MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115

Volume 09 No 03
Tahun 2021

POHON-POHON RENTANG INDEPENDEN DALAM GRAPH BERATURAN

Otniel Sukma Priyambodo
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : otniel.18034@mhs.unesa.ac.id

I Ketut Budayasa
Jurusan Matematia, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail:ketutbudayasa@yahoo.com

Abstrak

Pohon-pohon perentang T_1, T_2, …, T_k pada graf G disebut pohon-pohon perentang independen lengkap jika pohon-pohon perentang tersebut perpasang pisah-sisi dan pisah-titik secara internal. Fokus permasalahan dalam artikel ini adalah mencari pohon perentang independen lengkap pada graf sedemikian hingga pohon-pohon perentang tersebut pisah-sisi dan pisah-titik secara internal. Dua pohon perentang T_1 dan T_2 pada graf G disebut pisah-sisi, jika $E(T_1) \cap E(T_2) = \emptyset$ dan dua pohon perentang T_1 dan T_2 pada graf G disebut pisah-titik secara internal jika untuk setiap u, v anggota himpunan $V(G)$, $P_{T_1}(u,v) \cap P_{T_2}(u,v) = \{u,v\}$. Untuk graf beraturan 2r, seperti pada produk Kartesius graf $K_{2r} \otimes P_n$ terdapat 3 pohon-pohon perentang yang independen lengkap. Pohon-pohon perentang independen lengkap dapat diterapkan pada masalah komunikasi yang fokusnya terhadap kesalahan dalam jaringan interkoneksi.

Kata Kunci: Pohon perentang independen lengkap, pohon perentang pisah-sisi, pohon perentang pisah-titik secara internal, produk cartersius graf.

Abstract

Spanning trees T_1, T_2, …, $T_k$on graph G are said to be complete independent spanning trees if the spanning trees are a pair of edge-disjoint and internally vertex-disjoint. The focus of the problem in this article is to find a complete independent spanning tree on a graph such that the spanning trees are edge-disjoint and internally vertex-disjoint. Two spanning trees and graph G *are* said to be edge-disjoint if $E(T_1) \cap E(T_2) = \emptyset$ and two spanning trees on graph G *are* said to be internally vertex-disjoint if for each u, v members of the set $V(G)$, $P_{T_1}(u,v) \cap P_{T_2}(u,v) = \{u,v\}$. For a 2r regular graph, as in the Cartesian multiplication graph, there are 3 completely independent spanning trees. Completely independent spanning trees can be applied to communication problems that focus on faults in interconnecting networks.

Keywords: *completely independent spanning tree, edge-disjoint spanning tree, internally vertex-disjoint spanning tree, Cartesian multiplication graph.*

PENDAHULUAN

Dua pohon perentang T_1 dan T_2 pada graf G disebut pisah-sisi, jika $E(T_1) \cap E(T_2) = \emptyset$. Sebuah pohon T setiap dua titik berbeda dihubungkan oleh tepat satu lintasan. Misalkan $u, v \in V(T)$. Himpunan semua titik lintasan tunggal yang menghubungkan u dan v dilambangkan $P_T(u,v)$. Dua pohon perentang T_1 dan T_2 pada G disebut pisah-titik secara internal jika untuk setiap u, v anggota himpunan $V(G), P_{T_1}(u,v) \cap P_{T_2}(u,v) = \{u,v\}$. Sehingga, $T_1, T_2, \ldots, T_k$ adalah pohon-pohon perentang yang independen lengkap jika pisah-sisi dan pisah-titik secara internal. Perhatikan bahwa setiap $1 \leq i \leq k$, himpunan semua titik pada T_i membentuk himpunan Graf terhubung. Jadi, jika terdapat k pohon perentang T_1 dan T_2 pada graf G yang pisah sisi, maka terdapat k himpunan Graf terhubung yang pisah-titik secara internal.

Pohon perentang telah dipelajari secara mendalam karena sangat praktis dalam sistem komunikasi pada penyiaran jaringan interkoneksi. Pohon perentang sering digunakan dalam berbagai operasi jaringan seperti; komputasi pohon perentang independen lengkap menjamin kesinambungan layanan, karena masing-masing dapat digunakan sebagai pohon perentang cadangan jika terjadi kegagalan dalam titik pada pohon perentang. Dengan demikian, menghitung k pohon perentang independen lengkap memungkinkan untuk menangani hingga *k-1* titik independen. Dalam hal ini, sebuah jaringan sering dimodelkan dengan graf G di mana himpunan titik $V(G)$ berkorespondensi dengan himpunan titik dan himpunan sisi $E(G)$ dengan berhubungan langsung antar titik. Untuk pohon, titik yang bukan daun disebut titik internal. Untuk titik u dari graf G, misalkan $d_G(u)$ adalah derajat titik di G yaitu jumlah sisi G yang berhubungan langsung. Untuk kejelasannya, kita mengingat kembali definisi produk Kartesius. produk Kartesius dua graf G dan H, dilambangkan dengan $G \otimes H$ adalah sebuah graf dengan himpunan titik $V(G) \times V(H)$ dan himpunan sisi $\{ (u,u')(v,v')/(u = v \wedge u'v' \in E(H)) \vee (u' = v' \wedge uv \in E(G)) \}$. Konsep diatas akan digunakan untuk memecahkan permasalahan dalam artikel ini yaitu mencari sebuah pohon perentang independen lengkap pada graf sedemikian hingga pohon-pohon perentang tersebut pisah-sisi dan pisah-titik secara internal.

1. KAJIAN TEORI

Sebuah graf disebut terhubung, jika setiap dua titik pada graf dihubungkan oleh sebuah lintasan. Komponen sebuah graf adalah sebuah subgraf yang terhubung maksimal. Jadi, jika G graf terhubung, maka G memliki tepat satu komponen. Sebaliknya, jika graf G tak terhubung, maka banyaknya komponen G paling sedikit dua. Graf G disebut graf beraturan-k jika setiap titik G berderajat k. Graf lintasan yang dinotasikan dengan Pn adalah graf yang mempunyai tepat satu lintasan dengan n titik dan panjang n – 1. Pohon adalah graf terhubung dan tidak memuat sikel. Graf yang setiap komponennya berupa pohon disebut hutan (*forest*). Sifat-sifat pohon sebagai berikut.

Jika G graf pohon, maka untuk setiap dua titik u dan v yang berbeda di G terdapat satu lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut.

