal. Pada penelitian ini dilakukan rekonstruksi model eko-epidemiologi menggunakan fungsi respon Holling tipe I. Analisis meliputi menentukan titik kesetimbangan, menentukan kestabilan titik kesetimbangan berdasarkan kriteria nilai eigen serta kriteria Routh-Hurwitz, dan juga dilakukan simulasi numerik untuk mengetahui kesesuaian antara hasil perhitungan analisis dengan hasil perhitungan secara numerik yang ditampilkan dalam potret fase dan grafik *time series* menggunakan *software* Python.

HASIL DAN PEMBAHASAN

MODEL MATEMATIKA

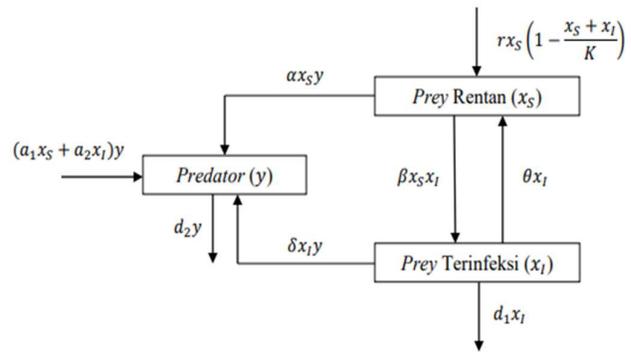
Beberapa penelitian mengasumsikan bahwa populasi *predator-prey* dalam kondisi sehat, kondisi di alam menunjukkan bahwa terdapat *prey* maupun *predator* dengan kondisi sakit atau terinfeksi sehingga mempengaruhi perilaku kedua populasi untuk berburu makanan dan bertahan hidup. Pada penelitian ini, dikonstruksi model *predator-prey*

dimana terjadi penyebaran penyakit pada populasi *prey*.

Asumsi yang digunakan dalam merekonstruksi model yaitu sebagai berikut:

1. Terdapat infeksi penyakit pada *prey* sehingga populasi *prey* dapat dibedakan menjadi dua kompartemen yaitu kompartemen *prey* rentan (x_s) dan kompartemen *prey* terinfeksi (x_i).
2. Pertumbuhan pada populasi *prey* mengikuti pertumbuhan logistik dimana r sebagai laju pertumbuhan intrinsik *prey* rentan karena hanya *prey* rentan yang dapat melakukan reproduksi, serta lingkungan mendukung keberlangsungan *prey* rentan maupun *prey* terinfeksi sebesar K .
3. Laju penyebaran penyakit pada populasi *prey* terjadi sebesar β , dimana *prey* terinfeksi dapat kembali menjadi *prey* rentan sebesar θ .
4. *Predator* memangsa *prey* rentan dan *prey* terinfeksi dengan fungsi respon Holling tipe I.
5. Ada kematian alami pada *prey* terinfeksi dan *predator* serta tidak ada kematian alami pada *prey* rentan.
6. *Predator* tidak dapat terinfeksi oleh penyebaran penyakit yang terjadi pada *prey*.

Berdasarkan asumsi yang diuraikan di atas, dapat diilustrasikan dalam diagram kompartemen berikut.



Gambar 3. Diagram kompartemen model eko-epidemiologi

Berdasarkan diagram kompartemen pada Gambar 3, maka konstruksi model eko-epidemiologi dengan fungsi respon Holling tipe I dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_s}{dt} &= rx_s \left(1 - \frac{x_s + x_i}{K} \right) - \beta x_s x_i + \theta x_i - \alpha x_s y, \\
 \frac{dx_i}{dt} &= \beta x_s x_i - \theta x_i - \delta x_i y - d_1 x_i, \\
 \frac{dy}{dt} &= a_1 x_s y + a_2 x_i y - d_2 y.
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Semua parameter yang digunakan pada persamaan (4.1) bernilai positif. Selanjutnya, pada Tabel 2 disajikan interpretasi biologis dari setiap parameter.

Tabel 2. Variabel dan Parameter

Simbol	Interpretasi Biologis
$\frac{dx_S}{dt}$	Laju perubahan populasi <i>prey</i> rentan terhadap waktu
$\frac{dx_I}{dt}$	Laju perubahan populasi <i>prey</i> terinfeksi terhadap waktu
$\frac{dy}{dt}$	Laju perubahan populasi <i>predator</i> terhadap waktu
r	Laju pertumbuhan intrinsik <i>prey</i> rentan
K	Daya dukung lingkungan
β	Laju interaksi antara <i>prey</i> rentan dengan <i>prey</i> terinfeksi
θ	Laju perpindahan kompartemen <i>prey</i> terinfeksi ke <i>prey</i> rentan
α	Laju pemangsaan <i>prey</i> rentan oleh <i>predator</i>
δ	Laju pemangsaan <i>prey</i> terinfeksi oleh <i>predator</i>
a_1	Konversi pertumbuhan dari <i>prey</i> rentan menjadi <i>predator</i>
a_2	Konversi pertumbuhan dari <i>prey</i> terinfeksi menjadi <i>predator</i>
d_1	Kematian alami <i>prey</i> terinfeksi
d_2	Kematian alami <i>predator</i>

TITIK KESETIMBANGAN

Didefinisikan:

