MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115

Volume 10 No 01
Tahun 2022

PENENTUAN HARGA OPSI SAHAM KARYAWAN DENGAN MEMPERHITUNGKAN RISIKO PEMUTUSAN HUBUNGAN KERJA MENGGUNAKAN *LEVY-EXPONENTIAL PROCESS*

Abdulloh Habib
Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia
email : abdulloh.18009@mhs.unesa.ac.id

Rudianto Artiono
Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia
Penulis Korespondensi : rudiantoartiono@ unesa.ac.id

Abstrak

Opsi saham merupakan kontrak antara penjual opsi (*writer*) dan pembeli opsi (*holder*) untuk membeli atau menjual saham pada harga yang telah disepakati saat atau sebelum tanggal tertentu. Terdapat dua jenis kontrak opsi saham, yaitu *call option* dan *put option.* Ditinjau dari waktu pelaksanaan opsi (*exercise*), ada dua jenis opsi yaitu opsi gaya Eropa dan opsi gaya Amerika. Perbedaan dari dua jenis opsi tersebut berada pada proses pelaksanaan opsinya. Opsi saham karyawan (OSK) adalah *call option* yang diberikan oleh perusahaan kepada sekelompok karyawan dari saham perusahaan. Opsi ini dilaksanakan pada harga pelaksanaan tertentu (*exercise price*) setelah melalui periode tertentu (*vesting period*) dan memiliki batas waktu tertentu (*maturity time*). Artikel ini bertujuan untuk menentukan nilai opsi saham karyawan dengan memperhitungkan risiko pemutusan hubungan kerja. Pergerakan harga saham dimodelkan dengan metode *levy-exponential process.* Batas *exercise* optimal pemegang dan harga OSK ditentukan dengan menyelesaikan pertidaksamaan variasi integro-diferensial parsial tak homogen (PIDVI). Peneliti juga menerapkan transformasi Fourier untuk menyederhanakan pertidaksamaan variasi. Penelitian ini menghasilkan kesimpulan bahwa risiko pemutusan hubungan kerja yang lebih tinggi mendorong pemegang OSK untuk secara sukarela mempercepat *exercise* yang pada gilirannya mengurangi beban biaya bagi perusahaan dan telah dapat menentukan harga opsi saham karyawan yang memperhitungkan risiko pemutusan hubungan kerja menggunakan *levy-exponential process.*
Kata Kunci: Opsi Saham Karyawan, Pemutusan Hubungan Kerja, *Levy-exponential Process*, Transformasi Fourier.

Abstract

A stock option is a contract between an option seller (writer) and an option buyer (holder) to buy or sell shares at an agreed price on or before a certain date. There are two types of stock option contracts, namely call options and put options. Judging from the exercise time, there are two types of options, namely European-style options and American-style options. The difference between the two types of options is in the process of implementing the options. Employee stock options (ESO) are call options granted by a company to a group of employees of the company's stock. This option is exercised at a certain exercise price after a certain period (vesting period) and has a certain time limit (maturity time). This article aims to determine the value of employee stock options by taking into account the risk of termination of employment. Stock price movements are modeled using the levy-exponential process method. The holder's optimal exercise limit and ESO price are determined by solving the inhomogeneous partial integro-differential variation (PIDVI) inequality. The researcher also applies the Fourier transform to simplify the variation inequalities. This study concludes that the higher risk of termination of employment encourages OSK holders to voluntarily accelerate the exercise which in turn reduces the cost burden for the company and has been able to determine the price of employee stock options that takes into account the risk of termination of employment using the levy-exponential process.
Keywords: *Employee Stock Options, Termination of Employment, Levy-exponential Process, Fourier Transform.*

PENDAHULUAN

Di era ekonomi global saat ini, banyak perusahaan berusaha keras untuk memenangkan persaingan dengan memunculkan ide-ide baru yang kreatif dan inovatif. Perusahaan-perusahaan tersebut juga perlu menerapkan kebijakan yang dapat meningkatkan kinerja karyawan sehingga dapat bersaing dengan perusahaan lain. Salah satunya adalah meningkatkan kinerja pegawai dengan memberikan kompensasi selain gaji pokok. Misalnya program pemberian opsi saham bagi karyawan atau lebih dikenal dengan sebutanopsi saham karyawan (OSK) (Menawati, N. M. W., & Astika, I. B. P., 2017).