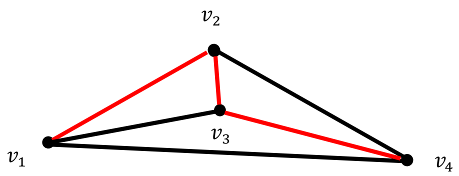
Banyaknya sisi dari sebuah pohon G sama dengan banyaknya titik dikurangi 1, $|V(G)| = |E(G)| - 1$

Setiap pohon dengan paling sedikit dua titik yang berderajat satu.

Definisi 1: Misalkan G graf terhubung. Sebuah pohon T dalam G yang memuat semua titik G disebut pohon perentang.

Definisi 2: Dua pohon perentang T_1 dan T_2 pada graf G disebut pisah-sisi, jika $E(T_1) \cap E(T_2) = \emptyset$.

Contoh 1:



G

Gambar 2.1

T_1 pohon perentang pada G sisi-sisi "warna hitam".
T_2 pohon perentang pada G sisi-sisi "warna merah".
Karena $E(T_1) \cap E(T_2) = \emptyset$, maka T_1 dan T_2 dua pohon perentang pada G pisah-sisi. Ingat bahwa dalam sebuah pohon T setiap dua titik berbeda dihubungkan oleh tepat satu lintasan.
Misalkan $u, v \in V(T)$. Himpunan semua titik lintasan tunggal yang menghubungkan u dan v, dilambangkan $P_T(u,v)$. Misalnya , dari Gambar 2.1, diperoleh
$P_{T_1}(v_1, v_2) = \{ v_1, v_2, v_3, v_4 \}$, $P_{T_2}(v_1, v_2) = \{ v_1, v_2, \}$.
$P_{T_1}(v_1, v_4) = \{ v_1, v_4, \}$, $P_{T_2}(v_1, v_4) = \{ v_1, v_2, v_3, v_4 \}$.

Definisi 3: Misalkan G graf terhubung. Dua pohon perentang T_1 dan T_2 pada G disebut pisah-titik secara internal jika untuk setiap u, v anggota himpunan $V(G)$, $P_{T_1}(u,v) \cap P_{T_2}(u,v) = \{u, v\}$.

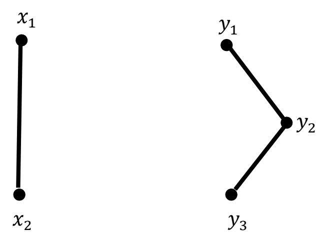
Contoh 2: Pohon perentang T_1 dan T_2 pada graf G, dalam Gambar 2.1, memenuhi Definisi-3, jadi T_1 dan T_2 saling pisah-titik secara internal.
Karena untuk setiap u, v anggota himpunan $V(G)$, $P_{T_1}(u,v) \cap P_{T_2}(u,v) = \{u, v\}$., maka T_1 dan T_2 pada graf G pisah-titik secara internal.

Definisi 4: Pohon-pohon perentang $T_1, T_2, \ldots, T_k$ pada graf G disebut pohon-pohon perentang independen lengkap jika pohon-pohon perentang tersebut perpasang pisah-sisi dan pisah-titik secara internal.

Contoh 3: Pohon perentang T_1 dan T_2 pada graf G, dalam Gambar 2.1, pisah-sisi (Contoh 1) dan pisah-titik secara internal (Contoh 2). Sehingga T_1 dan T_2 pohon-pohon perentang independen lengkap G.
Perhatikan bahwa setiap $1 \le i \le k$, himpunan semua titik pada T_i membentuk himpunan Graf terhubung. Jadi, jika terdapat k pohon perentang T_1 dan T_2 pada graf G yang pisah sisi, maka terdapat k himpunan Graf terhubung yang pisah-titik secara internal.

Definisi 5: Produk Kartesius dua graf G dan H, dilambangkan dengan $G \otimes H$, adalah sebuah graf dengan himpunan titik $V(G) \times V(H)$ dan himpunan sisi $\{ (u,u')(v,v')/(u = v \wedge u'v' \in E(H)) \vee (u' = v' \wedge uv \in E(G)) \}$.

Contoh 5.1:



G ***H***

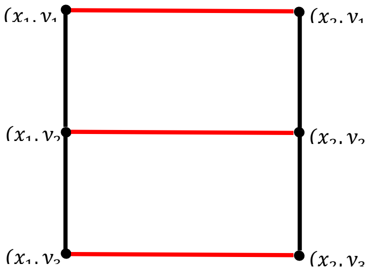
Dari gambar di atas , $V(G) = \{ x_1, x_2 \}$ dan $V(H) = \{ y_1, y_2, y_3 \}$.
Sehingga

$V(G \otimes H) = V(G) \times V(H) = \{ (x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_1, y_3), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_2, y_3) \}$

dan

$E(G \otimes H) = \{(x_1y_1), (x_1y_2), (x_1y_2), (x_1y_3), (x_2y_1), (x_2y_2), (x_2y_2), (x_2y_3), (x_1y_1), (x_2y_1), (x_1y_2), (x_2y_2), (x_1y_3), (x_2y_3)\}$.

Gambar graf $G \otimes H$ dapat dilihat seperti berikut:



$G \otimes H$
Gambar 2.2

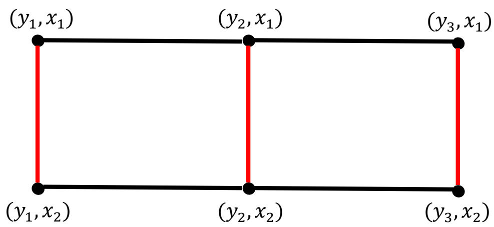
Untuk graf $H \otimes G$ diperoleh,

$V(H \otimes G) = V(H) \times V(G) = \{(y_1, x_1), (y_1, x_2), (y_2\ x_1), (y_2, x_2), (y_3, x_1), (y_3, x_2)\}$

dan

$E(H \otimes G) = \{(y_1x_1), (y_1x_2), (y_2x_1), (y_2x_2), (y_3x_1), (y_3x_2), (y_1x_1), (y_2x_1), (y_2x_1), (y_3x_1), (y_1x_2), (y_2x_2), (y_2x_2), (y_3x_2)\}$

Sehingga gambar graf $H \otimes G$ seperti berikut

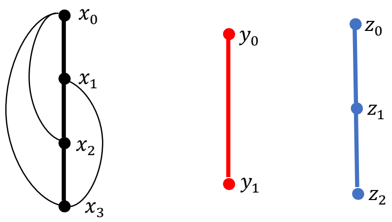


$H \otimes G$
Gambar 2.3

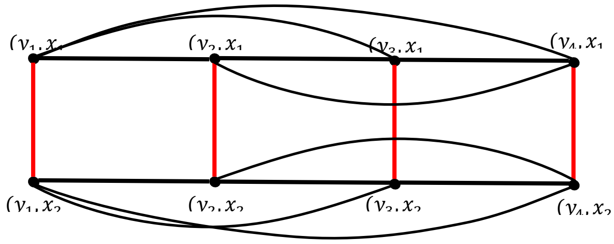
Perhatikan bahwa graf $G \otimes H$ isomorfik dengan graf $H \otimes G$; yakni, terdapat fungsi bijektif $\alpha: V(G \otimes H) \rightarrow V(H \otimes G)$ yang mengawetkan keterhubungan langsung antar dua titik.