$\mathbb{R}_+^3 = \{(x_S, x_I, y) | x_S \geq 0, x_I \geq 0, y \geq 0, x_S, x_I, y \in \mathbb{R}\}$.
Titik kesetimbangan E pada persamaan (4.1) didapatkan dengan menyelesaikan $\frac{dx_S}{dt} = 0, \frac{dx_I}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 0$, dan memenuhi $E \in \mathbb{R}_+^3$. Sehingga dari sistem persamaan (4.1) diperoleh sebagai berikut:

$$rx_S \left(1 - \frac{x_S + x_I}{K}\right) - \beta x_S x_I + \theta x_I - \alpha x_S y = 0, \quad (4.2)$$

$$\beta x_S x_I - \theta x_I - \delta x_I y - d_1 x_I = 0, \quad (4.3)$$

$$a_1 x_S y + a_2 x_I y - d_2 y = 0. \quad (4.4)$$

Dari persamaan (4.3) diperoleh:

$$(\beta x_S - \theta - \delta y - d_1)x_I = 0.$$

Maka, didapatkan 2 kondisi yaitu:

$$x_I = 0 \quad (4.5)$$

atau

$$(\beta x_S - \theta - \delta y - d_1) = 0. \quad (4.6)$$

Dari persamaan (4.4) diperoleh:

$$(a_1 x_S + a_2 x_I - d_2)y = 0.$$

Maka, didapatkan 2 kondisi yaitu:

$$y = 0 \quad (4.7)$$

atau

$$(a_1 x_S + a_2 x_I - d_2) = 0. \quad (4.8)$$

Dari persamaan (4.2) diperoleh:

$$x_S \left(r \left(1 - \frac{x_S + x_I}{K} \right) - \beta x_I - \alpha y \right) + \theta x_I = 0. \quad (4.9)$$

Sehingga, dari persamaan (4.5), (4.6), (4.7), dan (4.8) didapatkan 4 kasus untuk mengetahui kondisi pada persamaan (4.9) sebagai berikut:

1. Berdasarkan persamaan (4.5) dan (4.7), ketika $x_I = 0$ dan $y = 0$, diperoleh $x_S = 0$ atau $x_S = K$.
2. Dari persamaan (4.5) dan (4.8), ketika $x_I = 0$ dan $y \neq 0$, diperoleh $x_S = \frac{d_2}{a_1}$. Sehingga, didapatkan $y = \frac{r(a_1 K - d_2)}{a_1 \alpha K}$.
3. Dari persamaan (4.6) dan (4.7), ketika $x_I \neq 0$ dan $y = 0$, maka $x_S = \frac{d_1 + \theta}{\beta}$. Sehingga diperoleh $x_I = \frac{r(\beta d_1 K + \beta K \theta - d_1^2 - 2d_1 \theta - \theta^2)}{\beta(\beta d_1 K + d_1 r + r \theta)}$.
4. Berdasarkan persamaan (4.6) dan (4.8) yaitu ketika $x_I \neq 0$ dan $y \neq 0$, diperoleh $x_S \neq 0$.

Dengan demikian, dari 4 kasus di atas dapat disimpulkan terdapat 5 titik kesetimbangan sebagai berikut:

1. Titik kepunahan ketiga populasi $E_1 = (0, 0, 0)$.
2. Titik $E_2 = (K, 0, 0)$ yang menyatakan kepunahan *prey* terinfeksi dan *predator*, hanya *prey* rentan yang bertahan hidup. Titik E_2 merupakan titik yang selalu terdefinisi secara biologis $E_2 \in \mathbb{R}_+^3$, yang berarti bahwa titik tersebut pasti tercapai dalam kondisi nyata di lingkungan.
3. Titik kepunahan *prey* terinfeksi $E_3 = \left(\frac{d_2}{a_1}, 0, \frac{r(a_1 K - d_2)}{a_1 \alpha K}\right)$. Titik E_3 terdefinisi secara biologis $E_3 \in \mathbb{R}_+^3$ jika $K > \frac{d_2}{a_1}$.
4. Titik kepunahan *predator* $E_4 = \left(\frac{d_1 + \theta}{\beta}, \frac{r(\beta d_1 K + \beta K \theta - d_1^2 - 2d_1 \theta - \theta^2)}{\beta(\beta d_1 K + d_1 r + r \theta)}, 0\right)$. E_4 terdefinisi secara biologis $E_4 \in \mathbb{R}_+^3$ jika $\beta > \frac{d_1^2 + 2d_1 \theta + \theta^2}{d_1 K + K \theta}$.
5. Titik eksistensi ketiga populasi $E_5 = (x_S^*, x_I^*, y^*)$. dengan x_S^* adalah solusi positif dari persamaan kuadrat $Ax^2 + Bx + C$

dimana

$$A = a_1 \beta \delta K - a_2 \alpha \beta K + a_1 \delta r - a_2 \delta r,$$

$$B = -a_1 \delta K \theta + a_2 a d_1 K + a_2 \alpha K \theta + a_2 \delta K r -$$

$$\beta d_2 \delta K - d_2 \delta r,$$

$$C = d_2 \delta K \theta.$$

Akar-akar positif persamaan kuadrat $Ax^2 + Bx + C$ akan terpenuhi jika $B < 0$ dan $C > 0$.

Kemudian, persamaan x_I^* dan y^* diperoleh sebagai berikut:

$$x_I^* = -\frac{a_1 x_S^* - d_2}{a_2},$$

$$y^* = \frac{\beta x_S^* - d_1 - \theta}{\delta},$$

Titik E_5 terdefinisi secara biologis $E_5 \in \mathbb{R}_+^3$ jika:

- (1) $B < 0$ dan $C > 0$,
- (2) $d_2 > a_1 x_S^*$, dan
- (3) $\beta > \frac{d_1 + \theta}{x_S^*}$.