Opsi saham merupakan kontrak antara penjual opsi (*writer*) dan pembeli opsi (*holder*), di mana seorang *writer* menjamin adanya hak dari *holder* untuk membeli atau menjual saham pada harga yang telah disepakati saat atau sebelum tanggal tertentu. (Gusnela, N., & Ahmad, D., 2020). Ada dua jenis kontrak opsi saham, yakni *call option* dan *put option*. *Call option* adalah jenis kontrak yang memberi hak untuk membeli aset dengan harga yang disepakati dan dalam kurun waktu tertentu. Sedangkan, *put option* adalah jenis kontrak yang memberikan hak untuk menjual aset dengan harga yang disepakati dan dalam kurun waktu tertentu (Wahyuni, E., Lestari, R., & Syafwan, M., 2017).

Ditinjau dari waktu pelaksanaan opsi, ada dua jenis opsi yaitu opsi gaya Eropa dan opsi gaya Amerika. Dalam opsi gaya Eropa, OSK hanya dapat dilaksanakan saat *vesting period* berakhir atau saat jatuh tempo. Pada opsi tipe Amerika, OSK dapat dilaksanakan kapan saja hingga tanggal jatuh tempo tiba. (Subartini, B., Riaman, R., Nabiilah, N., & Sukono, S., 2021). Opsi saham karyawan (OSK) adalah *call option* yang diberikan oleh perusahaan kepada sekelompok karyawan dari saham perusahaan. Opsi ini dilaksanakan pada harga pelaksanaan tertentu (*exercise price*) setelah melalui periode tertentu (*vesting period*) dan memiliki batas waktu tertentu (*maturity time*) (Emli Rahmi, 2017). OSK memberi keuntungan yang signifikan bagi perusahaan karena dapat menarik dan mempertahankan karyawan yang berprestasi, menciptakan lebih banyak karyawan yang rela berkorban demi kesuksesan perusahaan, serta biayanya efisien bagi perusahaan-perusahaan kecil untuk bersaing dengan perusahaan-perusahaan besar (Erwinna Chendra, 2016).

Dalam rangka mempertahankan efek insentif, perusahaan secara umum memberlakukan fitur *vesting period* yang melarang karyawan untuk menggunakan opsi tersebut. Jika selama *vesting period* karyawan meninggalkan perusahaan maka akan mengakibatkan hilangnya nilai opsi (opsi menjadi tidak berharga). Setelah *vesting period*, ketika karyawan meninggalkan perusahaan, OSK akan kedaluwarsa meskipun karyawan dapat memilih untuk melakukan *exercise* terlebih dahulu jika opsinya menguntungkan (Leung, T., & Wan, H. , 2015).

Artikel ini membahas tentang kerangka kerja penentuan OSK yang menggabungkan fitur umum OSK dari *vesting period*, *early exercise* dan *job termination risk*, serta mempertimbangkan dinamika lonjakan harga saham yang berbeda. Secara khusus, peneliti memodelkan terjadinya *employement-shock* yang dipengaruhi proses lonjakan eksogen, dan merumuskan OSK tipe Amerika sebagai masalah penghentian optimal dengan kemungkinan pemaksaan *exercise* sebelum tanggal kedaluwarsa. Berbeda dengan penelitian lainnya yang menggunakan kerangka *Brownian motion*, pada penelitian ini *levy-exponenetial process* dipilih untuk memodelkan harga opsi saham karyawan. Dengan asumsi perbedaan intensitas pemutusan hubungan kerja (konstan atau stokastik), masalah batas bebas yang sesuai akan dianalisis sebagai pertidaksamaan variasi integro-diferensial parsial tak homogen (PIDVI).

Dalam rangka menentukan nilai OSK dan batas exercise, peneliti menerapkan metode *Fourier Transform*, di mana pertidaksamaan variasi integro-diferensial parsial tak homogen yang terkait disederhanakan dengan transformasi Fourier dan harga optimal exercise ditentukan untuk setiap waktu tertentu. Selain itu, struktur variasi PIDVI yang tidak homogen bervariasi tergantung pada spesifikasi intensitas perbedaan pemutusan hubungan kerja. Secara khusus, jika intensitasnya itu *affine* pada harga saham, maka *partial integro-differential equation* (PIDE) tak homogen untuk OSK pada daaerah kontinu dapat disederhanakan menjadi persamaan diferensial parsial tak homogen. Dalam kasus intensitas konstan, PIDE terkait dapat diubah menjadi ODE. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan harga opsi saham karyawan dengan memperhitungkan risiko pemutusan hubungan kerja menggunakan *levy-exponential process*.

KAJIAN TEORI

1. PROSES *LEVY*

Proses stokastik $\{ X_t, t \geq : 0\}$ pada ruang ruang probabilitas $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ adalah proses *Levy* jika kondisi berikut dipenuhi

1. $X_0 = 0$.