Contoh 5.2

Diberikan graf Komplet K_4, lintasan P_2, dan lintasan P_3 berikut

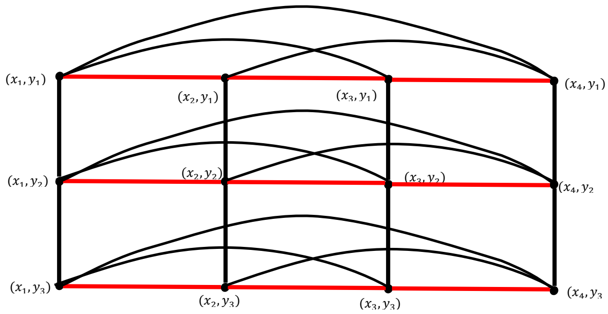


Graf $K_4 \otimes P_2$ dapat dilihat pada gambar berikut



Gambar 2.4

Graf $K_4 \otimes P_3$ dapat dilihat pada gambar berikut



Gambar 2.5

Produk Kartesius graf Komplet dan lintasan atau sikel

Diberikan graf Komplet K_m dengan ≥ 3, lintasan P_n dengan $n \geq 2$, dan sikel C_n dengan $n \geq 3$. Misalkan

$$V(K_m) = \{ x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{m-1}\}$$
$$V(P_n) = V(C_n) = \{ y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n-1}\}$$

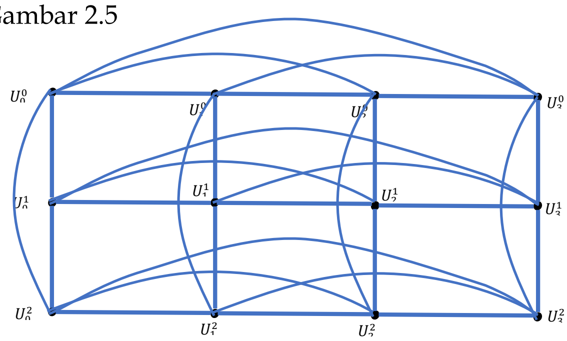
Untuk $0 \leq i \leq m-1, 0 \leq j \leq n-1$, titik (x_i, y_j) dari graf $K_m \otimes P_n$ atau $K_m \otimes C_n$, demi efisiensi, disimbolkan dengan U_i^j. Sehingga,

$$V(K_m \otimes P_n) = V(K_m \otimes C_n)$$
$$= \{U_i^j / 0 \leq i \leq m-1, 0 \leq j \leq n-1\}$$

dan

$$E(K_m \otimes P_n) = \{U_i^j U_k^j | 0 \leq i \leq m-1, i \neq k, 0 \leq j \leq n-1\} \cup \{U_i^j U_k^{j+1} | 0 \leq i \leq m-1, 0 \leq j \leq n-2\}$$
$$E(K_m \otimes C_n) = E(K_m \otimes P_n) \cup \{U_i^0 U_k^{n-1} | 0 \leq i \leq m-1\}$$

Produk Kartesius graf K_4 dan P_3, dapat dilihat pada Gambar 2.5



Graf $K_4 \otimes C_3$
Gambar 2.6

Definisi 6: Misal G graf terhubung dengan n titik dan T sebuah pohon perentang di G. Misal G' subgraf G beraturan-2r memuat r pohon-pohon perentang independen lengkap $T_1, T_2, \dots, T_r$.

- Himpunan titik internal T, dilambangkan dengan $IN(T)$, didefinisikan sebagai berikut.

  $IN(T)= \{v \in V(T) | d_T(v) \geq 2\}$
- Derajat ekstra potensial dari T, dilambangkan $ped(T)$, didefinisikan sebagai berikut.

  $ped(T)= |IN(T)|r - n + 2$
- Himpunan sisi G' diluar $T_1, T_2, \dots, T_r$ adalah
  $$E^L(G') = E(G') - \bigcup_{1 \leq i \leq r} E(T_i).$$
- Himpunan bagian $E^L(G')$ yang mempunyai dua titik-titik akhir di $IN(T_i)$, dilambangkan dengan
  $$E^L_{T_i}(G') = \{uv \in E(G')/u, v \in IN(T_i), u, v \notin E(T_i)\}$$
  $$untuk\ 1 \leq i \leq r$$

Contoh 6.1:
Misalkan graf $G = K_6 \otimes P_3$ pada Gambar 3.1. Graf $G' = G - \{U_0^1U_3^1, U_1^1U_4^1, U_2^1U_5^1\}$ adalah graf beraturan-6 memuat 3 pohon perentang independen lengkap T_1*(merah)*, T_2*(biru)*, T_3*(hitam)*. Dalam hal ini,

$$IN(T_1) = \{U_0^0, U_3^0, U_0^1, U_3^1, U_0^2, U_3^2\};$$
$$IN(T_2) = \{U_1^0, U_4^0, U_1^1, U_4^1, U_1^2, U_4^2\};$$
$$IN(T_3) = \{U_2^0, U_5^0, U_2^1, U_5^1, U_2^2, U_5^2\};$$

Derajat ekstra potensial dari pohon perentang T_1 adalah
$ped(T_1) = 6(3) - 18 + 2 = 2$
Begitu juga $ped(T_2) = ped(T_3) = 2$.
Himpunan sisi G' diluar T_1, T_2, T_3 adalah
$$E^L(G') = \{U_0^2U_3^2, U_1^2U_4^2, U_2^2U_5^2\}$$
Perhatikan bahwa,
$$E^L_{T_1}(G') = \{U_0^2U_3^2\}\ dan$$
$$E^L_{T_1}(G) = \{U_0^1U_3^1, U_0^2U_3^2\}$$
Perhatikan bahwa, untuk setiap pohon perentang T, $ped(T) \geq 0$.

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

Teorema 1: Misalkan G graf terhubung dan k bilangan bulat dengan $k \geq 2$. $T_1, T_2, \dots, T_k$ pohon-pohon perentang independen lengkap pada G jhj $T_1, T_2, \dots, T_k$ pisah-sisi pada G dan $\forall\ v \in V(G)$ terdapat paling banyak satu T_i dengan $d_{T_i}(v) > 1$.