ANALISIS KESTABILAN TITIK KESETIMBANGAN

Linearisasi dilakukan pada sistem persamaan (4.1), maka dapat diketahui kestabilan dari titik kesetimbangan melalui nilai eigen yang dihasilkan. Linearisasi sistem dengan menggunakan matriks Jacobi sebagai berikut:

$$J(x_S, x_I, y) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

dimana

$$\begin{aligned} c_{11} &= r \left(1 - \frac{2x_S + x_I}{K} \right) - \beta x_I - \alpha y, \\ c_{12} &= -\frac{rx_S}{K} - \beta x_S + \theta, \\ c_{13} &= -\alpha x_S, \\ c_{21} &= \beta x_I, \\ c_{22} &= \beta x_S - \delta y - d_1 - \theta, \\ c_{23} &= -\delta x_I, \\ c_{31} &= a_1 y, \\ c_{32} &= a_2 y, \\ c_{33} &= a_1 x_S + a_2 x_I - d_2. \end{aligned}$$

Untuk mendapatkan nilai eigen, maka dilakukan substitusi masing-masing titik kesetimbangan ke dalam matriks Jacobi (4.10).

1. Kestabilan titik kesetimbangan $E_1 = (0, 0, 0)$

Matriks Jacobi dari titik kesetimbangan E_1 yaitu

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} r & \theta & 0 \\ 0 & -d_1 - \theta & 0 \\ 0 & 0 & -d_2 \end{bmatrix}.$$

Persamaan karakteristik $\det(J(E_1) - \lambda I) = 0$, yaitu

$$\begin{aligned} (J(E_1) - \lambda I) &= 0, \\ \begin{bmatrix} r - \lambda & \theta & 0 \\ 0 & -d_1 - \theta - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -d_2 - \lambda \end{bmatrix} &= 0, \\ (\lambda - r)(\lambda + d_1 + \theta)(\lambda + d_2) &= 0. \end{aligned}$$

Nilai-nilai eigennya adalah:

$$\lambda_1 = r, \lambda_2 = -d_1 - \theta, \text{ dan } \lambda_3 = -d_2.$$

Semua parameter bernilai positif, diperoleh $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, dan $\lambda_3 < 0$. Dari nilai eigen yang dihasilkan, maka dapat disimpulkan bahwa E_1 merupakan titik pelana, sehingga titik kesetimbangan E_1 bersifat tidak stabil.

2. Kestabilan titik kesetimbangan $E_2 = (K, 0, 0)$

Matriks Jacobi dari titik kesetimbangan E_2 adalah

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} -r & -\beta K - r + \theta & -\alpha K \\ 0 & \beta K - d_1 - \theta & 0 \\ 0 & 0 & a_1 K - d_2 \end{bmatrix}.$$

Persamaan karakteristik dapat diuraikan menjadi $(\lambda + r)(\beta K - d_1 - \lambda - \theta)(a_1 K - d_2 - \lambda) = 0$.

Sehingga, nilai-nilai eigennya adalah:

$$\lambda_4 = -r, \lambda_5 = \beta K - d_1 - \theta, \text{ dan } \lambda_6 = a_1 K - d_2.$$

Jika $K < \min\left\{\frac{d_1 + \theta}{\beta}, \frac{d_2}{a_1}\right\}$, maka $\beta K - d_1 - \theta < 0$ dan $a_1 K - d_2 < 0$. Sehingga didapatkan $\lambda_{4,5,6} < 0$. Dapat disimpulkan bahwa E_2 stabil asimtotik.

3. Kestabilan titik kesetimbangan $E_3 =$

$$\left(\frac{d_2}{a_1}, 0, \frac{r(a_1 K - d_2)}{a_1 \alpha K}\right)$$

Matriks Jacobi dari titik kesetimbangan E_3 adalah

$$J(E_3) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & c_{22} & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 0 \end{bmatrix},$$

dimana

$$\begin{aligned} c_{11} &= -\frac{d_2 r}{a_1 K}, \\ c_{12} &= -\frac{d_2 r}{a_1 K} - \frac{\beta d_2}{a_1} + \theta, \\ c_{13} &= -\frac{\alpha d_2}{a_1}, \\ c_{22} &= \frac{\beta d_2}{a_1} - \frac{\delta r(a_1 K - d_2)}{a_1 \alpha K} - d_1 - \theta, \\ c_{31} &= \frac{r(a_1 K - d_2)}{a_1 \alpha K}, \\ c_{32} &= \frac{r(a_1 K - d_2) a_2}{a_1 \alpha K}. \end{aligned}$$

Misalkan

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= a_1 \alpha d_1 K + a_1 \alpha K \theta + a_1 \delta K r \\ \zeta_2 &= \alpha \beta d_2 K + d_2 \delta r \\ \zeta_3 &= -4a_1^2 d_2 K^2 r + 4a_1 d_2^2 K r + d_2^2 r^2 \end{aligned}$$

Maka, nilai-nilai eigennya adalah

$$\lambda_7 = -\frac{\zeta_1 - \zeta_2}{a_1 \alpha K} \text{ dan } \lambda_{8,9} = \frac{1}{2} \left(\frac{-d_2 r \pm \sqrt{\zeta_3}}{a_1 K} \right).$$

Jika $\zeta_1 > \zeta_2$, maka $\lambda_7 < 0$. Apabila syarat tersebut terpenuhi, maka kestabilan pada titik kesetimbangan E_3 bergantung pada nilai $\lambda_{8,9}$. Karena $Re(\lambda_{2,3}) < 0$, maka kestabilannya bergantung pada nilai ζ_3 . Jika $\zeta_3 < 0$, maka diperoleh $\lambda_{8,9} \in \mathbb{C}$ dengan $Re(\lambda_{2,3}) < 0$. Sedangkan, jika $\zeta_3 \geq 0$, maka diperoleh $\lambda_{8,9} < 0, \lambda_{8,9} \in \mathbb{R}$ dengan syarat $\sqrt{\zeta_3} < d_2 r$. Sehingga, titik kesetimbangan E_3 stabil asimtotik.

