MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115
Volume 10 No 01
Tahun 2022

KARAKTERISASI BCK-ALJABAR IMPLIKATIF BERDASARKAN $\mathcal{N}$-*IDEAL IMPLIKATIF NEUTROSOFIK*

Devy Gita Kirana
Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia
email: devy.18039@mhs.unesa.ac.id

Agung Lukito
Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia
Penulis Korespondensi: agunglukito@unesa.ac.id

Abstrak

Pada artikel ini diperkenalkan konsep $\mathcal{N}$-ideal implikatif neutrosofik dalam BCK-aljabar, dan diselidiki beberapa sifatnya. Hasil utamanya adalah karakterisasi BCK-aljabar implikatif dengan menggunakan $\mathcal{N}$-ideal implikatif neutrosofik.

Kata Kunci: BCK-aljabar implikatif, $\mathcal{N}$-ideal implikatif neutrosofik.

Abstract

This article introduced the idea of neutrosophic implicative $\mathcal{N}$-ideal in BCK-algebra, and numerous features are investigated. The main result was a characterization of the implicative BCK-algebra using a neutrosophic implicative $\mathcal{N}$-ideal as a starting point.

Keywords: *implicative BCK-algebra, neutrosophic implicative $\mathcal{N}$-ideal.*

PENDAHULUAN

K. Iséki (1966) mengungkapkan bahwa dalam matematika BCK/BCI-aljabar merupakan struktur aljabar dalam logika matematika yang melibatkan implikasi. BCK-aljabar merupakan BCI-aljabar. BCK-aljabar memiliki banyak aplikasi di berbagai cabang matematika, seperti teori grup, teori probabilitas, topologi dan analisis fungsional.

Jun dkk. (2009) memperkenalkan $\mathcal{N}$-struktur ke komunitas aljabar logika. Himpunan neutrosofik yang diperkenalkan oleh Smarandache (1999, 2005) adalah generalisasi dari himpunan intuisionistik, himpunan klasik, himpunan fuzzy, himpunan parakonsisten, himpunan dialeteist, himpunan paradoks, himpunan tautologi berdasarkan neutrosofik. Jun dkk. (2017) memperkenalkan gagasan tentang $\mathcal{N}$-struktur neutrosofik ke komunitas dengan mengombinasikan struktur neutrosofik dan $\mathcal{N}$-struktur . Jun dkk. (2017) dan Song dkk. (2017) menerapkan $\mathcal{N}$-struktur neutrosofik pada BCK/BCI-aljabar.

Untuk mengembangkan pengetahuan tentang BCK/BCI-aljabar, serta menyelidiki hubungannya dengan $\mathcal{N}$-ideal implikatif neutrosofik, maka pada artikel ini akan didiskusikan $\mathcal{N}$-ideal implikatif neutrosofik yang diaplikasikan pada BCK-aljabar. Kemudian, dijabarkan konsep $\mathcal{N}$-struktur neutrosofik dan $\mathcal{N}$-ideal implikatif neutrosofik di BCK-aljabar, dan menyelidiki sifat-sifatnya. Yang selanjutnya dikarakterisasi $\mathcal{N}$-struktur neutrostofik dan $\mathcal{N}$-ideal implikatif neutrosofik dan didiskusikan hubungan antara $\mathcal{N}$-struktur neutrosofik dan $\mathcal{N}$-ideal implikatif neutrosofik. Sehingga dapat diunjukkan bahwa jika dua $\mathcal{N}$-ideal neutrosofik X_N dan X_M memiliki hubungan X_N $(=, \leq, =)$ X_M, dan jika X_N merupakan $\mathcal{N}$-ideal implikatif neutrosofik dari X, maka begitu juga X_M.

KAJIAN PUSTAKA

Definisi 2.1. BCK/BCI-aljabar adalah struktur aljabar yang terdiri atas himpunan tak-kosong X dengan operasi biner $*$ dan memiliki anggota istimewa 0. Suatu struktur dapat disebut BCI-aljabar jika memenuhi empat aksioma berikut:

(I) $\big((p * q) * (p * r)\big) * (r * q) = 0,$

(II) $\big(p * (p * q)\big) * q = 0,$

(III) $p * p = 0,$

(IV) $p * q = p * q = 0 \Longrightarrow p = q$

untuk semua p, q, r anggota X. Jika BCI-aljabar X memenuhi

(V) $0 * p = 0$

Maka untuk semua p anggota X, maka X disebut BCK-aljabar.

Proposisi 2.2. BCK/BCI-aljabar X memenuhi $p * 0 = p$ untuk semua p anggota X.

Bukti. Dengan substitusi $q = 0$ pada aksioma (II) diperoleh

$$\big(p * (p * 0)\big) * 0 = 0. \qquad (2.1)$$

Dengan substitusi $q = p * 0$ dan $r = p$ pada aksioma (I) diperoleh

$$\Big(\big(p * (p * 0\,)\big) * (p * p)\Big) * \big(p * (p * 0\,)\big) = 0.$$

Dari aksioma (III), identitas ini menjadi

$$\Big(\big(p * (p * 0\,)\big) * 0\Big) * \big(p * (p * 0\,)\big) = 0. \qquad (2.2)$$

Substitusikan (2.1) ke (2.2) untuk memeroleh

$$0 * \big(p * (p * 0\,)\big) = 0. \qquad (2.3)$$

Dari (2.1) dan (2.3), dengan aksioma (IV), diperoleh

$$p * (p * 0\,) = 0. \qquad (2.4)$$

Dengan substitusi $q = p$ pada aksioma (II) diperoleh

$$\big(p * (p * p)\big) * p = 0.$$

Dari aksioma (III), identitas berikut berlaku

$$(p * 0) * p = 0 \qquad (2.5)$$

Dari (2.4) dan (2.5), dengan aksioma (IV), diperoleh $p * 0 = p$. □

Definisi 2.3. Pengurutan parsial $\leq$ pada BCK/BCI-aljabar X didefinisikan untuk setiap p, q anggota X, $p \leq q$ jika dan hanya jika $p * q = 0$.

Proposisi 2.4. Pengurutan parsial $\leq$ pada BCK/BCI-aljabar X bersifat:

(i) Refleksif ($p \leq p$),

(ii) Anti-simetris (jika $p \leq q$ dan $q \leq p$, maka $p = q$), dan

(iii) Transitif (jika $p \leq q$ dan $q \leq r$, maka $p \leq r$).

Bukti. (i) Dengan aksioma (III) dan definisi $\leq$ diketahui $p * p = 0$, sehingga diperoleh

$$p \leq p,$$

sehingga terbukti bahwa pengurutan $\leq$ bersifat refleksif.

(ii) Misalkan $p \leq q$ dan $q \leq p$. Berdasarkan definisi, diperoleh $p * q = 0$, $q * p = 0$ sehingga berdasarkan aksioma (IV) diperoleh $p = q$. Jadi terbukti bahwa pengurutan $\leq$ bersifat anti-simetris.

(iii) Misalkan $p \leq q$ dan $q \leq r$. Berdasarkan definisi $\leq$, diperoleh

$$p * q = 0 \text{ dan } q * r = 0.$$

Dengan substitusi $q = r$ dan $r = q$ pada aksioma (I) diperoleh

$$\big((p * r) * (p * q)\big) * (q * r) = 0,$$

sehingga

$$\big((p * r) * 0\big) * 0 = 0.$$

Dengan Proposisi 2.2, diperoleh

$$(p * r) * 0 = 0,$$

dan lagi

$$p * r = 0.$$

Berdasarkan definisi $\leq$, diperoleh $p \leq r$. Jadi terbukti bahwa pengurutan $\leq$ bersifat transitif. □

Proposisi 2.5. BCK/BCI-aljabar X memenuhi:

(i) Untuk setiap p, q, r anggota X. Jika $p \leq q$, maka $r * q \leq r * p$,

(ii) Untuk setiap p, q, r anggota X, berlaku $(p * q) * r = (p * r) * q$,

(iii) Untuk setiap p, q, r anggota X. Jika $p \leq q$, maka $p * r \leq q * r$,

(iv) Untuk setiap p, q, r anggota X, berlaku $(p * r) * (q * r) \leq p * q$,

(v) Untuk setiap p, q, r anggota X, berlaku $(p * q) * (p * r) \leq r * q$,

(vi) Untuk setiap p, q anggota X, berlalu $p * \big(p * (p * q)\big) = p * q$.

Bukti. (i) Dengan substitusi $r = p$ dan $p = r$ pada aksioma (I), didapat

$$\big((r * q) * (r * p)\big) * (p * q) = 0$$

dan karena $p \leq q$, diperoleh

$$\big((r * q) * (r * p)\big) * 0 = 0.$$

Berdasarkan Proposisi 2.2, didapat

$$(r * q) * (r * p) = 0$$

sehingga menurut definisi $\leq$ dapat disimpulkan $r * q \leq r * p$.