2. Untuk $n \geq 1$, dan $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$, vektor acak $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n}, X_{t_{n-1}}$ saling bebas (sifat inkremen bebas).
3. Sebaran dari $X_{s+t} - X_s$, tidak tergantung pada s (sifat inkremen stasioner).
4. Terclapat $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ dengan $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ sehingga untuk setiap $\omega \in \Omega_0, X_t(\omega)$ kontinu kanan pada $t \geq 0$ dan mempunyai limit kiri pada $t < 0$ (sifat 'cadlag') (Budiarti, R., & Purnaba, I., 2013).

2. TRANSFORMASI FOURIER

Misalkan $f(x)$ adalah suatu fungsi real yang kontinu pada selang interval $(-\infty, \infty)$ yang memenuhi $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$, maka transformasi fourier dari $f(x)$ dapat didefinisikan sebagai:

$$F(f(x))(v) = \tilde{f}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ivx} dv$$

Jika $f(x)$ adalah fungsi *square integrable*, maka inverse transformasi Fourier dari $\tilde{f}(v)$ dapat didefinisikan sebagai

$$F^{-1}\left(\tilde{f}(v)\right) = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(v) e^{-ivx} dv$$

(Chairunnnisa, U. H., Hoyyi, A., & Yasin, H. 2021)

METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini yakni pertama menjabarkan formulasi model yang akan digunakan yakni model *levy-exponential process*, kemudian dilanjutkan dengan penilaian OSK untuk mendapatkan pertidaksamaan variasi integro-diferensial parsial tak homogen (PIDVI), dan juga memaparkan batas *exercise* bagi pemegang opsi saham. Setelah itu, didapatkan PIDE tak homogen asli yang kemudian ditransformasikan menjadi ODE homogen. Dengan menerapkan transformasi fourier, peneliti menentukan harga OSK.

1. FORMULASI MODEL

Pada dasarnya, peneliti mendefinisikan ruang probabilitas $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ yang memenuhi kondisi kontinuitas dan kelengkapan sejati, di mana $\mathbb{P}$ adalah ukuran probabilitas historis. Misalkan $(X_t)_{t\geq 0}$ adalah proses *Levy*, yang menerima dekomposisi *Levy–Ito* sebagai berikut:

$$X_t = \mu t + \sigma B_t + X_t^l + \lim_{\epsilon \to 0} X_t^{\epsilon}, \qquad X_0 = 0$$

(Sato, 1999, p. 119)

di mana B adalah gerak *Brown* standar di bawah $\mathbb{P}$, dan diberikan aturan *jump* berikut,

$$X_t^l = \int_{|y|\geq 1, s\in[0,t]} yJ(dy, ds) \tag{1}$$

$$X_t^{\epsilon} = \int_{\epsilon \leq |y| < 1, s \in [0,t]} y(J(dy, ds) - v(dy)ds)$$

$$= \int_{\epsilon \leq |y| < 1, s \in [0,t]} y\tilde{J}(dy, ds) \tag{2}$$

Karakteristik rangkap tiga (μ, σ^2, v) dari X mencakup konstanta $drift\ (\mu)$ dan $volatility\ (\sigma)$, bersama dengan ukuran *Levy* v. Dalam (1) dan (2), pengukuran stokastik Poisson $J(dy, ds)$ menghitung jumlah lonjakan ukuran y yang terjadi pada saat ke-s, dan $\tilde{J}$ adalah *associated compensator*.

Karakteristik eksponen $\Psi(\omega)$ dari X diberikan oleh rumus *L'evykhintchine* sebagai berikut:

$$\Psi(\omega) = i\mu\omega - \tfrac{1}{2}\sigma^2\omega^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i\omega y} - 1 - iy\omega \mathrm{I}_{\{|y|<1\}}\right) v(dy), \ \omega \in \mathbb{C} \tag{3}$$

(Sato, 1999, hal 119.)