4. Kestabilan titik kesetimbangan $E_4 =$

$$\left(\frac{d_1 + \theta}{\beta}, \frac{r(\beta d_1 K + \beta K \theta - d_1^2 - 2d_1 \theta - \theta^2)}{\beta(\beta d_1 K + d_1 r + r \theta)}, 0\right)$$

Misalkan

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \beta d_1 K + \beta K \theta - d_1^2 - 2d_1 \theta - \theta^2 \\ \eta_2 &= \beta d_1 K + d_1 r + r \theta \end{aligned}$$

Matriks Jacobi dari titik kesetimbangan E_4 adalah

$$J(E_4) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & 0 & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix},$$

dimana

$$\begin{aligned} c_{11} &= r - 2 \left(\frac{r(d_1 + \theta)}{\beta K} \right) + \frac{r \eta_1 (r - \beta K)}{\beta K \eta_2}, \\ c_{12} &= -\frac{r(d_1 + \theta)}{\beta K} - d_1, \\ c_{13} &= -\frac{\alpha(d_1 + \theta)}{\beta}, \\ c_{21} &= \frac{r \eta_1}{\eta_2}, \end{aligned}$$

$$c_{23} = \frac{\delta r \eta_1}{\beta \eta_2},$$

$$c_{33} = \frac{a_1(d_1 + \theta)}{\beta} + \frac{a_2 r \eta_1}{\beta \eta_2} - d_2.$$

Misalkan

$$\begin{aligned} \tau_1 &= a_1 \beta d_1^2 K + a_1 \beta d_1 K \theta + a_2 \beta d_1 K r + \\ &\quad a_2 \beta K r \theta - \beta^2 d_1 d_2 K + a_1 d_1^2 r + 2a_1 d_1 r \theta + \\ &\quad a_1 r \theta^2 - a_2 d_1^2 r - 2a_2 d_1 r \theta - a_2 r \theta^2 - \\ &\quad \beta d_1 d_2 r - \beta d_2 r \theta \\ \tau_2 &= \beta(d_1 K + d_1 r + r \theta) \\ \tau_3 &= \beta^2 K^2 r \theta + \beta d_1^2 K r - \beta K r \theta^2 + d_1^2 r^2 + \\ &\quad 2d_1 r^2 \theta + r^2 \theta^2 \\ \tau_4 &= -4\beta^4 d_1^3 K^4 r - 4\beta^4 d_1^2 K^4 r \theta + \beta^4 K^4 r^2 \theta^2 + \\ &\quad 4\beta^3 d_1^3 K^3 r - 8\beta^3 d_1^3 K^3 r^2 + 8\beta^3 d_1^3 K^3 r \theta - \\ &\quad 14\beta^3 d_1^3 K^3 r^2 \theta + 4\beta^3 d_1^2 K^3 r \theta^2 - \\ &\quad 8\beta^3 d_1 K^3 r^2 \theta^2 - 2\beta^3 K^3 r^2 \theta^3 + \\ &\quad 9\beta^2 d_1^4 K^2 r^2 - 4\beta^2 d_1^3 K^2 r^3 + \\ &\quad 24\beta^2 d_1^3 K^2 r^2 \theta - 10\beta^2 d_1^2 K^2 r^3 \theta + \\ &\quad 22\beta^2 d_1^2 K^2 r^2 \theta^2 - 8\beta^2 d_1 K^2 r^3 \theta^2 + \\ &\quad 8\beta^2 d_1 K^2 r^2 \theta^3 - 2\beta^2 K^2 r^3 \theta^3 + \\ &\quad \beta^2 K^2 r^2 \theta^4 + 6\beta d_1^4 K r^3 + 20\beta d_1^3 K r^3 \theta + \\ &\quad 24\beta d_1^2 K r^3 \theta^2 + 12\beta d_1 K r^3 \theta^3 + \\ &\quad 2\beta K r^3 \theta^4 + d_1^4 r^4 + 4d_1^3 r^4 \theta + 6d_1^2 r^4 \theta^2 + \\ &\quad 4d_1 r^4 \theta^3 + r^4 \theta^4 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Maka, nilai-nilai eigennya adalah:

$$\lambda_{10} = \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_3} \text{ dan } \lambda_{11,12} = \frac{1}{2} \left(\frac{-\tau_3 \pm \sqrt{\tau_4}}{\tau_2 K} \right).$$

Jika $\tau_1 < \tau_2$, maka $\lambda_{10} < 0$. Apabila syarat tersebut terpenuhi, maka kestabilan pada titik kesetimbangan E_4 bergantung pada nilai $\lambda_{11,12}$. Karena semua parameter bernilai positif, maka dapat diketahui bahwa τ_2 pada persamaan (4.11) pasti bernilai positif. Agar $Re(\lambda_{11,12}) < 0$, maka harus dipenuhi bahwa nilai $\tau_3 > 0$. Ketika $Re(\lambda_{11,12}) < 0$, maka kestabilan E_4 bergantung pada nilai τ_4 . Jika $\tau_4 < 0$, maka $\lambda_{11,12} \in \mathbb{C}$ dengan $Re(\lambda_{11,12}) < 0$. Sedangkan, jika $\tau_4 \geq 0$, maka diperoleh $\lambda_{11,12} < 0, \lambda_{11,12} \in \mathbb{R}$ dengan syarat $\sqrt{\tau_4} < \tau_3$. Dengan demikian, E_4 stabil asimtotik.