(ii) Dengan substitusi $q = r$ pada aksioma (II) didapat

$$\big(p * (p * r)\big) * r = 0$$

atau dengan definisi pengurutan $\leq$, $p * (p * r) \leq r$. Kemudian, dengan bagian (i) diperoleh

$$(p * q) * r \leq (p * q) * \big(p * (p * r)\big)$$

Dengan substitusi $r = p * r$ pada aksioma (I) didapat

$$\Big((p * q) * \big(p * (p * r\,)\big)\Big) * \big((p * r\,) * q\big) = 0$$

atau

$$(p * q) * \big(p * (p * r\,)\big) \leq (p * r\,) * q.$$

Karena pengurutan $\leq$ transitif, dari dua hasil terakhir ini dapat disimpulkan bahwa

$$(p * q) * r \leq (p * r) * q.$$

Dengan substitusi $q = r$ dan $r = q$ pada hasil ini diperoleh

$$(p * r) * q \leq (p * q) * r,$$

sehingga dengan aksioma (IV) diperoleh $(p * q) * r = (p * r) * q$.

(iii) Dengan substitusi $q = r$ dan $r = q$ pada aksioma (I) didapat

$$\big((p * r) * (p * q)\big) * (q * r) = 0$$

dan karena $p \leq q$, diperoleh

$$\big((p * r) * 0\big) * (q * r) = 0.$$

Berdasarkan Proposisi 2.2, didapat

$$(p * r) * (q * r) = 0$$

sehingga menurut definisi $\leq$ disimpulkan $p * r \leq q * r$.

(iv) Dengan substitusi $r = q$ dan $q = r$ pada aksioma (I) didapat

$$\big((p * r) * (p * q)\big) * (q * r) = 0$$

dan dengan bagian (ii) setara dengan

$$\big((p * r) * (q * r)\big) * (p * q) = 0.$$

Dengan menggunakan definisi $\leq$, diperoleh $(p * r) * (q * r) \leq p * q$.

(v) Dengan definisi $\leq$ pada aksioma (I), sehingga diperoleh $(p * q) * (p * r) \leq (r * q)$.

(vi) Misalkan $r = p * (p * q)$ pada (v), maka diperoleh

$$(p * q) * \Big(p * \big(p * (p * q)\big)\Big) \leq \Big(\big(p * (p * q)\big) * q\Big).$$

Karena berlaku aksioma (II), sehingga didapat

$$(p * q) * \Big(p * \big(p * (p * q)\big)\Big) \leq 0.$$

Berdasarkan Definisi 2.3 dan Proposisi 2.2, didapat

$$(p * q) * \Big(p * \big(p * (p * q)\big)\Big) = 0$$

Dengan Proposisi 2.2, didapat

$$p * q = p * \big(p * (p * q)\big)$$

Oleh karena itu, terbukti $p * \big(p * (p * q)\big) = p * q$ benar. □

Observasi 2.6. Dengan substitusi $p = p * q$ pada aksioma (V), diperoleh

$$0 * (p * q) = 0,$$

kemudian dengan aksioma (III) didapat

$$(p * p) * (p * q) = 0.$$

Dengan proposisi 2.5 (ii), didapat

$$\big(p * (p * q)\big) * p = 0,$$

sehingga dengan aplikasi definisi $\leq$, diperoleh

$$p * (p * q) \leq p.$$

Definisi 2.7. BCK-aljabar X dikatakan *implikatif* jika untuk setiap p, q anggota X, berlaku

$$(p * (p * q) = p). \tag{2.6}$$

Definisi 2.8. Subhimpunan I dari BCK/BCI-aljabar X disebut *ideal* pada X jika memenuhi

$$0 \in I \tag{2.7}$$

dan untuk semua p, q anggota X,

$$\text{jika } p * q \in I \text{ dan } q \in I, \text{ maka } p \in I \tag{2.8}$$

Lemma 2.9. Semua ideal I dari BCK-aljabar X memenuhi kondisi untuk setiap p, q anggota X, jika q ideal dan $p \leq q$, maka p juga merupakan ideal.

Bukti. Menurut definisi $\leq$, $p \leq q$ setara dengan $p * q = 0$, dan karena $0 \in I$, $p * q \in I$. Lagi, karena q ideal, berdasarkan syarat ideal (2.8), diperoleh bahwa p merupakan ideal. □

Definisi 2.10. Subhimpunan I dari BCK/BCI-aljabar X disebut *ideal implikatif positif* pada X jika memenuhi (2.7) dan untuk semua p, q, r anggota X,

$$\big((p * q) * r \in I, q * r \in I \Rightarrow p * r \in I\big). \tag{2.9}$$

Proposisi 2.11 (Meng dan Jun, 1994)**.** Sebarang ideal implikatif positif merupakan ideal, namun tidak berlaku sebaliknya.

Bukti. ($\Rightarrow$) Dengan substitusi $r = 0$ pada (2.9), didapat

$$(p * q) * 0 \in I,\ q * 0 \in I \Rightarrow p * 0 \in I.$$

Berdasarkan (2.7) dan (2.8) maka terbukti bahwa sebarang ideal implikatif positif merupakan ideal.

($\Leftarrow$) Dengan bantuan contoh, perhatikan $X = \{0,1,2,3,4\}$ dengan tabel Cayley pada Tabel 1.

Tabel 1. Tabel Cayley untuk operasi biner "$*$".

*	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1
2	2	2	0	2	0
3	3	1	3	0	3
4	4	4	4	4	0

Kemudian $(X;*,0)$ merupakan BCK-aljabar. $\{0,1,3\}$ dan $\{0,1,2,3\}$ merupakan ideal implikatif positif X. Sehingga $\{0\}, \{0,2\}$ dan $\{0,2,4\}$ merupakan ideal X, tetapi bukan implikatif positif.

Dari contoh diketahui bahwa $\{0,2\}$ ideal, akan tetapi bukan implikatif positif seperti $(3 * 2) * 0 \in \{0,2\}$, $2 * 0 = 2 \in \{0,2\}$ dan $3 * 0 = 3 \in \{0,2\}$. Hal ini menunjukkan bahwa ideal belum tentu merupakan implikatif positif. □

Lemma 2.12. I merupakan subhimpunan dari BCK/BCI-aljabar X yang tak-kosong, pernyataan berikut ekivalen:

(i) I merupakan ideal implikatif positif,

(ii) I merupakan ideal, dan untuk sebarang p, q anggota X. Jika $(p * q) * q \in I$, maka $p * q \in I$,

(iii) I merupakan ideal, dan untuk sebarang p, q, r anggota X. Jika $(p * q) * r \in I$, maka $(p * r) * (q * r) \in I$,

(iv) Jika $0 \in I$ dan $\big((p * q) * q\big) * r \in I$, maka $p * q \in I$.

Bukti. $\big($(i) $\Rightarrow$ (ii)$\big)$ Misalkan I ideal implikatif positif. Berdasarkan Proposisi 2.11, I merupakan ideal. Misalkan $(p * q) * q \in I$. Dengan substitusi $r = q$ pada (2.9), karena $q * q = 0 \in I$, diperoleh $p * q \in I$.

$\big($(ii) $\Rightarrow$ (iii)$\big)$ Asumsikan (ii) dan (2.9) berlaku. Maka dengan $r \in I$ dan Proposisi 2.5 (iv), didapat

$$\big((p * r) * (q * r)\big) * r \leq (p * q) * r \in I,$$

berdasarkan Proposisi 2.5 (ii), didapat

$$\Big(\big(p * (q * r)\big) * r\Big) * r \in I.$$

Dengan (ii) didapat

$$\big(p * (q * r)\big) * r \in I, \tag{2.11}$$

sehingga dengan Proposisi 2.5 (ii) pada (2.11), didapat $(p * r) * (q * r) \in I$.

$\big($(iii) $\Rightarrow$ (iv)$\big)$ Diketahui bahwa $0 \in I$. Jika $\big((p * q) * q\big) * r \in I$ dan $r \in I$, maka $\big((p * r) * q\big) * q \in I$. Dengan (iii) didapat

$$\big((p * r) * q\big) * (q * q) \in I,$$

dari aksioma (III), identitas berikut berlaku

$$(p * q) * r \in I.$$

Karena I ideal dan $r \in I$, maka $p * q \in I$.

$\big($(iv) $\Rightarrow$ (i)$\big)$ Jika I memenuhi (iv), maka I merupakan ideal dari X. Dengan $p * q \in I$ dan $y \in I$, didapat

$$\big((p * 0) * 0\big) * q \in I \text{ dan } q \in I.$$

Berdasarkan (iv) didapat $p = p * 0 \in I$. Misalkan I merupakan ideal, $(p * q) * r \in I$ dan $q * r \in I$. Dengan Proposisi 2.5 (ii), diperoleh

$$\big(p * r\big) * q \in I. \tag{2.12}$$

Dengan menggunakan Proposisi 2.5 (iv) pada (2.12), didapat

$$\big((p * r) * r\big) * (q * r) \leq (p * r) * q \in I,$$

dan diperoleh $\big((p * r) * r\big) * (q * r) \in I$. Dengan (iv) didapat $p * r \in I$. Hal ini membuktikan bahwa I merupakan ideal implikatif positif. □

Lemma 2.13. Misalkan A dan B ideal dari BCK-aljabar X sehingga $A \subseteq B$. Jika A implikatif positif, maka begitu juga B.