Bukti:
$\Leftarrow$
Misalkan $T_1, T_2, \dots, T_k$ pohon-pohon perentang di G pisah sisi dan $\forall\ v \in V(G)$ terdapat paling banyak satu T_i dengan $d_{T_i}(v) > 1$. Andaikan $T_1, T_2, \dots, T_k$ pohon-pohon perentang tidak independen lengkap pada G. Maka terdapat dua titik u dan v dan dua pohon perentang T_i dan T_j sedemikian hingga lintasan-lintasan dari u ke v di T_i dan T_j tidak pisah internal. Karena T_i dan T_j pisah sisi, lintasan-lintasan dari u ke v tersebut mempunyai sebuah titik persekutuan w selain u dan v . Ini berakibat, $d_{T_i}(w) > 1$ dan $d_{T_j}(w) > 1$, sebuah kontradiksi .
$\Rightarrow$
Misalkan T_1 , T_2 , …, T_k pohon-pohon perentang independen lengkap pada graf G
Berdasarkan Definisi 4, $T_1, T_2, \dots, T_k$ pohon-pohon perentang pisah sisi pada G
Andaikan ada sebuah titik w di graf G sedemikian hingga $d_{T_i}(w) > 1$ dan $d_{T_j}(w) > 1$. Ini berarti, ada paling sedikit dua sisi T_1 terkait dengan titik w. Begitu juga ada paling sedikit dua sisi T_2 terkait dengan titik w.
Misalkan v elemen $V(G)$ dan $v \neq w$. Misalkan wt_1 sisi pertama pada lintasan dari w ke v di pohon T_1 dan wt_2 sisi pertama pada lintasan dari w ke v di pohon T_2. Misalkan u_1 sebuah titik di G sedemikian lintasan dari w ke u_1 di pohon T_1 tidak memuat sisi wt_1, dan u_2 sebuah titik di G sedemikian lintasan dari w ke u_2 di pohon T_2 tidak memuat sisi wt_2. Keberadaan titik u_1 dan u_2 dijamin oleh $d_{T_1}(w) \geq 2$ dan $d_{T_2}(w) \geq 2$. Perhatikan, lintasan dari u_1 ke v di T_1 dan lintasan dari u_2 ke v di T_2 memuat titik w, maka maka $u_1 \neq u_2$.
Karena T_1 dan T_2 independen, maka lintasan dari u_1 ke v di T_1 dan lintasan dari u_1 ke v di T_2 tidak memuat titik w.
Sekarang misalkan T_1 sebagai pohon perentang di G berakar di titik w. Maka u_1 dan v terletak dalam subpohon T_1 yang sama, sedangkan u_2 dan v terletak dalam sub pohon T_1 yang berbeda. Sehingga u_1 dan u_2 terletak dalam subpohon T_1 yang berbeda. Begitu juga di T_2 . Demikian juga, jika T_2 dipandang sebagai sebuah pohon perentang G berakar di titik w, maka u_1 dan u_2 terletak dalam subpohon T_2 yang berbeda. Jadi, lintasan dari u_1 ke titik u_2 di pohon T_1 dan pohon T_2 memuat titik w sebagai titik internal, ini kontradiksi bahwa T_1 dan T_2 independen lengkap. Jadi, untuk setiap titik v di graf G, terdapat paling banyak satu T_i dengan $d_{T_i}(v) > 1$
Dengan demikian, bukti teorema lengkap. ∎
Dengan memperhatikan Definisi 5, diperoleh banyak titik dan banyak sisi produk kartesius dua graf seperti berikut

Lemma 2: Misalkan G_1 graf sederhana dengan n_1 titik dan m_1 sisi dan G_2 graf sederhana dengan n_2 titik dan m_2 sisi . Maka
(i) $|V(G_1 \otimes G_2)| = n_1n_2\ dan$
(ii) $|E(G_1 \otimes G_2)| = n_1m_2 + n_2m_1$

Bukti:
(i) Dari Definisi 5,

$V(G_1 \otimes G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$

Sehingga ,

$|V(G_1 \otimes G_2)| = |V(G_1) \times |V(G_2)|$
$= |V(G_1)| \times |V(G_2)|$
$= n_1 \times n_2$
$= n_1 n_2$

(ii) Misalkan (x,y) $\epsilon\, V(G_1 \otimes G_2)$.
Berdasarkan Definisi 5 ,

$$d_{G_1 x G_2}\big((x,y)\big) = d_{G_1}(x) + d_{G_2}(y)$$

Jumlah kedua ruas untuk semua titik (x, y) pada graf $G_1 \otimes G_2$, diperoleh

$\sum_{(x,y)\in V(G_1 \otimes G_2)} d_{G_1 \otimes G_2}\big((x,y)\big) =$
$\sum_{(x,y)\in V(G_1 \otimes G_2)} [d_{G_1}(x) + d_{G_2}(y)]$
$= |V(G_2)| \sum_{x\epsilon V(G_1)} d_{G_1}(x) + |V(G_1)| \sum_{x\epsilon V(G_2)} d_{G_2}(y)$

Dengan menerapkan Teorema Jabat Tangan (TJT) pada graf $G_1 dan\ G_2$, diperoleh

$\sum_{(x,y)\in V(G_1 \otimes G_2)} d_{G_1 x G_2}\big((x,y)\big) = 2|V(G_2)|\,|E(G_1)| + 2|V(G_1)|.\,|E(G_2)|$

Terapkan TJT pada graf $G_1 \otimes G_2$, diperoleh

$|E(G_1 \otimes G_2)| = \frac{1}{2} \sum_{(x,y)\in V(G_1 \otimes G_2)} d_{G_1 \otimes G_2}\big((x,y)\big)$
$= \frac{1}{2}\{\, 2|V(G_2)|\,|E(G_1)| + 2|V(G_1)|.\,|E(G_2)|\}$
$= |V(G_1)|\,|E(G_2)| + |V(G_2)|.\,|E(G_1)|$
$= n_1 m_2 + n_2 m_1$

Dengan demikian, bukti Lemma lengkap ■

Teorema 3: Misalkan n dan r bilangan –bilangan bulat dengan $n \geq 2$ dan $r \geq 2$. Maka terdapat r pohon perentang independen lengkap dalam graf $K_{2r} \otimes P_n$.