5. Kestabilan titik kesetimbangan $E_5 = (x_S^*, x_I^*, y^*)$

Matriks Jacobi dari titik kesetimbangan E_5 adalah

$$J(E_5) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & 0 & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & 0 \end{bmatrix},$$

dimana

$$c_{11} = r \left(1 - \frac{2x_S^* + x_I^*}{k} \right) - \beta x_I^* - \alpha y^*,$$

$$c_{12} = -\frac{r x_S^*}{k} - \beta x_S^* + \theta,$$

$$c_{13} = -\alpha x_S^*,$$

$$c_{21} = \beta x_I^*,$$

$$c_{23} = \delta x_S^*,$$

$$c_{31} = a_1 y^*,$$

$$c_{32} = a_2 y^*.$$

Persamaan karakteristik matriks $J(E_5)$ yaitu

$$-\lambda^3 + A_1 \lambda^2 + A_2 \lambda + A_3 = 0, \quad (4.12)$$

dimana

$$A_1 = r - \frac{2r x_S^* + r x_I^*}{k} - \beta x_I^* - \alpha y^*,$$

$$A_2 = -a_1 \alpha x_S^* y^* + a_2 \delta x_S^* y^* - \frac{r \beta x_S^* x_I^*}{K} - \beta^2 x_S^* x_I^* + \beta \theta x_I^*,$$

$$A_3 = \frac{2a_2 r \delta x_S^2 y^* - a_1 r \delta x_S^2 y^* - a_2 r \delta x_S^* x_I^* y^*}{K} - a_1 \beta \delta x_S^2 y^* - \\ a_1 \delta \theta x_S^* y^* - a_2 \alpha \beta x_S^* x_I^* y^* - a_2 r \delta x_S^* y^* + \\ a_2 \beta \delta x_S^* x_I^* y^* + a_2 \alpha \delta x_S^* y^{*2}.$$

Hasil analisis untuk titik kesetimbangan E_5 dengan Kriteria Routh-Hurwitz, diperoleh E_5 bersifat stabil asimtotik jika semua nilai eigen dari persamaan karakteristik (4.12) bernilai negatif dengan syarat $A_1 < 0, A_3 < 0$, dan $A_1 A_2 + A_3 < 0$.

Tabel 3. Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan

Titik Kesetimbangan	Kestabilan	Syarat
E_1	Tidak stabil tipe pelana	-
E_2	Stabil asimtotik	1) $K < \min \left\{ \frac{d_1 + \theta}{\beta}, \frac{d_2}{a_1} \right\}$ dan 2) $a_1 K - d_2 < 0$
E_3	Stabil asimtotik	1) $\zeta_1 > \zeta_2$ dan 2) $\zeta_3 < 0$ atau $\sqrt{\zeta_3} < d_2 r$
E_4	Stabil asimtotik	1) $\tau_1 < \tau_2$ dan 2) $\tau_3 > 0$ dengan $\tau_4 < 0$ atau $\sqrt{\tau_4} < \tau_3$
E_5	Stabil asimtotik	1) $A_1 < 0$, 2) $A_3 < 0$, dan 3) $A_1 A_2 + A_3 < 0$

SIMULASI NUMERIK

Simulasi numerik dilakukan untuk mengetahui kesesuaian antara hasil perhitungan analisis dengan hasil perhitungan secara numerik. Simulasi ini didapatkan dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat. Nilai parameter yang digunakan disajikan pada Tabel 4 berikut.

Tabel 4. Notasi dan nilai parameter

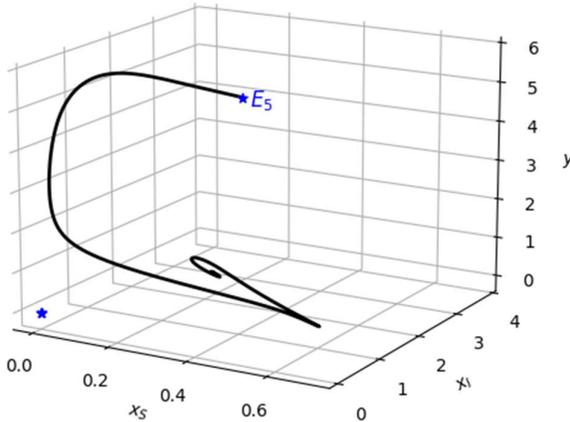
Parameter	Nilai	Keterangan
r	9.3	Asumsi
K	14.5	Maisaroh dkk, 2020
β	5.1	Asumsi
θ	1.1	Asumsi
α	3.03	Maisaroh dkk, 2020
δ	0.5	Asumsi
a_1	0.9	Asumsi
a_2	0.9	Asumsi
d_1	0.2	Maisaroh dkk, 2020
d_2	0.8	Asumsi

Simulasi numerik ditampilkan melalui potret fase dan grafik *time series* dengan *software* Python. Berdasarkan nilai parameter pada Tabel 4, didapatkan nilai titik kesetimbangan sebagai berikut:

1. Titik kesetimbangan $E_1 = (0,0,0)$,
2. Titik kesetimbangan $E_2 = (14.5, 0, 0)$,
3. Titik kesetimbangan $E_3 = (0.88, 0, 2.88)$,
4. Titik kesetimbangan $E_4 = (0.25, 6.4, 0)$,
5. Titik kesetimbangan $E_5 = (0.5, 0.38, 2.5)$.