Bukti. Misalkan $(p * q) * r \in B$ dan $u = (p * q) * r$. Dengan aksioma (III) diketahui bahwa:

$$\big((p * q) * r\big) * u = 0 \in A.$$

Dengan Proposisi 2.5 (ii) didapat

$$\big((p * u) * q\big) * r = 0 \in A. \tag{2.10}$$

Dengan Definisi 2.10 dan Lemma 2.12 (iii) didapat

$$\big((p * u) * r\big) * (q * r) \in A,$$

dan lagi dengan Proposisi 2.5 (ii),

$$\big((p * r) * u\big) * (q * r) \in A,$$

dan juga

$$\big((p * r) * (q * r)\big) * u \in A,$$

dengan substitusi $u = (p * q) * r$, diperoleh

$$\big((p * r) * (q * r)\big) * \big((p * q) * r\big) \in A.$$

Karena$A \subset B$, diperoleh

$$\big((p * r) * (q * r)\big) * \big((p * q) * r\big) \in B.$$

Karena$(p * q) * r \in B$ dan B ideal, diperoleh

$$(p * r) * (q * r) \in B.$$

Berdasarkan Lemma 2.12 (iii), B merupakan implikatif positif. □

Definisi 2.14. Subhimpunan I dari BCK-aljabar X disebut *ideal implikatif* pada X jika memenuhi (2.7) dan untuk setiap p, q, r anggota X, memenuhi

$$\Big(\big(p * (q * p)\big) * r \in I, r \in I \Rightarrow p \in I\Big). \tag{2.13}$$

Lemma 2.15 (Meng dan Jun, 1994)**.** Subhimpunan I dari BCK-aljabar X adalah ideal implikatif pada X jika dan hanya jika I adalah ideal dari X yang untuk setiap p, q anggota X, memenuhi syarat berikut:

$$\big(p * \big(q * p\big) \in I \Rightarrow p \in I\big). \tag{2.14}$$

Bukti. ($\Rightarrow$) Misalkan I ideal implikatif dan $r \in I$. Substitusi $q = p$ pada (2.13), sehingga didapat

$$\big(p * (p * p)\big) * r = p * z.$$

Berdasarkan (2.13) diperoleh $p \in I$. sehingga I merupakan ideal.

($\Leftarrow$) Diberikan I ideal dan memenuhi (2.14). Misalkan $\big(p * (q * p)\big) * r \in I$ dan $r \in I$. Dengan (2.8) didapat

$$p * (q * p) \in I.$$

Maka dengan (2.14) diperoleh $p \in I$. □

Lemma 2.16. Setiap ideal implikatif merupakan implikatif positif, namun ideal implikatif positif tidak harus implikatif.

Bukti. (⇒) Misalkan I ideal implikatif, $(p*q)*r \in I$, dan $q*r \in I$. Proposisi 2.5 (ii) dan (iv) mengakibatkan

$$\big((p*r)*r\big)*(q*r) \le (p*r)*q = (p*q)*r \in I.$$

Berdasarkan Lemma 2.8, diperoleh

$$\big((p*r)*r\big)*(q*r) \in I.$$

Karena $q*r \in I$ dan I ideal, maka didapat

$$(p*r)*r \in I.$$

Berdasarkan Proposisi 2.5(vi),

$$p*r = \Big(p*\big(p*(p*r)\big)\Big),$$

sehingga diperoleh

$$\Big(p*\big(p*(p*r)\big)\Big)*r \in I$$

dan dengan Proposisi 2.5 (ii), didapat

$$(p*r)\ *\big(p*(p*r)\big) \in I,$$

sehingga $\Big((p*r)\ *\big(p*(p*r)\big)\Big)*0 \in I$. Karena I implikatif dan $0 \in I$, maka didapat $p*r \in I$. Hal ini menunjukkan bahwa I merupakan ideal implikatif positif.

(⇐) Dengan bantuan contoh, perhatikan $X = \{0,1,2,3,4\}$ dengan tabel Cayley pada Tabel 2.

Tabel 2. Tabel Cayley untuk operasi biner "$*$".

$*$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	0	1	0	1
1	1	0	1	0	1
2	2	2	0	2	0
3	3	1	3	0	3
4	4	4	4	4	0

Maka $(X;*,0)$ merupakan BCK-aljabar. Dari tabel dapat diketahui bahwa $\{0,1,3\}$ merupakan ideal, tetapi tidak implikatif. ☐

Lemma 2.17. Misalkan I ideal implikatif positif dari X. Maka I implikatif jika dan hanya jika untuk setiap p, q anggota X, berlaku

$$(q*(q*r) \in I \Rightarrow p*(p*q) \in I). \qquad (2.16)$$

Bukti. (⇒) Misalkan I ideal implikatif positif, dan $q*(q*p) \in I$. Berdasarkan Observasi 2.6, $p*(p*q) \le p$, sehingga dengan Proposisi 2.5 (i) didapat

$$q*p \le q*\big(p*(p*q)\big),$$

dan juga

$$\big(p*(p*q)\big)*\Big(q*\big(p*(p*q)\big)\Big) \le \big(p*(p*q)\big)*(q*p).$$

Berdasarkan Proposisi 2.5 (ii),

$$\big(p*(p*q)\big)*(q*p) = \big(p*(q*p)\big)*(p*q).$$

Dengan Proposisi 2.5 (v),

$$\big(p*(q*p)\big)*(p*q) \le q*(q*p).$$

Dengan sifat transitif $\le$, kombinasi ketiga hasil terakhir ini mengakibatkan

$$\big(p*(p*q)\big)*\Big(q*\big(p*(p*q)\big)\Big) \le q*(q*p).$$

Berdasarkan Observasi 2.6 dan karena $q*(q*p) \in I$ ideal, diperoleh

$$\big(p*(p*q)\big)*\Big(q*\big(p*(p*q)\big)\Big) \in I.$$

Dengan Proposisi 2.2,

$$\big(p*(p*q)\big)*\Big(q*\big(p*(p*q)\big)\Big)*0 \in I.$$

Dari Definisi 2.14 dan $0 \in I$ didapat $p*(p*q) \in I$.

(⇐) Misalkan I memenuhi (2.16) dan misalkan $\big(p*(q*p)\big)*r \in I$ dan $r \in I$. Sekarang akan dibuktikan bahwa $p \in I$. Karena I ideal, $p*(q*p) \in I$. Substitusi $p = q$ dan $q = p$ pada aksioma (II), diperoleh

$$\big(q*(q*p)\big)*p = 0.$$

Berdasarkan definisi $\le$ diperoleh $\big(q*(q*p)\big) \le p$, kemudian dengan Proposisi 2.5 (iii),

$$\big(q*(q*p)\big)*(q*p) \le p*(q*p) \in I,$$

sehingga berdasarkan Lemma 2.9 $\big(q*(q*p)\big)*(q*p) \in I$. Dari Lemma 2.12 (ii), didapat $q*(q*p) \in I$. Dengan (2.16) didapat

$$p*(p*q) \in I. \qquad (2.17)$$

Dengan substitusi $p = q$, $q = 0$, dan $r = p$ pada Proposisi 2.5 (iv), diperoleh

$$(q*p)*(0*p) \le q*0,$$

karena berlaku aksioma (V), maka

$$(q*p)*0 \le q*0$$

dan berdasarkan Proposisi 2.2, diperoleh

$$q*p \le q.$$

Dengan Proposisi 2.5 (i)

$$p*q \le p*(q*p) \in I,$$

Kemudian, dengan Proposisi 2.5 (iii) didapat

$$(p*q)*r \le \big(p*(q*p)\big)*r \in I.$$

Maka berdasarkan Lemma 2.9 $(p*q)*r \in I$. Berdasarkan (2.8) karena $r \in I$, maka $p*q \in I$. Kemudian pada (2.17) berdasarkan (2.8) didapat $p \in I$, maka terbukti I merupakan ideal implikatif ☐

Lemma 2.18. Pada X BCK-aljabar, pernyataan berikut ekivalen:

(i) X merupakan BCK-aljabar implikatif positif,
(ii) $\{0\}$ merupakan ideal implikatif positif dari X,
(iii) Semua ideal X merupakan implikatif positif,
(iv) Untuk sebarang $a \in X$, $A(a) = \{p \in X : p \le a\}$ merupakan ideal.

Bukti. $\big((\text{i}) \Rightarrow (\text{ii})\big)$ Jelas $\{0\}$ ideal, kemudian asumsikan bahwa X merupakan BCK-aljabar implikatif positif, maka didapat $(p * q) * q = p * q$. Oleh karena itu, jika $(p * q) * q \in \{0\}$ berarti $p * q \in \{0\}$. Dengan Lemma 2.12 (ii), diketahui bahwa $\{0\}$ ideal implikatif positif.