Bukti:

Karena$|V(K_{2r})| = 2r$; $|(E(K_{2r})| = r(2r-1)$ dan
$|V(P_n)| = n$; $|(E(P_n)| = n - 1$

maka, berdasarkan Lemma 2, diperoleh

$|V(K_{2r} \otimes P_n)| = 2nr$,dan
$|E(K_{2r} \otimes P_n)| = 2r(n-1) + n\big(r(2r-1)\big)$
$= 2n\, r^2 + nr - 2r$

Karena graf $K_{2r} \otimes P_n$ terhubung dan mempunyai $2nr$ titik, maka $K_{2r} \otimes P_n$ memuat pohon perentang dengan $2nr - 1$ sisi

Selanjutnya, untuk $1 \leq i \leq r$, pohon perentang T_i dalam graf $K_{2r}\ x\ P_n$ dikonstruksi sebagai berikut :

$$E(T_i) = E_1 \cup E_2 \cup E_3$$

dimana,

$E_1 = \{U_{i-1}^{j} U_{i-1}^{j+1}, U_{r+i-1}^{j} U_{r+i-1}^{j+1} | 0 \leq j \leq n-2\}$
$E_2 =; \{U_{i-1}^{0}\ U_{r+i-1}^{0}\}$
$E_3 = \{U_{i-1}^{j} U_{i+k}^{j}, U_{r+i-1}^{j} U_{r+i+k}^{j} | 0 \leq k \leq r-2, 0 \leq j \leq n-1\}$

Perhatikan bahwa

$|E_1| = 2(n-1) = 2n-2$; $dan\ |E_2| = 1$; $dan\ |E_3| = 2n(r-1)$

dan himpunan-himpunan E_1, E_2, E_3 pisah sisi.

Maka

$|E(T_i)| = |E_1| + |E_2| + |E_3|$
$= 2(n-1) + 1 + 2n(r-1)$
$= 2nr - 1$

Ini berarti T_i sebuah pohon perentang pada graf $K_{2r} \otimes P_n$

Perhatikan, untuk $i \neq j, 1 \leq i, j \leq r$,

$$E(T_i) \cap E(T_j) = \emptyset$$

Ini berarti , $T_1, T_2, \ldots, T_r$ pohon-pohon perentang pada graf $K_{2r} \otimes P_n$ saling pisah-sisi

Dengan konstruksi T_i seperti itu, diperoleh

$$d_{T_i}(x) = \begin{cases} r+1 > 1 & jika\ x\ \epsilon\ \{U_{i-1}^{j}, U_{r+i-1}^{j} / 0 \leq j \leq n-2 \\ r > 1\,, & jika\ x\ \epsilon\ \{U_{i-1}^{n-1}, U_{r+i-1}^{n-1}\} \\ 1, & untuk\ x\ yang\ lain \end{cases}$$

Karena hal ini berlaku untuk setiap $1 \leq i \leq r$ berakibat untuk setiap titik x pada graf $K_{2r} \otimes P_n$ terdapat paling banyak satu T_i sedemikian hingga $d_{T_i}(x) > 1$

Berdasarkan Teorema 1, disimpulkan bahwa $T_1, T_2, \ldots, T_r$ adalah pohon-pohon perentang independen lengkap pada graf

Dengan demikian, bukti teorema lengkap ■

Sebagai ilustrasi pengkonstruksian pohon-pohon perentang bebas lengkap T_1, T_2, T_3 pada graf $K_{2r} x\ P_n$ dapat dilihat pada gambar berikut. Dalam hal ini, $r = 3$ dan $n = 3$. Mengikuti pengkonstruksian T_i dalam bukti Teorema di atas, diperoleh

$E(T_1) = \{U_0^0 U_0^1, U_3^0 U_3^1, U_0^1 U_0^2, U_3^1 U_3^2\} \cup \{U_0^0 U_3^0\}$
$\cup \{U_0^0 U_1^0, U_0^0 U_2^0, U_0^1 U_1^1, U_0^1 U_2^1, U_0^2 U_1^2, U_0^2 U_2^2,$
$U_3^0 U_4^0, U_3^0 U_5^0, U_3^1 U_4^1, U_3^1 U_5^1, U_3^2 U_4^2, U_3^2 U_5^2\}$

$E(T_2) = \{U_1^0 U_1^1, U_4^0 U_4^1, U_1^1 U_1^2, U_4^1 U_4^2\} \cup \{U_1^0 U_4^0\}$
$\cup \{U_1^0 U_2^0, U_1^0 U_3^0, U_1^1 U_2^1, U_1^1 U_3^1, U_1^2 U_2^2, U_1^2 U_3^2,$
$U_4^0 U_5^0, U_4^0 U_6^0, U_4^1 U_5^1, U_4^1 U_6^1, U_4^2 U_5^2, U_4^2 U_6^2\}$

$E(T_3) = \{U_2^0 U_2^1, U_5^0 U_5^1, U_2^1 U_2^2, U_5^1 U_5^2\} \cup \{U_2^0 U_5^0\}$
$\cup \{U_2^0 U_3^0, U_2^0 U_4^0, U_2^1 U_3^1, U_2^1 U_4^1, U_2^2 U_3^2, U_2^2 U_4^2,$
$U_5^0 U_6^0, U_5^0 U_7^0, U_5^1 U_6^1, U_5^1 U_7^1, U_5^2 U_6^2, U_5^2 U_7^2\}$

Teorema 4: Graf $K_{2r} \otimes C_n$, untuk $n \geq 3$ dan $r \geq 2$, memuat r pohon-pohon perentang independen lengkap.

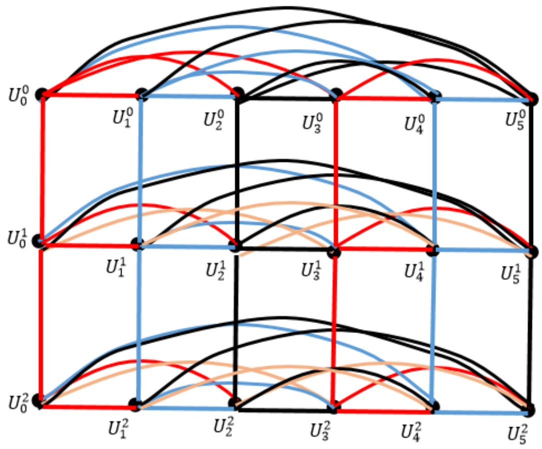
Bukti:

Karena $V(K_{2r} \otimes C_n) = V(K_{2r} \otimes P_n)$, $E(K_{2r} \otimes C_n) = E(K_{2r} \otimes P_n) \cup \{U_i^0 U_i^{n-1} / 0 \leq i \leq 2r-1\}$