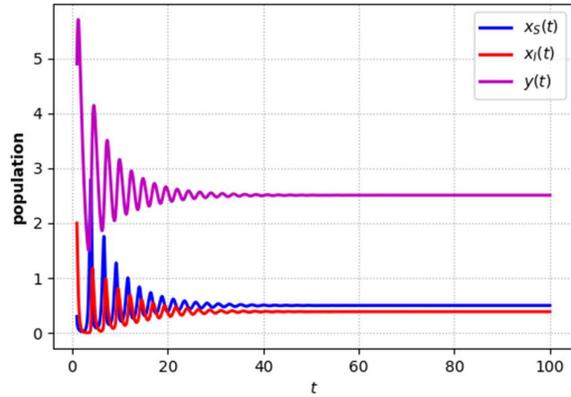
Secara lengkap hasil simulasi disajikan berdasarkan nilai parameter di Tabel 4 dengan nilai awal $x_s(0) = 0.3$; $x_l(0) = 2$; dan $y(0) = 4.9$. Hasil simulasi numerik juga menunjukkan variasi beberapa parameter yang mempengaruhi perubahan kestabilan titik kesetimbangan, yaitu parameter laju pemangsaan *prey* terinfeksi oleh *predator* saat $\delta = 1.13$ dan laju pemangsaan *prey* rentan oleh *predator* saat $\alpha = 1.34$.

Simulasi numerik berikut berdasarkan nilai parameter pada Tabel 4 saat $\delta = 0.5$ dan $\alpha = 3.03$.



Gambar 4. Potret fase menuju titik kesetimbangan E_5

Gambar 4 menunjukkan solusi sistem berupa potret fase menuju titik kesetimbangan yang stabil, yaitu E_5 yang menggambarkan kondisi dimana ketiga populasi eksis. Hasil simulasi menunjukkan kesesuaian dengan syarat analisis kestabilan pada Tabel 3. Selanjutnya, untuk grafik *time series* ditampilkan dalam gambar berikut dengan $0 \leq t \leq 100$.



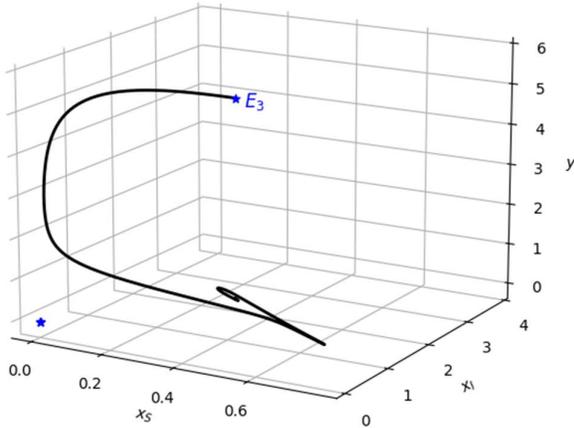
Gambar 5. Grafik *time series* titik kesetimbangan E_5

Grafik pada Gambar 5 menunjukkan bahwa pada saat $0 \leq t < 49$, perubahan populasi *prey* rentan mengalami naik turun hingga akhir pada $49 \leq t \leq \infty$ populasi *prey* rentan tetap bertahan. Perubahan populasi *prey* terinfeksi pada saat $0 \leq t < 45$ mengalami naik turun dan tetap bertahan pada saat $45 \leq t \leq \infty$. Sedangkan, untuk populasi *predator* mengalami naik turun pada saat $0 \leq t < 52$ dan tetap bertahan pada saat $52 \leq t \leq \infty$. Sehingga, pada kasus ini didapatkan hanya titik kesetimbangan E_5 yang stabil yaitu pada saat $t = 52$ di titik $(x_s, x_l, y) = (0.5, 0.38, 2.5)$.

Selanjutnya, dilakukan simulasi numerik dengan menunjukkan bahwa terjadi perubahan laju pemangsaan *predator* terhadap *prey* rentan maupun *prey* terinfeksi. Kedua parameter tersebut mempengaruhi kestabilan titik kesetimbangan. Simulasi ini dilakukan dengan 2 kasus sebagai berikut:

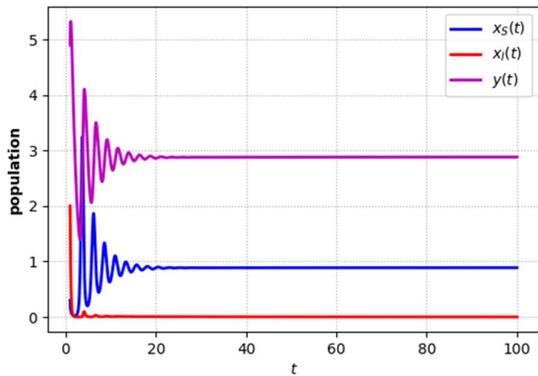
Kasus I: Ketika laju pemangsaan *prey* terinfeksi oleh *predator* meningkat yaitu saat $\delta = 1.13$.

Saat nilai parameter laju pemangsaan *prey* terinfeksi oleh *predator* meningkat yaitu saat $\delta = 1.13$ dan $\alpha = 3.03$. Diperoleh kestabilan pada titik kesetimbangan E_3 yaitu titik dimana terjadi kepunahan pada populasi *prey* terinfeksi serta populasi *prey* rentan dan *predator* yang tetap bertahan hidup. Pada kasus ini, kestabilan titik kesetimbangan hanya terjadi pada E_3 dan terjadinya perubahan kestabilan pada E_5 yang semula stabil menjadi tidak stabil.