$\big((\text{ii}) \Rightarrow (\text{iii})\big)$ Dengan Lemma 2.13 didapat bahwa untuk {0} ideal implikatif positif, maka semua ideal X merupakan implikatif positif.

$\big((\text{iii}) \Rightarrow (\text{iv})\big)$ Untuk $a \in X$ dan $p * q$, dengan $q \in A(a)$, maka diperoleh $p * q \leq a$ dan $q \leq a$. Oleh karena itu $(p * q) * a = 0 \in \{0\}$ dan $q * a = 0 \in \{0\}$. Dengan (iii), didapat bahwa $\{0\}$ merupakan ideal implikatif positif dan $p * a = 0$. Oleh karena itu, $p \in A(a)$. Sehingga, untuk sebarang X, $A(a) = \{p \in X : p \leq a\}$ merupakan ideal.

$\big((\text{iv}) \Rightarrow (\text{i})\big)$ Misalkan ntuk sebarang $a \in X$, $A(a) = \{p \in X : p \leq a\}$ ideal dan $(p * q) * q = 0$, maka $p * q \in A(q)$. Karena $A(q)$ merupakan ideal dan $q \in A(q)$, sehingga didapat $p \in A(q)$, $p * q = 0$. Oleh karena itu terbukti bahwa untuk X BCK-aljabar, $(p * q) * q = 0$ berarti $p * q = 0$. Berdasarkan Lemma 2.16, maka X merupakan BCK-aljabar implikatif positif. □

Lemma 2.19 (Meng dan Jun, 1994)**.** Misalkan A dan B ideal dari BCK-aljabar X dan $A \subseteq B$. Jika A merupakan ideal implikatif X, maka begitu juga B.

Bukti. Berdasarkan Lemma 2.16, didapat bahwa A merupakan ideal implikatif positif. Dengan Lemma 2.13, didapat bahwa B merupakan ideal implikatif positif. Untuk membuktikan bahwa B implikatif, maka B harus memenuhi (2.16). Misalkan $p * (p * q) \in B$ dan tetapkan $u = p * (p * q)$. Berdasarkan aksioma (III),

$$\big(p * (p * q)\big) * u = 0 \in A,$$

dan karena A implikatif positif, dengan Lemma 2.12 (iii) didapat

$$(p * u) * \big((p * q) * u\big) \in A.$$

Dengan Proposisi 2.5 (ii) diperoleh

$$(p * u) * \big((p * u) * q\big) \in A.$$

Berdasarkan implikativitas A dan Lemma 2.17, diperoleh $q * \big(q * (p * u)\big) \in A$. Karena $A \subseteq B$, maka $q * \big(q * (p * u)\big) \in B$. Kemudian, dengan Proposisi 2.5 (v) didapat

$$\big(q * (q * p)\big) * \Big(q * \big(q * (p * u)\big)\Big) \leq \big(q * (p * u)\big) * (q * p).$$

Lagi dengan Proposisi 2.5 (v), diperoleh

$$\big(q * (p * u)\big) * (q * p) \leq p * (p * u).$$

Karena

$$p * (p * u) = p * \Big(p * \big(p * (p * q)\big)\Big),$$

berdasarkan Proposisi 2.5 (vi),

$$p * (p * u) = p * (p * q) \in B.$$

Dengan sifat transitif $\leq$, kombinasi ketiga hasil terakhir ini mengakibatkan

$$\big(q * (q * p)\big) * \Big(q * \big(q * (p * u)\big)\Big) \leq p * (p * q) \in B.$$

Oleh karena itu, berdasarkan Lemma 2.9 didapat

$$\big(q * (q * p)\big) * \Big(q * \big(q * (p * u)\big)\Big) \in B.$$

Karena $q * \big(q * (p * u)\big) \in B$, didapat $q * (q * p) \in B$. Berdasarkan Lemma 2.17, B merupakan ideal implikatif. □

Definisi 2.20. Notasi $F(X, [-1,0])$ menyatakan kumpulan fungsi dari himpunan X ke $[-1,0]$. Anggota di $F(X, [-1,0])$ disebut *fungsi bernilai negatif* dari X ke $[-1,0]$ (singkatnya, $\mathcal{N}$-*fungsi* pada X). Pasangan terurut (X, f) dengan himpunan X dan $\mathcal{N}$- fungsi f pada X disebut $\mathcal{N}$-*struktur* (Jun dkk., 2009).

Definisi 2.21. $\mathcal{N}$-struktur neutrosofik atas semesta tak-kosong X (Khan dkk., 2017) didefinisikan sebagai struktur

$$X_N := \frac{X}{(T_N, I_N, F_N)} = \left\{ \frac{X}{(T_N(p), I_N(p), F_N(p))} \,\middle|\, p \in X \right\} \quad (2.18)$$

dengan T_N, I_N, dan F_N adalah $\mathcal{N}$-*fungsi* pada X yang berturut-turut disebut *fungsi keanggotaan kebenaran negatif, fungsi keanggotaan ketidakpastian negatif,* dan *fungsi keanggotaan kesalahan negatif* pada X.

Catat bahwa untuk setiap $\mathcal{N}$-struktur neutrosofik X_N pada X memenuhi syarat untuk setiap $p \in X$, maka $-3 \leq T_N(p) + I_N(p) + F_N(p) \leq 0$.

Definisi 2.22 (Jun dkk., 2017)**.** $\mathcal{N}$-struktur neutrosofik X_N pada BCK/BCI-aljabar X disebut $\mathcal{N}$-subaljabar neutrosofik dari X jika untuk setiap p, q anggota X tiga syarat berikut dipenuhi:

$$\begin{pmatrix} T_N(p * q) \leq \max\{T_N(p), T_N(q)\} \\ I_N(p * q) \geq \min\{I_N(p), I_N(q)\} \\ F_N(p * q) \leq \max\{F_N(p), F_N(q)\} \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Definisi 2.23 (Jun dkk., 2017). $\mathcal{N}$-struktur neutrosofik X_N pada BCK/BCI-aljabar X disebut $\mathcal{N}$-ideal neutrosofik dari X jika untuk setiap p anggota X memenuhi syarat

$$\big(T_N(0) \leq T_N(p), I_N(0) \geq I_N(p), F_N(0) \leq F_N(p)\big), \quad (2.20)$$

dan untuk setiap p, q anggota X tiga syarat berikut dipenuhi

$$\begin{pmatrix} T_N(p) \leq \max\{T_N(p*q), T_N(q)\} \\ I_N(p) \geq \min\{I_N(p*q), I_N(q)\} \\ F_N(p) \leq \max\{F_N(p*q), F_N(q)\} \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Untuk selanjutnya, X menyatakan BCK-aljabar kecuali ada ketentuan khusus.

Definisi 3.1. X_N $\mathcal{N}$-struktur neutrosofik pada X disebut $\mathcal{N}$-*ideal implikatif neutrosofik* dari X untuk setiap p anggota X memenuhi syarat

$$\big(T_N(0) \leq T_N(p), I_N(0) \geq I_N(p), F_N(0) \leq F_N(p)\big), \quad (3.1)$$

dan untuk setiap p, q, r anggota X tiga syarat berikut dipenuhi

$$\begin{pmatrix} T_N(p) \leq \max\{T_N(p*(q*p)*r), T_N(r)\} \\ I_N(p) \geq \min\{I_N(p*(q*p)*r), I_N(r)\} \\ F_N(p) \leq \max\{F_N(p*(q*p)*r), F_N(r)\} \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Contoh 3.2. Perhatikan BCK-aljabar $X = \{0,1,2,3,4\}$ dengan tabel Cayley pada Tabel 3.

$\mathcal{N}$-struktur neutrosofik

$$X_N = \left\{\frac{0}{(-0.7,-0.1,-0.6)}, \frac{1}{(-0.7,-0.1,-0.6)}, \frac{2}{(-0.7,-0.1,-0.6)}, \frac{3}{(-0.3,-0.6,-0.4)}, \frac{4}{(-0.5,-0.4,-0.2)}\right\}$$

pada X merupakan $\mathcal{N}$-ideal implikatif neutrosofik dari X.

Tabel 2. Tabel Cayley untuk operasi biner "$*$".

$*$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0
2	2	1	0	1	1
3	3	3	3	0	3
4	4	4	4	4	0

Teorema 3.3. Setiap $\mathcal{N}$-ideal implikatif neutrosofik merupakan $\mathcal{N}$-ideal neutrosofik.