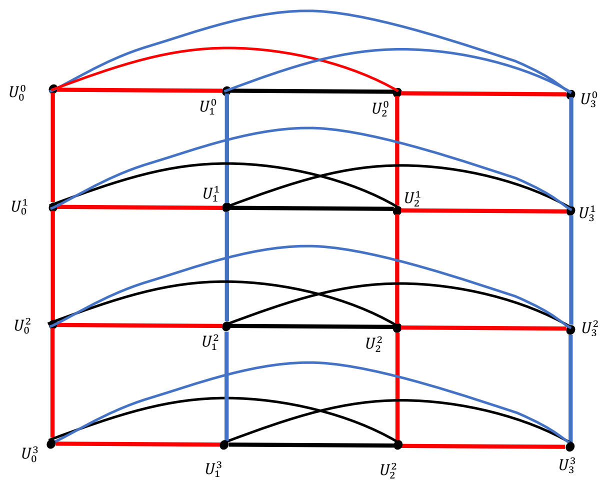
Maka $K_{2r} \otimes P_n$ adalah sebuah graf bagian perentang dari graf $K_{2r} \otimes C_n$. Sehingga setiap pohon perentang pada graf $K_{2r} \otimes P_n$ juga merupakan pohon perentang pada graf $K_{2r} \otimes C_n$

Berdasarkan Teorema 3, pohon-pohon perentang $T_1, T_2, \ldots, T_r$ independen lengkap pada graf $K_{2r} \otimes P_n$, juga independen lengkap pada graf $K_{2r} \otimes C_n$.

Dengan demikian bukti teorema lengkap ■



Pohon-pohon perentang T_1, T_2, T_3 bebas lengkap pada graf $K_6 \otimes P_3$
Gambar 3.1



T_1 dan T_2 pohon-pohon perentang indepeden lengkap pada graf $K_4 \otimes C_4$
Gambar 3.2

Lemma 5: Misalkan G graf dengan n titik, beraturan-$2r$ dan memuat sebanyak r pohon perentang $T_1, T_2, \dots, T_r$. Maka sifat-sifat berikut dipenuhi:

a) Untuk setiap $i, 1 \le i \le r, \Delta(T_i) = r + 1$
b) Untuk setiap $i, 1 \le i \le r$,
$$\left\lceil \frac{n-2}{r} \right\rceil \le |IN(T_i)| \le n - \left\lceil \frac{n-2}{r} \right\rceil (r-1)$$
c) Jika $n \equiv 0 \ (mod\ r)$ dan $r \ge 3$, maka $\forall i, 1 \le i \le r$,

$|IN(T_i)| = \frac{n}{r}$ dan $ped(T_i) = 2$
d) $|E^L(G)| = r$
e) $\sum_{i=1}^{r} |E_{T_i}^L(G)| \le r$

Bukti:

a) Misalkan $v \in V(T_i)$ untuk $i \in \{1,2, \dots, r\}$
jika v titik terminal dari T_i, maka $d_{T_i}(v) = 1$
jika v titik internal T_i, maka $d_{T_i}(v) \ge 2 \dots (1)$

Berdasarkan Teorema 1, $\forall j \ne i, 1 \le j \le r$,
$d_{T_j}(v) = 1 \quad \dots (2)$
Karena G beraturan$-2r$,
$\forall v \in V(G), d_G(v) = 2r \quad \dots (3)$
Dari (1),(2),(3), diperoleh
$$d_{T_i}(v) = d_G(v) - \sum_{j=1, j \ne i}^{r} d_{T_j}(v)$$
$$= 2r - (r-1)$$
$$= r + 1$$
Dengan demikian,
$$\Delta(T_i) = d_{T_i}(v) = r + 1 \qquad \blacksquare$$

b) Karena T_i pohon-pohon perentang di G dengan n titik,
maka $|V(T_i)| = |V(G)| = n$
dan
$$|E(T_i)| = |V(T_i)| - 1 = n - 1$$
Berdasarkan Teorema Jabat-Tangan,
$\sum_{v \in V(T_i)} d_{T_i}(v) = 2|E(T_i)|$
$= 2(n-1)$
$= 2n - 2 \quad \dots (4)$
Karena
$\sum_{v \in V(T_i)} d_{T_i}(v) = \sum_{v \in IN(T_i)} d_{T_i}(v) + \sum_{v \in V(T_i) - IN(T_i)} d_{T_i}(v) \le |IN(T_i)| \Delta(T_i) + \sum_{v \in V(T_i) - IN(T_i)} 1$
$= |IN(T_i)|(r+1) + |V(T_i) - IN(T_i)|$
(berdasarkan sifat (a))
$= |IN(T_i)|(r+1) + |V(T_i)| - |IN(T_i)|$
$= |IN(T_i)|\, r + n \quad \dots (5)$
Dari (4) dan (5) diperoleh
$$2n - 2 \le |IN(T_i)|\, r + n$$
ekuivalen dengan
$$|IN(T_i)| \ge \frac{n-2}{r}$$
Karena $|IN(T_i)|$ bilangan bulat, maka
$$|IN(T_i)| \ge \left\lceil \frac{n-2}{r} \right\rceil \quad \dots (6)$$
Karena $T_1, T_2, \dots, T_r$ independen lengkap, berdasarkan Teorema 1,
$$\sum_{i=1}^{r} |IN(T_i)| \le n,$$
Sehingga
$|IN(T_i)| \le n - \sum_{j=1, j \ne i}^{r} IN(T_i)$
$\le n - \sum_{j=1, j \ne i}^{r} \left\lceil \frac{n-2}{r} \right\rceil$
$= n - \left\lceil \frac{n-2}{r} \right\rceil (r-1) \quad \dots \quad (7)$
Dari (6) dan (7), disimpulkan
$$\left\lceil \frac{n-2}{r} \right\rceil \le |IN(T_i)| \le n - \left\lceil \frac{n-2}{r} \right\rceil (r-1) \qquad \blacksquare$$

c) Andaikan $|IN(T_i)| \le \frac{n}{r} - 1$, maka berdasarkan Definisi 6,
$$ped(T_i) = |IN(T_i)|r - n + 2 \le \left(\frac{n}{r} - 1\right) rn + 2$$

$= 2 - r$

< 0 ($karena\ r \geq 3$)

Kontradiksi . Akibatnya

$|IN(T_i)| \geq \frac{n}{r}$ … (8)

Karena $n \equiv 0$ (mod r) dan $r \geq 3$, maka

$\left\lceil \frac{n-2}{r} \right\rceil = \frac{n}{r}$

Sehingga dari (b) diperoleh

$|IN(T_i)| \leq n - \left\lceil \frac{n-2}{r} \right\rceil (r-1)$

$= n - (\frac{n}{r})(r-1)$

$= \frac{n}{r}$ … (9)