Gambar 6. Potret fase di sekitar titik kesetimbangan E_3 saat $\delta = 1.13$

Grafik *time series* disajikan dalam gambar berikut dengan $0 \leq t \leq 100$.



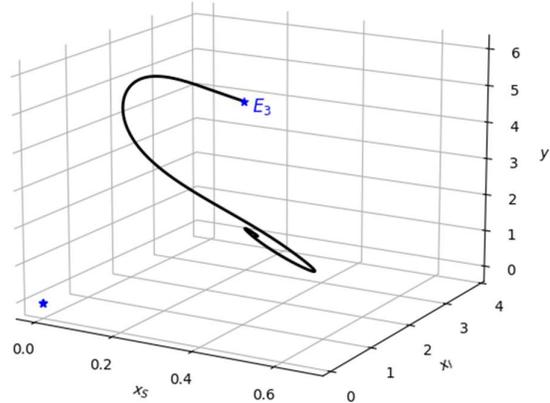
Gambar 7. Grafik *time series* di sekitar titik kesetimbangan E_3 saat $\delta = 1.13$

Grafik pada Gambar 7 menunjukkan bahwa pada saat $0 \leq t < 27$, perubahan populasi *prey* rentan mengalami naik turun dan pada saat $27 \leq t \leq \infty$ populasi *prey* rentan tetap bertahan. Pada populasi *prey* terinfeksi sempat mengalami naik turun pada saat $0 \leq t < 12$ kemudian pada saat $12 \leq t \leq \infty$ populasi *prey* terinfeksi mengalami kepunahan. Sedangkan, perubahan populasi *predator* pada saat $0 \leq t < 28$ mengalami naik turun dan tetap bertahan pada saat $28 \leq t \leq \infty$. Sehingga, pada kasus ini didapatkan hanya titik kesetimbangan E_3 yang stabil yaitu ketika $t = 28$ di titik $(x_S, x_I, y) = (0.88, 0, 2.88)$.

Kasus II: ketika laju pemangsaan *prey* rentan oleh *predator* menurun yaitu saat $\alpha = 1.34$.

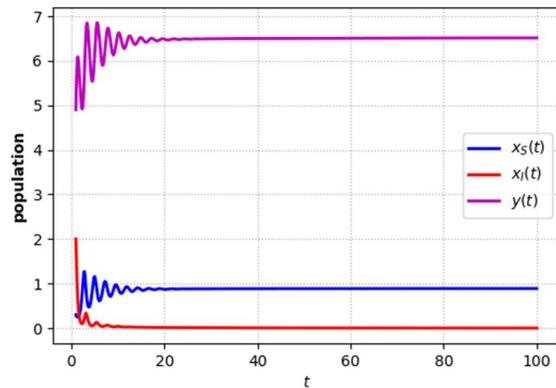
Diperoleh kestabilan menuju titik kesetimbangan E_3 yaitu titik dimana terjadi kepunahan pada populasi *prey* terinfeksi serta eksis pada populasi *prey* rentan dan *predator* saat laju pemangsaan *prey* rentan oleh *predator* menurun pada $\alpha = 1.34$ dan $\delta = 0.5$.

Pada kasus ini, titik kesetimbangan stabil hanya terjadi pada E_3 dan terjadi perubahan kestabilan pada E_5 yang semula stabil menjadi tidak stabil.



Gambar 8. Potret fase di sekitar titik kesetimbangan E_3 saat $\alpha = 1.34$

Grafik *time series* disajikan dalam gambar berikut dengan $0 \leq t \leq 100$.



Gambar 9. Grafik *time series* di sekitar titik kesetimbangan E_3 saat $\alpha = 1.34$

Grafik pada Gambar 9 menunjukkan bahwa pada saat $0 \leq t < 21$, perubahan populasi *prey* rentan mengalami naik turun dan pada saat $21 \leq t \leq \infty$ populasi *prey* rentan tetap bertahan. Pada populasi *prey* terinfeksi sempat mengalami naik turun pada saat $0 \leq t < 11$ kemudian pada saat $11 \leq t \leq \infty$ populasi *prey* terinfeksi mengalami kepunahan. Sedangkan, perubahan populasi *predator* pada saat $0 \leq t < 24$ mengalami naik turun dan tetap bertahan pada saat $24 \leq t \leq \infty$. Sehingga, pada kasus ini didapatkan hanya titik kesetimbangan E_3 yang stabil yaitu ketika $t = 24$ di titik $(x_S, x_I, y) = (0.88, 0, 6.51)$.

Ketiga grafik *time series* pada Gambar 5, Gambar 7, dan Gambar 9 menunjukkan terjadinya gerakan fluktuatif. Dalam hal ini, gerakan fluktuatif menggambarkan naik turunnya ketiga populasi. Hal

tersebut terjadi ketika *prey* meningkat, maka semakin banyak *prey* yang dimangsa oleh *predator*. Sehingga *prey* semakin menurun dan *predator* semakin meningkat. Ketika *predator* semakin meningkat, maka semakin banyak juga *prey* yang dibutuhkan untuk dimangsa *predator*. Kondisi tersebut menyebabkan terjadinya penurunan populasi *prey* seiring meningkatnya *predator*. Namun dengan menurunnya *prey*, maka dapat terjadi kematian pada populasi *predator* karena berkurangnya kesediaan makanan. Populasi *prey* kembali meningkat ketika *predator* mulai menurun. Pada saat populasi *prey* mengalami peningkatan kembali, diikuti peningkatan populasi *predator* karena banyak *prey* yang dapat dimangsa. Sehingga *prey* semakin menurun dan *predator* semakin meningkat. Hal tersebut terjadi berulang hingga populasi *prey* maupun populasi *predator* mengalami kondisi stabil untuk waktu lama setelah mencapai t tertentu.