Dengan ini, fungsi karakteristik dari X_t adalah

$$\emptyset X_t(\omega) = e^{\Psi(\omega)t}$$

Peneliti menunjukkan $\mathbb{F}^X = (\mathcal{F}_t^X)_{t\geq 0}$ sebagai filtrasi yang dihasilkan oleh X. Harga saham perusahaan dimodelkan oleh *levy-exponential process* sebagai berikut.

$$S_t = S_0 e^{X_t}, \ \ t \geq 0$$

dengan harga saham perdana konstan $S_0 > 0$. Selain itu, peneliti mengasumsikan tingkat suku bunga konstan positif r dan tingkat dividen q non-negatif. Untuk penilaian OSK, peneliti menggunakan risiko-netral harga ukuran $\mathbb{Q}$ sehingga didapat

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\{e^{X_1}\} = e^{r-q} \Leftrightarrow \hat{\Psi}(-i) = r - q$$

di mana $\hat{\Psi}$ diberikan pada (3) dengan μ diganti dengan,

$$\hat{\mu} = r - q - \frac{\sigma^2}{2} - \int_{\mathbb{R}} \left(e^y - 1 - y\mathrm{I}_{\{|y|<1\}}\right) \hat{v}(dy) \tag{4}$$

dan $\hat{v}$ adalah ukuran levy dibawah $\mathbb{Q}$.

2. PENILAIAN OSK

Nilai dari OSK vested pada waktu $t \in [t_v, T]$ didefinisikan oleh

$$C(t,x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{I}_{t,T}} \mathbb{E}_{t,x}^{\mathbb{Q}} \left\{ e^{-r(\tau\wedge\tau^{\lambda} - t)} \left(S_0 e^{X_{\tau\wedge\tau^{\lambda}}} - K\right)^+ \right\} \tag{5}$$

$$= \sup_{\tau \in \mathfrak{I}_{t,T}} \mathbb{E}_{t,x}^{\mathbb{Q}} \{ e^{-(r+\lambda)(\tau - t)} (S_0 e^{X_\tau} - K)^+ + \int_t^{\tau} e^{-(r+\lambda)(u-t)} \lambda (S_0 e^{X_u} - K)^+ du \}, \tag{6}$$

di mana $\mathfrak{I}_{t,T}$ adalah himpunan $\mathbb{F}^X$ waktu berhenti mengambil nilai dalam $[t, T\ ]$, dan $\mathbb{E}_{t,x}^{\mathbb{Q}}\{\cdot\}$ mewakili ekspektasi bersyarat dengan $X_t = x$. Dengan kata lain, setelah *vesting period*, para karyawan menghadapi masalah pemutusan hubungan kerja yang sama dengan opsi *call* tipe Amerika, namun harus melakukan *early exercise* karena pemutusan hubungan kerja secara tiba-tiba. Dari (6), peneliti juga dapat menafsirkan *vested* OSK sebagai pilihan opsi *call* tipe Amerika dengan arus kas mulai dari $\lambda(S_0 e^{X_t} - K)^+$ hingga waktu exercise τ^λ.

Selama *vesting peirod*, OSK akan hangus jika karyawan tersebut keluar dari perusahaan. Oleh karena itu, OSK masih ada pada waktu $t \le t_v$, nilai OSK yang belum dimanfaatkan adalah

$$\tilde{C}(t,x) = \mathbb{E}_{t,x}^{\mathbb{Q}}\left\{e^{-r(t_v-t)}C\left(t_v, X_{t_v}\right)I_{\{\tau^{\tilde{\lambda}}>t_v\}}\right\}$$
$$= \mathbb{E}_{t,x}^{\mathbb{Q}}\left\{e^{-(r+\lambda)(t_v-t)}C\left(t_v, X_{t_v}\right)\right\}, \quad (7)$$

Fitur *vesting period* melarang karyawan untuk menggunakan opsi bahkan jika OSK dalam kondisi *in the money* untuk $[0, t_v)$. Penilaian OSK menghasilkan studi analitik dan numerik dari ketidaksetaraan variasi integro-diferensial parsial yang tak homogen (PIDVI). Untuk itu, pertama-tama peneliti mendefinisikan generator kecil X di bawah $\mathbb{Q}$ yaitu

$$\hat{\mathcal{L}}f(x) = \hat{\mu}f'(x) + \frac{\sigma^2}{2}f''(x) + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}\big(f(x+y) - f(x) - yf'(x)I_{\{|y|<1\}}\big)\,\hat{v}\,(dy) \quad (8)$$

dengan $\hat{\mu}$ diberikan pada (4). Untuk harga OSK yang *vested,* risiko pemutusan hubungan kerja menimbulkan istilah homogen dalam PIDVI, yaitu,

$$\min\left\{-\left(\partial_t + \hat{\mathcal{L}}\right)C + (r+\lambda)C - \lambda(S_0 e^x - K)^+, C(t,x) - (S_0 e^x - K)^+\right\} = 0 \quad (9)$$

dengan kondisi terminal yakni

$$C(T,x) = (S_0 e^x - K)^+, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Untuk harga OSK yang belum direalisasi, diatur kondisi terminal pada waktu t_v dengan membandingkan harga OSK yang dihasilkan, yaitu $\tilde{C}(t_v, x) = C(t_v, x)$, untuk $x \in \mathbb{R}$. Selama *vesting period,* harga OSK yang belum diperoleh memenuhi persamaan integro-diferensial parsial (PIDE)

$$\left(\partial_t + \hat{\mathcal{L}}\right)\tilde{C} - \left(r + \tilde{\lambda}\right)\tilde{C} = 0, \;\; (t,x) \in [o, t_v) \times \mathbb{R} \quad (10)$$