Bukti. Misalkan X_N $\mathcal{N}$-ideal implikatif neutrosofik dari X. Substitusi $r = q$ dan $q = p$ pada (3.2), didapat

$$T_N(p) \leq \max\{T_N(p*(p*p)*q), T_N(q)\},$$
$$I_N(p) \geq \min\ \{I_N(p*(p*p)*q), I_N(q)\},$$
$$F_N(p) \leq \max\{F_N(p*(p*p)*q), F_N(q)\},$$

Untuk semua $p, q \in X$ dengan aksioma (III) dan Proposisi 2.2, didapat

$$T_N(p) \leq \max\{T_N(p*q), T_N(q)\},$$
$$I_N(p) \geq \min\{I_N(p*q), I_N(q)\},$$
$$F_N(p) \leq \max\{F_N(p*q), F_N(q)\}.$$

Maka X_N merupakan $\mathcal{N}$-ideal neutrosofik dari X. □

Kebalikan dari Teorema 3.3 tidak selalu benar seperti yang terlihat pada contoh berikut:

Contoh 3.4. Perhatikan BCK-aljabar $X = \{0,1,2,3,4\}$ dengan tabel Cayley pada Tabel 4. Misalkan

$$X_N = \left\{\frac{0}{(\xi_T^1, 0, \xi_F^1)}, \frac{1}{(\xi_T^1, 0, \xi_F^1)}, \frac{2}{(\xi_T^2, 0, \xi_F^1)}, \frac{3}{(\xi_T^3, \xi_I, \xi_F^2)}, \frac{4}{(\xi_T^3, \xi_I, \xi_F^2)}\right\}$$

$\mathcal{N}$-struktur pada X di mana $\xi_T^1 < \xi_T^2 < \xi_T^3$ berada pada $[-1,0]$, $\xi_I \in [-1,0)$ dan $\xi_F^1 < \xi_F^2$ berada pada $[-1,0]$. Maka X_N adalah $\mathcal{N}$-ideal neutrosofik dari X, tetapi bukan $\mathcal{N}$-ideal implikatif neutrosofik dari X, karena $I_N(1) \ngeq \min\{I_N((1*(3*1))*2), I_N(2)\}$.

Pada Teorema berikut dapat dilihat bahwa kebalikan dari Teorema 3.3 juga berlaku di BCK-aljabar implikatif.

Tabel 4. Tabel Cayley untuk operasi biner "$*$"

$*$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0
2	2	2	0	0	0
3	3	3	3	0	0
4	4	3	4	1	0

Teorema 3.5. Jika X BCK-aljabar implikatif, maka setiap $\mathcal{N}$-ideal neutrosofik adalah $\mathcal{N}$-ideal implikatif neutrosofik.

Bukti. Misalkan $\mathcal{N}$-ideal neutrosofik X_N pada X. Dengan substitusi $q = r$ pada (2.21), didapat

$$T_N(p) \leq \max\{T_N(p*r), T_N(r)\},$$
$$I_N(p) \geq \min\{I_N(p*r), I_N(r)\},$$
$$F_N(p) \leq \max\{F_N(p*r), F_N(r)\}.$$

Karena X implikatif, maka $*\,(q*r) = p, \forall\, p, q \in X$.

$$T_N(p) \leq \max\{T_N(x*(y*x)*z), T_N(r)\},$$
$$I_N(p) \geq \min\{I_N(x*(y*x)*z), I_N(r)\},$$
$$F_N(p) \leq \max\{F_N(x*(y*x)*z), F_N(r)\},$$

untuk semua $p, q \in X$. Maka X_N merupakan $\mathcal{N}$-ideal implikatif neutrosofik X. □

Misalkan X_N $\mathcal{N}$-struktur neutrosofik pada X dan $\alpha, \beta, \gamma \in [-1,0]$. Perhatikan himpunan berikut:

$$T_N^\alpha := \{p \in X \mid T_N(p) \leq \alpha\},$$
$$I_N^\beta := \{p \in X \mid I_N(p) \leq \beta\},$$
$$F_N^\gamma := \{p \in X \mid F_N(p) \leq \gamma\}.$$

Himpunan

$$X_N(\alpha,\beta,\gamma) := \{p \in X | T_N(p) \leq \alpha, I_N(p) \leq \beta, F_N(p) \leq \gamma\}$$

disebut *himpunan level-* (α,β,γ) dari X_N (Jun dkk., 2017). Catat bahwa

$$X_N(\alpha,\beta,\gamma) = T_N^\alpha \cap I_N^\beta \cap F_N^\gamma.$$

Teorema 3.6. Jika X_N $\mathcal{N}$-ideal implikatif neutrosofik dari X, maka $T_N^\alpha, I_N^\beta, F_N^\gamma$ adalah ideal implikatif dari X untuk semua $\alpha,\beta,\gamma \in [-1,0]$ merupakan himpunan tak-kosong.

Bukti. Asumsikan $T_N^\alpha, I_N^\beta, F_N^\gamma$ himpunan tak-kosong untuk setiap $\alpha,\beta,\gamma \in [-1,0]$. Maka $p \in T_N^\alpha$, $q \in I_N^\beta$, dan $r \in F_N^\gamma$ untuk $p,q,r \in X$. Jadi $T_N(0) \le T_N(p) \le \alpha$, $I_N(0) \ge I_N(p) \le \beta$, $F_N(0) \le F_N(p) \le \gamma$, dan $0 \in T_N^\alpha \cap I_N^\beta \cap F_N^\gamma$. Misalkan $(p * (q * p)) * r \in T_N^\alpha$ dan $r \in T_N^\alpha$. Maka $T_N\left((p*(q*p))*r\right) \le \alpha$ dan $T_N(r) \le \alpha$, yang menunjukkan bahwa

$$T_N(p) \le \max\left\{T_N\left((p*(q*p))*r\right), T_N(r)\right\} \le \alpha,$$

sehingga didapat $p \in T_N^\alpha$. Misalkan $(x*(y*x))*z \in I_N^\beta$ dan $z \in I_N^\beta$. Maka $I_N\left((x*(y*x))*z\right) \ge \beta$ dan $I_N(z) \ge \beta$, sehingga

$$I_N(x) \ge \min\left\{I_N\left((x*(y*x))*z\right), I_N(z)\right\} \ge \beta,$$

yaitu, $x \in I_N^\beta$. Jika $(a*(b*a))*c \in F_N^\gamma$ dan $c \in F_N^\gamma$, maka $F_N\left((a*(b*a))*c\right) \le \gamma$ dan $F_N(c) \le \gamma$. Jadi

$$F_N(a) \le \max\left\{F_N\left((a*(b*a))*c\right), F_N(c)\right\} \le \gamma,$$

sehingga didapat $c \in F_N^\gamma$. Karena itu, terbukti T_N^α, I_N^β, dan F_N^γ merupakan ideal implikatif pada X. □

Akibat 3.7. Misalkan X_N $\mathcal{N}$-struktur neutrosofik pada X dan $\alpha,\beta,\gamma \in [-1,0]$. Jika X_N $\mathcal{N}$-ideal implikatif neutrosofik dari X, maka himpunan level-(α,β,γ) tak-kosong dari X_N merupakan ideal implikatif dari X.

Bukti. Misalkan X_N $\mathcal{N}$-ideal implikatif neutrosofik dari X dan $\alpha,\beta,\gamma \in [-1,0]$. Berdasarkan Teorema 3.6, himpunan tak-kosong $T_N^\alpha, I_N^\beta, F_N^\gamma$ adalah ideal implikatif dari X. Jelas bahwa $X_N(\alpha,\beta,\gamma) = T_N^\alpha \cap I_N^\beta \cap F_N^\gamma$ merupakan ideal implikatif dari X. □

Lemma 3.8 (Jun dkk., 2017)**.** Untuk semua $\mathcal{N}$-ideal neutrosofik X_N dari X dengan p,q merupakan anggota X, memenuhi syarat berikut:

$$\left(p \le q \Rightarrow T_N(p) \le T_N(q), I_N(p) \ge I_N(q), F_N(p) \le F_N(q)\right). \tag{3.3}$$

Bukti. Misalkan $p,q \in X$ dengan $p \le q$. Maka $p*q = 0$ pada (2.21) dan didapat

$$T_N(p) \le \max\{T_N(0), T_N(q)\},$$
$$I_N(p) \ge \min\{I_N(0), I_N(q)\},$$
$$F_N(p) \le \max\{F_N(0), F_N(q)\}.$$

Karena $T_N(0) \le T_N(q)$, $I_N(0) \ge I_N(q)$, dan $F_N(0) \le F_N(q)$ berdasarkan (2.20), sehingga $T_N(p) \le T_N(q)$, $I_N(p) \ge I_N(q)$, $F_N(p) \le F_N(q)$ untuk setiap $p \le q$. □

Syarat $\mathcal{N}$-ideal neutrosofik untuk menjadi $\mathcal{N}$-ideal implikatif neutrosofik dituangkan dalam teorema berikut:

Teorema 3.9. Misalkan X_N $\mathcal{N}$-ideal neutrosofik pada X. Tiga pernyataan berikut ekuivalen:

(1) X_N merupakan $\mathcal{N}$-ideal implikatif neutrosofik dari X

(2) Untuk setiap p,q anggota X, berlaku tiga petidaksamaan berikut:

$$\begin{pmatrix} T_N(p) \le T_N\left(p*(q*p)\right), \\ I_N(p) \ge I_N\left(p*(q*p)\right), \\ F_N(p) \le F_N\left(p*(q*p)\right) \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