PENUTUP

SIMPULAN

Hasil analisis pada rekonstruksi model yang telah dibahas menunjukkan bahwa terdapat lima titik kesetimbangan yaitu titik kepunahan ketiga populasi $E_1 = (0,0,0)$, titik kepunahan *prey* terinfeksi dan *predator* $E_2 = (k, 0, 0)$, titik kepunahan *prey* terinfeksi $E_3 = \left(\frac{d_2}{a_1}, 0, \frac{r(a_1k-d_2)}{a_1\alpha k}\right)$, titik kepunahan *predator* $E_4 = \left(\frac{d_1+\theta}{\beta}, \frac{r(\beta a_1k+\beta k\theta-d_1^2-2d_1\theta-\theta^2)}{\beta(\beta a_1k+d_1r+\theta)}\right)$, serta titik eksistensi ketiga populasi $E_5 = (x_S^*, x_I^*, y^*)$. Titik kepunahan ketiga populasi merupakan jenis titik kesetimbangan tipe pelana, yang menunjukkan bahwa pada titik ini tidak akan mungkin tercapai atau tidak terdefinisi secara biologis. Sedangkan, ke-empat titik kesetimbangan lainnya akan stabil jika memenuhi syarat yang telah ditentukan dalam perhitungan analisis. Hasil simulasi numerik ditampilkan dalam potret fase dan grafik *time series* yang menunjukkan kestabilan pada titik kesetimbangan E_5 . Serta perubahan laju pemangsaan *predator* terhadap *prey* rentan maupun *prey* terinfeksi mempengaruhi kestabilan dari titik kesetimbangan E_5 yang semula stabil menjadi tidak stabil dan titik kesetimbangan E_3 yang semula tidak stabil menjadi stabil.

SARAN

Untuk pengembangan penelitian selanjutnya, diharapkan untuk mempertimbangkan asumsi yang akan dikembangkan seperti menggunakan fungsi respon yang berbeda. Selain itu, dapat juga dengan melakukan analisis bifurkasi sehingga dapat menampilkan diagram bifurkasi yang menunjukkan perubahan kestabilan titik kesetimbangan.

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, Howard. (1987). *Aljabar Linear Elementer Edisi kelima*. Jakarta: Erlangga.
- Boyce, William E. & Diprima, Richard C. (2012). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems 10th Edition*. USA: John Willey & Sons, Inc.
- Ghanbari, B. & Djilali, S. (2020). Mathematical Analysis of A Fractional-Order Predator-Prey Model with Prey Social Behavior and Infection Developed in Predator Population. *Chaos, Solitons & Fractals*, 138, 109960. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.109960>
- Hale, J. K. & Kocak, H. (1991). *Dynamics and Bifurcations*. New York: Springer-Verlag.
- Hethcote, H. W. (1989). Three Basic Epidemiological Models. *Applied Mathematical Ecology*, 18, 119-144.
- Holling, C. S. (1965). The Functional Response of Predators to Prey Density and its Role in Mimicry and Population Regulation. *The Memoirs of the Entomological Society of Canada*, 97(S45), 5-60. <https://doi.org/10.4039/entm9745fv>
- Holmes, J. C. (1972). Modification of Intermediate Host Behavior by Parasites. *Behavioural Aspects of Parasite Transmission*.
- Kreyszig, E. (2011). *Advanced Engineering Mathematics 10th Edition*. John Wiley and Son, Inc.
- Maisaroh, S., Resmawan, & Rahmi, E. (2020). Analisis Kestabilan Model *Predator-Prey* dengan Infeksi Penyakit pada *Prey* dan Pemanenan Proporsional pada *Predator*. *Jambura J. Biomath*, 1(1), 8-15. <https://doi.org/10.34312/jjbm.v1i1.5948>

- May, Robert M. & Leonard, Warren J. (1975). Nonlinear Aspects of Competition Between Three Species. *SIAM J Appl Math*, 29(2), 243-253.
- Mu'tamar, K. & Zulkarnain (2017). Model *Predator-Prey* dengan Adanya Infeksi dan Pengobatan pada Populasi Mangsa. *Jurnal Sains, Teknologi dan Industri*, 15(1), 1-6.
- Olsder, G. J. & J.W. van der Woude. (2004). *Mathematical Systems Theory* intermediatethird edition. Netherlands: VSSD.
- Perko, Lawrence. (2001). *Differential Equations and Dynamical Systems* 3rd Edition. New York: Springer-Verlag.
- Purnomo, A. S., Darti, I., & Suryanto, A. (2017). Dynamics of Eco-Epidemiological Model with Harvesting. *AIP Conference Proceedings*, 1913(1), 020018. <https://doi.org/10.1063/1.5016652>
- Sunarsih & Hidayati, Firsty N. (2010). Model Pertumbuhan Logistik *Predator* dan *Prey* pada Populasi *Prey* dan Solusi Kesetimbangan. *Jurnal Sains & Matematika*, 18(1), 7-12.
- Tu, Pierre N. V. (1994). *Dynamical System an Intriduction with Application in Economics and Biology*. Berlin: Springer-Verlag.
- Wiggins, Stephen. 2003. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos* 2nd Edition. New York: Springer-Verlag.
- Wuhaib, S. A. & Hasan, Y. A. (2013). A Predator-Infected Prey Model with Harvesting of Infected Prey. *ScienceAsia*, 39S, 37-41. <https://doi.org/10.2306/scienceasia1513-1874.2013.39S.037>