Dari (8) dan (9) disimpulkan

$|IN(T_i)| = \frac{n}{r}$

Selanjutnya, berdasarkan Definisi 6,

$ped(T_i) = |IN(T_i)|r - n + 2$

$= \frac{n}{r}.r - n + 2$

$= 2$ ■

d) Karena $\forall i, 1 \leq i \leq r, |E(T_i)| = n - 1$, maka

$\sum_{i=1}^{r} |E(T_i)| = r(n-1)$ … (10)

Karena G beraturan-$2r$ dengan n titik,
Maka $\sum_{v \in V(G)}^{r} d_G(v) = 2rn$,

Sehingga, berdasarkan Teorema Jabat Tangan,

$|E(G)| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)}^{r} d(v) = rn$ … (11)

Dari (10) dan (11) diperoleh

$|E^L(G)| = |E(G)|$-$\sum_{i=1}^{r} |E(T_i)|$

$= rn - r(n-1) = r$ ■

(e) Karena setiap sisi dari $E_{T_i}^L(G)$ juga berada dalam $E^L(G)$ dan setiap sisi dari $E^L(G)$ berada dalam paling banyak satu himpunan $E_{T_i}^L(G)$ untuk suatu bilangan bulat i, maka dari sifat (d), diperoleh

$$\sum_{i=1}^{r} |E_{T_i}^L(G)| \leq r$$

Dengan demikian, bukti Lemma lengkap ■

Lemma 6: Misalkan G graf beraturan-$2r$ dengan n titik memuat r pohon perentang independen lengkap $T_1, T_2, \ldots, T_r$ .Maka untuk setiap i, $1 \leq i \leq r$, dan setiap sisi e di $E_{T_i}^L(G)$,titik-titik akhir sisi e berderajat paling banyak r di T_i . Lebih jauh $ped(T_i) \geq 2|E_{T_i}^L(G)|$.

Bukti:

Karena setiap sisi $e = uv \in E_{T_i}^L(G), u\ dan\ v$ masing-masing merupakan titik internal T_i , maka derajat titik u dan titik v di pohon perentang T_i tidak lebih dari r. Akibatnya, $ped(T_i) \geq 2|E_{T_i}^L(G)|$.

Dengan demikian, Lemma terbukti ■

Lemma 7: Misalkan G graf beraturan-$2r$ dengan n titik memuat r pohon perentang independen lengkap $T_1, T_2, \ldots, T_r$. Maka ada pohon perentang T_i untuk suatu i, $1 \leq i \leq r$ memenuhi sifat berikut :

a) $|IN(T_i)| \leq \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor$

b) $ped(T_i) \leq 2$ dan $|E_{T_i}^L(G)| \leq 1$, dengan "ketaksamaan tegas "dipenuhi jika r tidak membagi n.

Bukti:

a) Karena $T_1, T_2, \ldots, T_r$ pohon-pohon perentang independen lengkap di graf G dan banyak titik G adalah n, berdasarkan Teorema 1,

$\sum_{i=1}^{r} |IN(T_i)| \leq n$ ... (1)

Andaikan, $\forall i, 1 \leq i \leq r, |IN(T_i)| \geq \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor + 1$,
Maka

$\sum_{i=1}^{r} |IN(T_i)| \geq r\left(\left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor + 1\right) > n$,

dan ini kontradiksi dengan (1).

b) Karena dari (a) , $|IN(T_i)| \leq \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor$, maka berdasar Definisi 6,

$ped(T_i) \leq r\left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor - n + 2 \leq 2$ … (2)

Selanjutnya, dibuktikan $|E_{T_i}^L(G)| \leq 1$.
Andaikan $|E_{T_i}^L(G)| \geq 2$. Maka, berdasarkan Lemma 6,

$ped(T_i) \geq 2|E_{T_i}^L(G)| \geq 4$,

kontrakdiksi dengan (2).

Akibatnya, $|E_{T_i}^L(G)| < 2$ dan karena $|E_{T_i}^L(G)|$ adalah bilangan bulat , maka $|E_{T_i}^L(G)| \leq 1$.

Perhatikan (2) , jika $n \not\equiv 0$ ($mod\ r$), maka

$r\left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor - n + 2 < 2$, sehingga

$ped(T_i) < 2$

Sehingga ketaksamaan dipenuhi jika n bukan kelipatan r atau $n \not\equiv 0$ ($mod\ r$).

Dengan demikian bukti Lemma lengkap ■

Ingat kembali graf $K_m \otimes C_n$ dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 3$.

Untuk $j \in \{0,1, \ldots, n-1\}$, subgraf K^j yang dibangun oleh himpunan titik $\{U_i^j / 0 \leq i \leq m-1\}$ adalah graf Komplet dengan n titik dan selanjutnya disebut salinan-K . Dalam mempelajari distribusi dari titik-titik internal dari pohon-pohon perentang dalam salinan-K tersebut, misalkan untuk suatu pohon perentang T di $K_m \otimes C_n$,

$V_j(T) = IN(T) \cap V(K^j)$

dan $|V_j(T)| = n_j(T)$

Lemma 8: Misalkan $a_i(T)$ menyatakan banyak salinan-K yang memuat tepat i titik internal T. Distribusi titik-titik internal dalam salinan-K yang berbeda adalah sebagai berikut :

a) Jika $n_j(T) \geq k$, untuk suatu j, maka $|E_T^L(K_{2r-1} x\ C_n)| \geq \frac{1}{2}(k-1)(k-2)$,
b) $n_j(T) < 4, \forall j, 0 \leq j \leq n-1$
c) $a_3(T) \leq 1$
d) Jika $a_3(T) = 1$, maka $n \equiv 0(mod\ r)$ dan $n \geq r$.
e) Jika $a_0(T) = 0$, maka
$$a_3(T) \leq a_1(T) - \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil;$$
khususnya
$$a_1(T) > a_3(T)\ dan\ a_1(T) \geq \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil$$

Bukti:

a) Ingat bahwa, banyak sisi graf Komplet dengan k titik adalah $\frac{1}{2}k(k-1)$ dan hanya sebanyak $k-1$ dari sisi-sisi tersebut terletak dalam T, sehingga
$|E_T^L(K_{2r-1} \otimes C_n)| \geq \frac{1}{2}k(k-1)(k-1)$
$= \frac{1}{2}(k-1)(k-2)$
b) dan c). Andaikan $n_j(T) \geq 4$ untuk suatu $j, 0 \leq j \leq n-1$
atau $a_3(T) > 1$
Berdasarkan sifat a),
$|E_T^L(K_{2r-1} \otimes C_n)| \geq \frac{1}{2}(3)(2) = 3$;
kontradiksi dengan Lemma 7(b)

d) Karena $ped(T_i) \leq \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil r - n + 2$, maka $|E_T^L(K_{2r-1} \otimes C_n)| < 1$ saat $n \not\equiv 0(mod\ r)$.
e) Dari (b), diperoleh
$|IN(T)| = a_1(T) + 2a_2(T) + 3a_3(T)$

dan
$$a_2(T) = n - a_1(T) - a_3(T).$$
Sehingga,
$$|IN(T)| = a_1(T) + 2(n - a_1(T) - a_3(T) + 3a_3(T) \leq 2n - \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil$$

Maka
$$a_3(T) \leq a_1(T) - \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil,$$
dan akibatnya,
$$a_1(T) > a_3(T)\ dan\ a_1(T) \geq \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil.$$

Dengan demikian, bukti Lemma lengkap ∎

Perhatikan bahwa, jika graf G memuat r pohon perentang independen lengkap $T_1, \ldots, T_r$,maka untuk setiap $i, 1 \leq i \leq r$, setiap titik G berhubungan langsung dengan sebuah titik internal T_i.