(3) Untuk setiap p,q anggota X, berlaku tiga persamaan berikut:

$$\begin{pmatrix} T_N(p) = T_N\left(p*(q*p)\right), \\ I_N(p) = I_N\left(p*(q*p)\right), \\ F_N(p) = F_N\left(p*(q*p)\right) \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Bukti. $\left((1) \Rightarrow (2)\right)$ Asumsikan X_N $\mathcal{N}$-ideal implikatif neutrosofik dari X. Substitusi $r=0$ pada (3.2) menghasilkan

$$T_N(p) \le \max\{T_N(p*(q*p)*0), T_N(0)\},$$
$$I_N(p) \ge \min\{I_N(p*(q*p)*0), I_N(0)\},$$
$$F_N(p) \le \max\{F_N(p*(q*p)*0), F_N(0)\}.$$

Berdasarkan Proposisi 2.2, didapat

$$T_N(p) \le \max\{T_N\left(p*(q*p)\right), T_N(0)\},$$
$$I_N(p) \ge \min\{I_N\left(p*(q*p)\right), I_N(0)\},$$
$$F_N(p) \le \max\{F_N\left(p*(q*p)\right), F_N(0)\}.$$

Dengan menggunakan (3.1) diperoleh pernyataan bahwa $\forall p,q \in X$

$$T_N(p) \le T_N\left(p*(q*p)\right),$$
$$I_N(p) \ge I_N\left(p*(q*p)\right),$$
$$F_N(p) \le F_N\left(p*(q*p)\right).$$

$\left((2) \Rightarrow (3)\right)$ Misalkan X_N $\mathcal{N}$-ideal neutrosofik dari X dan memenuhi (3.4). Dengan definisi pengurutan $\le$ dan Proposisi 2.2 diketahui bahwa $p*(p*q) \le p$ berlaku untuk semua $p,q \in X$ dan dengan Lemma 3.8, didapat $\forall p,q \in X$

$$T_N(p) \ge T_N\left(p*(q*p)\right),$$
$$I_N(p) \le I_N\left(p*(q*p)\right),$$
$$F_N(p) \ge F_N\left(p*(q*p)\right).$$

Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa

$$(\forall p, q \in X)\begin{pmatrix} T_N(p) = T_N\big(p * (q * p)\big), \\ I_N(p) = I_N\big(p * (q * p)\big), \\ F_N(p) = F_N\big(p * (q * p)\big) \end{pmatrix}.$$

$\big((3) \Rightarrow (1)\big)$ Misalkan X_N $\mathcal{N}$-ideal neutrosofik dari X dan memenuhi (3.5) pada (2.21), diperoleh

$$T_N\big(p * (q * p)\big) \leq \max\{T_N(p * (q * p) * r), T_N(r)\},$$
$$I_N\big(p * (q * p)\big) \geq \min\{I_N(p * (q * p) * r), I_N(r)\},$$
$$F_N\big(p * (q * p)\big) \leq \max\{F_N(p * (q * p) * r), F_N(r)\},$$

untuk semua $p, q, r \in X$. Berdasarkan Definisi 2.22 dapat dinyatakan bahwa X_N merupakan $\mathcal{N}$-ideal implikatif neutrosofik dari X. □

Lemma 3.10 (Jun dkk., 2017)**.** Misalkan X_N $\mathcal{N}$-struktur neutrosofik pada X dan asumsikan $T_N^{\alpha}, I_N^{\beta}$, dan F_N^{γ} ideal dari X untuk semua $\alpha, \beta, \gamma \in [-1,0]$. Maka X_N merupakan $\mathcal{N}$-ideal neutrosofik dari X.

Bukti. Jika ada $a, b, c \in X$ sehingga $T_N(0) > T_N(a)$, $I_N(0) < I_N(b)$, dan $F_N(0) > F_N(c)$, maka $T_N(0) > a_i \geq T_N(a)$, $I_N(0) < b_u \leq I_N(b)$, dan $F_N(0) > c_e \geq F_N(c)$ untuk suatu $a_i, c_e \in [-1,0)$ dan $b_u \in (-1,0]$. Maka $0 \notin T_N^{a_i}$, $0 \notin I_N^{b_u}$, dan $0 \notin F_N^{c_e}$. Hal ini bertentangan dengan asumsi bahwa $T_N^{a_i}, I_N^{b_u}$, dan $F_N^{c_e}$ adalah ideal dari X. Oleh karena itu, $T_N(0) \leq T_N(p)$, $I_N(0) \geq I_N(p)$, dan $F_N(0) \leq F_N(p)$ untuk semua $p \in X$. Asumsikan ada $a_i, b_i, a_u, b_u, a_e, b_e \in X$ sedemikian hingga

$$T_N(a_i) > \max\{T_N(a_i * b_i), T_N(b_i)\},$$
$$I_N(a_u) < \min\{I_N(a_u * b_u), I_N(b_u)\},$$
$$F_N(a_e) > \max\{F_N(a_e * b_e), F_N(b_e)\}.$$

Maka terdapat $s_i, s_e \in [-1,0)$ dan $s_u \in (-1,0]$ dengan

$$T_N(a_i) > s_i \geq \max\{T_N(a_i * b_i), T_N(b_i)\},$$
$$I_N(a_u) < s_u \leq \min\{I_N(a_u * b_u), I_N(b_u)\},$$
$$F_N(a_e) > s_e \geq \max\{F_N(a_e * b_e), F_N(b_e)\}.$$

Akibatnya, $a_i * b_i \in T_N^{s_i}$, $b_i \in T_N^{s_i}$, $a_u * b_u \in I_N^{s_u}$, $b_u \in I_N^{s_u}$, $a_e * b_e \in F_N^{s_e}$, dan $b_e \in F_N^{s_e}$. Akan tetapi, $a_i \notin T_N^{s_i}$, $a_u \notin I_N^{s_u}$, dan $a_e \notin F_N^{s_e}$. Hal ini bertentangan dengan fakta bahwa $a_i \in T_N^{s_i}$, $a_u \in I_N^{s_u}$, dan $a_e \in F_N^{s_e}$ sebab $T_N^{s_i}, I_N^{s_u}$, dan $F_N^{s_e}$ merupakan ideal dari X. Jadi,

$$T_N(p) \leq \max\{T_N(p * q), T_N(q)\},$$
$$I_N(p) \geq \min\{I_N(p * q), I_N(q)\},$$
$$F_N(p) \leq \max\{F_N(p * q), F_N(y)\}.$$

untuk semua $p, q, r \in X$. Karena itu, X_N merupakan $\mathcal{N}$-ideal neutrosofik dari X. □

Teorema 3.11 Misalkan X_N $\mathcal{N}$-struktur neutrosofik pada X dan asumsikan $T_N^{\alpha}, I_N^{\beta}$, dan F_N^{γ} ideal implikatif dari X untuk setiap $\alpha, \beta, \gamma \in [-1,0]$. Maka X_N merupakan $\mathcal{N}$-ideal implikatif neutrosofik dari X.

Bukti. Misalkan $T_N^{\alpha}, I_N^{\beta}$, dan F_N^{γ} ideal implikatif dari X. Berdasarkan Lemma 2.15, maka $T_N^{\alpha}, I_N^{\beta}$, dan F_N^{γ} merupakan ideal dari X. Oleh karena itu, dengan Lemma 3.10, X_N merupakan $\mathcal{N}$-ideal neutrosofik pada X. Misalkan $p, q \in X$ dan $\alpha, \beta, \gamma \in [-1,0]$ sehingga $T_N\big(p * (q * p)\big) = \alpha$, $I_N\big(p * (q * p)\big) = \beta$, dan $F_N\big(p * (q * p)\big) = \gamma$. Maka $p * (q * p) \in T_N^{\alpha} \cap I_N^{\beta} \cap F_N^{\gamma}$. Karena $T_N^{\alpha} \cap I_N^{\beta} \cap F_N^{\gamma}$ merupakan ideal implikatif dari X, dengan Lemma 2.15 dan $x \in T_N^{\alpha} \cap I_N^{\beta} \cap F_N^{\gamma}$, maka didapat

$$T_N(p) \leq \alpha = T_N\big(p * (q * p)\big),$$
$$I_N(p) \geq \beta = I_N\big(p * (q * p)\big),$$
$$F_N(p) \leq \gamma = F_N\big(p * (q * p)\big).$$

Oleh karena itu, terbukti X_N merupakan $\mathcal{N}$-ideal implikatif neutrosofik dari X berdasarkan Teorema 3.9. □

Untuk sebarang bilangan tetap $\xi_T, \xi_F \in [-1,0)$, $\xi_I \in (-1,0]$ dan subhimpunan tak-kosong G, didefinisikan X_N^G sebagai $\mathcal{N}$-struktur neutrosofik pada X dengan struktur

$$X_N^G := \frac{X}{(T_N^G, I_N^G, F_N^G)} = \left\{ \frac{x}{\big(T_N^G(p), I_N^G(p), F_N^G(p)\big)} \,\middle|\, p \in X \right\}, \quad (3.6)$$

di mana T_N^G, I_N^G, dan F_N^G sebagai $\mathcal{N}$-fungsi pada X yang didefinisikan sebagai berikut:

$$T_N^G : X \longrightarrow [-1,0], \quad p \mapsto \begin{cases} \xi_T & \text{jika } p \in G, \\ 0 & \text{jika } p \notin G, \end{cases}$$
$$I_N^G : X \longrightarrow [-1,0], \quad p \mapsto \begin{cases} \xi_I & \text{jika } p \in G, \\ -1 & \text{jika } p \notin G, \end{cases}$$
$$F_N^G : X \longrightarrow [-1,0], \quad p \mapsto \begin{cases} \xi_F & \text{jika } p \in G, \\ 0 & \text{jika } p \notin G. \end{cases}$$

Misalkan X_N^G $\mathcal{N}$-ideal implikatif neutrosofik dari X. Berdasarkan Teorema 3.6 didapat $(T_N^G)^{\frac{\xi_T}{2}} = G$, $(I_N^G)^{\frac{\xi_I}{2}} = G$, dan $(F_N^G)^{\frac{\xi_F}{2}} = G$ merupakan ideal implikatif dari X. Jadi, G adalah ideal implikatif dari X. Sekarang asumsikan bahwa G ideal implikatif dari X. Maka $0 \in G$, sehingga $T_N^G(0) = \xi_T \leq T_N^G(p)$, $I_N^G(0) = \xi_I \geq I_N^G(p)$, dan $F_N^G(0) = \xi_F \leq F_N^G(p)$ untuk setiap $p \in X$. Untuk sebarang $p, q, r \in X$, perhatikan empat kasus berikut:

Kasus 1. $\big(p * (q * p)\big) * r \in G$ dan $r \in G$,

Kasus 2. $\big(p * (q * p)\big) * r \in G$ dan $r \notin G$,

Kasus 3. $\big(p * (q * p)\big) * r \notin G$ dan $r \in G$,

Kasus 4. $(p*(q*p))*r \notin G$ dan $r \notin G$.
Kasus 1 mengakibatkan $p \in G$, sehingga

$$T_N^G(p) = T_N^G\left((p*(q*p))*r\right) = T_N^G(r) = \xi_T,$$
$$I_N^G(p) = I_N^G\left((p*(q*p))*r\right) = I_N^G(r) = \xi_I,$$
$$F_N^G(p) = F_N^G\left((p*(q*p))*r\right) = F_N^G(r) = \xi_F.$$

Akibatnya,

$$T_N^G(p) \le \max\left\{T_N^G\left((p*(q*p))*r\right), T_N^G(r)\right\},$$
$$I_N^G(p) \ge \min\left\{I_N^G\left((p*(q*p))*r\right), I_N^G(r)\right\},$$
$$F_N^G(p) \le \max\left\{F_N^G\left((p*(q*p))*r\right), F_N^G(r)\right\}.$$

Jika Kasus 2 benar, maka $T_N^G(r) = 0$, $I_N^G(r) = -1$, dan $F_N^G(r) = 0$. Jadi

$$T_N^G(p) \le 0 = \max\left\{T_N^G\left((p*(q*p))*r\right), T_N^G(r)\right\},$$
$$I_N^G(p) \ge -1 = \min\left\{I_N^G\left((p*(q*p))*r\right), I_N^G(r)\right\},$$
$$F_N^G(p) \le 0 = \max\left\{F_N^G\left((p*(q*p))*r\right), F_N^G(r)\right\}.$$

Jika Kasus 3 benar, maka $T_N^G\left((p*(q*p))*r\right) = 0$, $I_N^G\left((p*(q*p))*r\right) = -1$, dan $F_N^G\left((p*(q*p))*r\right) = 0$. Karena itu,

$$T_N^G(p) \le 0 = \max\left\{T_N^G\left((p*(q*p))*r\right), T_N^G(r)\right\},$$
$$I_N^G(p) \ge -1 = \min\left\{I_N^G\left((p*(q*p))*r\right), I_N^G(r)\right\},$$
$$F_N^G(p) \le 0 = \max\left\{F_N^G\left((p*(q*p))*r\right), F_N^G(r)\right\}.$$

Untuk Kasus 4, jelaslah bahwa

$$T_N^G(p) \le \max\left\{T_N^G\left((p*(q*p))*r\right), T_N^G(r)\right\},$$
$$I_N^G(p) \ge \min\left\{I_N^G\left((p*(q*p))*r\right), I_N^G(r)\right\},$$
$$F_N^G(p) \le \max\left\{F_N^G\left((p*(q*p))*r\right), F_N^G(r)\right\}.$$

Jadi, X_N^G merupakan $\mathcal{N}$-ideal implikatif neutrosofik dari X. Oleh karena itu, didapatkan teorema berikut:

Teorema 3.12. Misalkan G subhimpunan tak-kosong dari X. Maka X_N^G $\mathcal{N}$-struktur neutrosofik pada X merupakan $\mathcal{N}$-ideal implikatif neutrosofik dari X jika dan hanya jika G merupakan ideal implikatif dari X.

Definisi relasi $(=,\le,=)$ antara $\mathcal{N}$-struktur neutrosofik X_N dan X_M pada X sebagai berikut:

$$X_N(=,\le,=)X_M \Leftrightarrow (\forall p \in X)\begin{pmatrix} T_N(p) = T_M p, \\ I_N(p) \le I_M(p), \\ F_N(p) = F_M(p) \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Misalkan

$$X_N := \frac{X}{(T_N, I_N, F_N)} = \left\{\frac{X}{(T_N(p), I_N(p), F_N(p))} \middle| p \in X\right\}$$

dan

$$X_M := \frac{X}{(T_M, I_M, F_M)} = \left\{\frac{X}{(T_M(p), I_M(p), F_M(p))} \middle| p \in X\right\}$$

merupakan $\mathcal{N}$-ideal neutrosofik dari X sehingga memenuhi $X_N(=,\le,=)X_M$, dan asumsikan X_N merupakan $\mathcal{N}$-ideal implikatif neutrosofik dari X. Maka berdasarkan Teorema 3.6, T_N^α, I_N^β, dan F_N^γ merupakan ideal implikatif dari X untuk semua $\alpha,\beta,\gamma \in [-1,0]$. Syarat $X_N(=,\le,=)X_M$ menunjukkan bahwa $T_N^\alpha = T_M^\alpha$, $I_N^\beta \subseteq I_M^\beta$, dan $F_N^\gamma = F_N^\gamma$. Dengan Lemma 2.19, didapat bahwa T_N^α, I_N^β, dan F_N^γ merupakan ideal implikatif dari X untuk semua $\alpha,\beta,\gamma \in [-1,0]$. Oleh karena itu, X_M merupakan $\mathcal{N}$-ideal implikatif neutrosofik dari X berdasarkan Teorema 3.11. Dengan demikian didapatkan teorema berikut:

Teorema 3.13 (Meng dan Jun, 1994)**.** Misalkan

$$X_N := \frac{X}{(T_N, I_N, F_N)} = \left\{\frac{X}{(T_N(p), I_N(p), F_N(p))} \middle| p \in X\right\}$$

dan

$$X_M := \frac{X}{(T_M, I_M, F_M)} = \left\{\frac{X}{(T_M(p), I_M(p), F_M(p))} \middle| p \in X\right\}$$

$\mathcal{N}$-ideal neutrosofik dari X yang memenuhi $X_N(=,\le,=)X_M$. Jika X_N merupakan $\mathcal{N}$-ideal implikatif neutrosofik dari X, maka begitu juga X_M.

Karakterisasi BCK-aljabar implikatif dengan menggunakan $\mathcal{N}$-ideal implikatif neutrosofik ditunjukkan sebagai berikut.

Lemma 3.14 (Meng dan Jun, 1994)**.** BCK-aljabar X implikatif jika dan hanya jika semua ideal dari X merupakan ideal implikatif dari X.

Bukti. ($\Rightarrow$) Misalkan I ideal dari X, dan misalkan $(p*(q*p))*r \in I, r \in I$. Harus ditunjukkan bahwa $p \in I$. Karena X implikatif, $p*(q*p) = p$, sehingga $p*r \in I$. Akibatnya, karena I Ideal dan $r \in I$, pastilah $p \in I$. Jadi I implikatif.

($\Leftarrow$) Jelaslah $\{0\}$ ideal, dan karenanya merupakan ideal implikatif. Berdasarkan Lemma 2.16, didapat bahwa $\{0\}$ merupakan ideal implikatif positif. Dengan substitusi $q = (p*(q*p))$ pada sistem di Lemma 2.18, maka didapat $A(p*(q*p))$ merupakan ideal, dan juga merupakan implikatif. Kemudian, karena $p*(q*p) \in A(p*(q*p))$ didapat $p \in A(p*(q*p))$, oleh karena itu $p \le p*(q*p)$. Kebalikan dari pertidaksamaan tersebut jelas benar, sehingga

$p = p * (q * p)$. Hal ini menunjukkan bahwa X merupakan BCK-aljabar implikatif. □

Teorema 3.15. BCK-aljabar X adalah implikatif jika dan hanya jika semua $\mathcal{N}$-ideal neutrosofik dari X merupakan $\mathcal{N}$-ideal implikatif neutrosofik dari X.