Teorema 9: Misalkan n , r dua bilangan asli dengan $n \geq 3$ dan $r \geq 6$. Maka graf $K_{2r-1} \otimes C_n$ tidak memuat r pohon-pohon perentang independen lengkap.

Bukti:

Andaikan graf $K_{2r-1} \otimes C_n$ memuat r pohon perentang independen lengkap. Berdasarkan Lemma 7, misalkan T sebuah pohon perentang yang memenuhi

(i) $|IN(T_i)| \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, dan
(ii) $ped(T_i) \leq 2$ dan $|E_{T_i}^L(G)| \leq 1$, dengan "ketaksamaan tegas "dipenuhi jika r tidak membagi n.

jika sebuah salinan-K K^i , $1 \leq i \leq n$, tidak memuat titik internal T , maka
$$n_{i-1}(T) + n_{i+1}(T) \geq 2r - 1 \geq 11$$
Akibatnya,
$$n_{i-1}(T) \geq 6 \text{ atau } n_{i+1}(T) \geq 6,$$
Ini kontradiksi dengan Lemma 8(b)
Sehingga $a_0(T) = 0$.

Karena n > r , maka dari Lemma 8(e) ,
$$a_1(T) \geq \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil \geq 1.$$
Sehingga, terdapat bilangan bulat , $0 \geq i \geq n-1$, sedemikian hingga $n_i = 1$. Misalkan u titik tunggal di $V_i(T)$. Titik u di T berhubungan langsung dengan sebuah titik dari $V_{i-1}(T) \cup V_{i+1}(T)$ dan $d_T(u) \leq r+1$. Maka u berhubungan langsung di T dengan paling banyak r titik di $V(K^i)$. Sehingga , paling sedikit $r - 2 \geq 4$ tidak berhubungan langsung di T ke titik u. Oleh karena itu, $r-2$ titik-titik berhubungan langsung di T ke titik-titik di $V_{i-1}(T) \cup V_{i+1}(T)$ dan akibatnya,
$$n_{i-1}(T) + n_{i+1}(T) \geq 5$$
Jadi ,
$$n_{i-1}(T) \geq 3 \text{ atau } n_{i+1}(T) \geq 3$$
Tanpa menghilangkan keumuman, misal $n_{i+1}(T) \geq 3$.
Berdasarkan Lemma 8(b) , $n_{i+1}(T) \leq 3$, sehingga
Dari Lemma 8(c) , diperoleh $a_3(T) = 1$, sehingga dari Lemma 8(e) , diperoleh $a_1(T) \geq 2$.
Misalkan $\neq i$, sedemikian hingga $n_j(T) = 1$. Dengan argumen yang sama dengan sebelumnya, diperoleh $n_{j-1}(T) \geq 3$ atau $n_{j+1}(T) \geq 3$. Karena $a_3(T) = 1$, maka $j = i + 2$. Artinya , kedua salinan-K dengan satu titik internal berhubungan langsung ke salinan-K. Selanjutnya, misalkan v titik tunggal di $V_j(T)$. Salah satu titik dari $u\ dan\ v$ berhubungan langsung di T dengan dua titik internal. Tanpa menghilangkan keumuman, misal titik u berhubungan langsung di T dengan dua titik internal. Jadi u berhubungan langsung di T dengan paling banyak $r-1$ titik di $V(K^i)$. Sehingga , terdapat paling sedikit $r - 1 \geq 5$ titik tidak

berhubungan langsung di T dengan titik u. Oleh karena itu, terdapat paling sedikit 5 titik berhubungan langsung di T dengan titik-titik di $V_{i-1}(T) \cup V_{i+1}(T)$, maka

$$n_{i-1}(T) + n_{i+1}(T) \geq 7$$

Akibatnya,

$$n_{i-1}(T) \geq 4 \text{ atau } n_{i+1}(T) \geq 4$$

ini kontradiksi dengan Lemma 8(b).
Dengan demikian , bukti teorema lengkap ■

3. PENUTUP

SIMPULAN

Dari pembahasan dapat disimpulkan:

1. $T_1, T_2, \dots, T_k$ pohon-pohon perentang independen lengkap pada G jhj T_1, T_2, …, T_k pisah-sisi pada G dan $\forall\ v \in V(G)$ terdapat paling banyak satu T_i dengan $d_{T_i}\ (v) > 1$.
2. Terdapat r pohon perentang independen lengkap dalam graf $K_{2r} \otimes P_n$.
3. Begitu juga dengan graf $K_{2r} \otimes C_n$ terdapat r pohon-pohon perentang independen lengkap.
4. Namun, graf $K_{2r-1} \otimes C_n$ ternyata tidak memuat r pohon perentang yang independen lengkap.

SARAN

Dari produk Kartesius graf $K_{2r} \otimes P_n$ dan $K_{2r} \otimes C_n$ dapat mengetahui pohon perentang pada beberapa graf dan menarik untuk diteliti lebih lanjut mengenai pohon perentang yang independen lengkap selain graf tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

Budayasa. I. K. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press.

Darties. D, Gastineau. N, Togni. O. *Completely independent spanning trees in some regular graphs.* Discrete Applied Mathematics. 217 (2017) 163-174.

R.Eka. S, Rahadjeng. B. 2014. *Dimensi metrik pada graf lintasan, graf komplit, graf sikel, graf bintang dan graf bipartit komplit.*Surabaya:MATHunesa.

T.Hasunuma, *Completely independent spanning trees in the underlying graph of line graph*. Discrete Mathematics. 234 (2001) 149-157.

T.Hasunuma, *Completely independent spanning trees ini maximal planar graphs.* Lecture Notes in Compute. Sci. 2573(2002) 235-245

T.Hasunuma, C.Morisaka. *Completely independent spanning trees in torus network.* Network 60(2012) 56-69.