Bukti. (⇒) Asumsikan bahwa BCK-aljabar X implikatif. Berdasarkan Lemma 3.14, semua ideal dari X adalah implikatif. Misalkan X_N $\mathcal{N}$-ideal neutrosofik dari X. Maka T_N^{α}, I_N^{β}, dan F_N^{γ} merupakan ideal dari X untuk semua $\alpha, \beta, \gamma \in [-1,0]$ oleh Jun dkk. (2017), sehingga dengan Lemma 3.14, T_N^{α}, I_N^{β}, dan F_N^{γ} merupakan ideal implikatif dari X untuk semua $\alpha, \beta, \gamma \in [-1,0]$. Berdasarkan Teorema 3.11, X_N merupakan $\mathcal{N}$-ideal implikatif neutrosofik dari X.

(⇐)Misalkan X BCK-aljabar di mana setiap $\mathcal{N}$-ideal neutrosofik adalah $\mathcal{N}$-ideal implikatif neutrosofik. Untuk sebarang ideal A dari X, definisikan $\mathcal{N}$-struktur neutrosofik X_N pada X sebagai berikut:

$$T_N: X \longrightarrow [-1,0], \quad p \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{jika } p \in A, \\ 0 & \text{jika } p \notin A. \end{cases}$$

$$I_N: X \longrightarrow [-1,0], \quad p \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{jika } p \in A, \\ -1 & \text{jika p} \notin A. \end{cases}$$

dan

$$F_N: X \longrightarrow [-1,0], \quad p \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{jika } p \in A, \\ 0 & \text{jika } p \notin A. \end{cases}$$

Dapat dilihat bahwa X_N merupakan $\mathcal{N}$-ideal neutrosofik dari X. Berdasarkan hipotesis, X_N merupakan $\mathcal{N}$-ideal implikatif neutrosofik dari X. Berdasarkan Teorema 3.6, $T_N^{-\frac{1}{2}} = A$, $I_N^{-\frac{1}{2}} = A$, dan $F_N^{-\frac{1}{2}} = A$ merupakan ideal implikatif dari X, sehingga A ideal implikatif dari X. Kemudian asumsikan bahwa A ideal implikatif dari X. Maka didapat $0 \in A$ dan $T_N(0) = -\frac{1}{2} \le T_N(p)$, $I_N(0) = -\frac{1}{2} \ge I_N(p)$, dan $F_N(0) = -\frac{1}{2} \le F_N(p)$ untuk setiap $p \in X$. Untuk sebarang $p, q, r \in X$, perhatikan empat kasus berikut:

Kasus 1. $(p * q) \in A$ dan $q \in A$,

Kasus 2. $(p * q) \in A$ dan $q \notin A$,

Kasus 3. $(p * q) \notin A$ dan $q \in A$,

Kasus 4. $(p * q) \notin A$ dan $q \notin A$.

Kasus 1 menunjukkan bahwa $p \in A$, sehingga

$$T_N(p) = T_N(p * q) = T_N(q) = -\tfrac{1}{2},$$
$$I_N(p) = I_N(p * q) = I_N(q) = -\tfrac{1}{2},$$
$$F_N(p) = F_N(p * q) = F_N(q) = -\tfrac{1}{2}.$$

Jadi

$$T_N(p) \le \max\{T_N(p * q), T_N(q)\},$$
$$I_N(p) \ge \min\{I_N(p * q), I_N(q)\},$$
$$F_N(p) \le \max\{F_N(p * q), F_N(q)\}.$$

Jika Kasus 2 benar, maka $T_N(q) = 0$, $I_N(q) = -1$, dan $F_N(q) = 0$. Karena itu,

$$T_N(p) \le 0 = \max\{T_N(p * q), T_N(q)\},$$
$$I_N(p) \ge -1 = \min\{I_N(p * q), I_N(q)\},$$
$$F_N(p) \le 0 = \max\{F_N(p * q), F_N(q)\}.$$

Jika Kasus 3 benar, maka $T_N(p * q) = 0$, $I_N(p * q) = -1$, dan $F_N(p * q) = 0$. Akibatnya,

$$T_N(p) \le 0 = \max\{T_N(p * q), T_N(q)\},$$
$$I_N(p) \ge -1 = \min\{I_N(p * q), I_N(q)\},$$
$$F_N^G(p) \le 0 = \max\{F_N(p * q), F_N(q)\}.$$

Untuk Kasus 4,

$$T_N(p) \le \max\{T_N(p * q), T_N(q)\},$$
$$I_N(p) \ge \min\{I_N(p * q), I_N(q)\},$$
$$F_N(p) \le \max\{F_N(p * q), F_N(q)\}.$$

$T_N = I_N = F_N$. Oleh karena itu, X merupakan BCK-aljabar implikatif berdasarkan Lemma 3.14. □

PENUTUP

SIMPULAN

Dengan menggunakan konsep $\mathcal{N}$-ideal implikatif neutrosofik telah dikonstruksi karakterisasi BCK-aljabar implikatif berdasarkan $\mathcal{N}$-ideal implikatif neutrosofik. Hasil dari konstruksi yaitu, BCK-aljabar X adalah implikatif jika dan hanya jika semua $\mathcal{N}$-ideal neutrosofik dari X merupakan $\mathcal{N}$-ideal implikatif neutrosofik dari X. Untuk syarat perlu, alat utama yang berperan adalah penyataan bahwa BCK-aljabar X implikatif jika dan hanya jika semua ideal dari X merupakan ideal implikatif dari X yang terbukti pada Lemma 3.14 dan pernyataan bahwa jika X_N $\mathcal{N}$-struktur neutrosofik pada X dan asumsi $T_N^{\alpha}, I_N^{\beta}$, dan F_N^{γ} ideal implikatif dari X untuk setiap $\alpha, \beta, \gamma \in [-1,0]$, maka X_N merupakan $\mathcal{N}$-ideal implikatif neutrosofik dari X pada Teorema 3.11. Dan untuk syarat cukup, , alat utama yang berperan adalah penyataan bahwa BCK-aljabar X implikatif jika dan hanya jika semua ideal dari X merupakan ideal implikatif dari X yang terbukti pada Lemma 3.14 dan jika X_N $\mathcal{N}$-ideal implikatif neutrosofik dari X, maka $T_N^{\alpha}, I_N^{\beta}, F_N^{\gamma}$ adalah ideal implikatif dari X untuk semua $\alpha, \beta, \gamma \in [-1,0]$ merupakan himpunan tak-kosong pada Teorema 3.6.

SARAN

Untuk memperkaya pengetahuan tentang BCK-aljabar, perlu diselidiki hubungan antara $\mathcal{N}$-struktur neutrosofik dan $\mathcal{N}$-ideal implikatif positif neutrosofik.

UCAPAN TERIMA KASIH

Ucapan terima kasih disampaikan kepada Profesor Muhiuddin dari Universitas Tabuk, Saudi Arabia atas bantuan untuk melengkapi bukti beberapa lemma dan teorema penting sehingga penulis dapat memahami isi artikel beliau sebagai sumber utama artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

G. Muhiuddin, S. J. Kim, dan Y. B. Jun. (2019). Implicative N-ideal of BCK-algebras based on neutrosophic N-structure. doi:10.1142/S1793830919500113.

G. Muhiuddin. G. Muhiuddin's Notes: Ideals in BCK-algebra.

K. Iseki. (1965). Algebraic formulations of propositional calculi. Proc. Japan Acad., 41, 803-807.

K. Iséki. (1966). An algebra related with a propositional calculus. Proc. Japan Acad., 42, 26–29.

K. Iseki dan S. Tanaka. (1976). Ideal Theory of BCK-Algebra. Math. Japon. 21, 351-366.

Y. S. Huang. (2006). BCI-Algebra. Beijing: Science Press.

Y. B. Jun, K. J. Lee dan S. Z. Song. (2009). N-ideals of BCK/BCI-algebras. J. Chungcheong Math. Soc. 22, 417–437.

Y. B. Jun, F. Smarandache dan H. Bordbar. (2017). Neutrosophic N-structures applied to BCK/ BCI-algebras. Information 8 (2017) 128, doi:10.3390/info8040128.

M. Khan, S. Amis, F. Smarandache dan Y. B. Jun. (2017). Neutrosophic N-structures and Their Applications in Semigroups. Ann. Fuzzy Math. Inform. 14(6), 583–598.

J. Meng dan Y. B. Jun. (1994). BCK-Algebras. Seoul:Kyungmoon Sa Co.

S. Z. Song, F. Smarandache dan Y. B. Jun. (2017). Neutrosophic commutative N-ideals in BCK-algebras. Information 8(4), 130.

F. Smarandache. (1999). A Unifying Field in Logics: Neutrosophic Logic. Neutrosophy, Neutrosophic Set, Neutrosophic Probability. USA:American Research Press, Rehoboth, NM.

F. Smarandache. (2005). Neutrosophic set — A generalization of the intuitionistic fuzzy set. Int. J. Pure Appl. Math. 24(3) 287–297.