Ketika *vesting period* bertepatan dengan waktu kedaluwarsa, OSK akan menjadi opsi tipe Eropa karena implementasi awal tidak diperbolehkan. Parameter $t_v = T$ menghasilkan harga OSK tipe Eropa

$$\tilde{C}^E(t,x) = \mathbb{E}_{t,x}^{\mathbb{Q}}\left\{e^{-r(T-t)}(S_0 e^{X_T} - K)^+ 1_{\{\tau^{\tilde{\lambda}}>T\}}\right\}$$

di mana $0 \le t \le T$

fungsi biaya ini juga memenuhi PIDE (10).

3. BATAS EXERCISE

Untuk OSK yang diperoleh, strategi *excercise* pemegang dapat digambarkan dengan batas *excercise* yang optimal $t \mapsto s^*(t)$ yang membagi domain $[t_v, T) \times R$ menjadi daerah lanjutan $\mathscr{b}$ dan daerah *exercise* $\mathscr{g}$, yang ditentukan oleh

$$\mathscr{b} = \{(t,s) \in [t_v, T) \times \mathbb{R}_+, s < s^*(t)\}$$
$$\mathscr{g} = \{(t,s) \in [t_v, T) \times \mathbb{R}_+, s \ge s^*(t)\}$$

di mana

$$s^*(t) := sup\{s \ge 0 \,|C(t,x) > (s-K)^+\}, \quad (11)$$

untuk $t \in [t_v, T)$.

Jika $s^*(t) < +\infty$, maka didapat

$$C(t,x) > (s-K)^+, \qquad untuk\ s < s^*(t),$$
$$C(t,x) = (s-K)^+, \qquad untuk\ s \ge s^*(t),$$

Diperoleh $s = S_0 e^x \in (s^*(t), +\infty)$ karena konveksitas dan kepositifan $C(t,x)$. Hal ini karena untuk setiap konstanta $x \in \mathbb{R}, C(t,x)$ berkurang sesuai dengan t, batas *exercise* optimal $s^*(t)$ harus berkurang sesuai dengan t tertentu di persamaan (11).

Hasil serupa juga diperoleh ketika menggunakan model *Geometry Brownian Motion* (GBM) oleh Leung dan Sircar (2009). Peneliti mengklaim bahwa efek pengurangan biaya dari intensitas pemutusan hubungan kerja pasca-vesting berlaku dengan dan tanpa dividen. Namun, untuk $q = 0$, pemutusan hubungan kerja tidak mempengaruhi waktu *exercise* sukarela karyawan karena tidak optimal ketika dilakukan *exercise* lebih awal secara sukarela terlepas dari risiko pemutusan hubungan kerja. Dalam hal ini, nilai OSK tipe Amerika sama dengan nilai OSK tipe Eropa, dan pertidaksamaan variasi pada (9) dapat disederhanakan menjadi PIDE dengan pendekatan transformasi fourier.

HASIL DAN PEMBAHASAN

METODE TRANSFORMASI FOURIER UNTUK PENILAIAN OSK

Untuk mengevaluasi nilai OSK, dilakukan dengan pendekatan metode transformasi Fourier untuk menyelesaikan PIDVI (9). Seperti yang diketahui, turunan dari Transformasi Fourier memenuhi

$$\mathcal{F}[\partial_x^n f](\omega) = i\omega\mathcal{F}[\partial_x^{n-1} f](\omega) = \cdots = (i\omega)^n\,\mathcal{F}[f](\omega). \quad (12)$$

Selanjutnya diterapkan persamaan (12) ke (8), sehingga didapat

$$\mathcal{F}\left[\hat{\mathcal{L}}f\right](\omega) = \left\{i\hat{\mu}\omega - \frac{1}{2}\sigma^2\omega^2 + \int_{\mathbb{R}}\left(e^{i\omega\hat{\mu}} - 1 - iy\omega I_{\{|y|<1\}}\hat{v}(dy)\right\}\mathcal{F}[f](\omega)$$
$$= \hat{\Psi}(\omega)\mathcal{F}[f](\omega)$$

di mana $\hat{\Psi}$ merupakan karakteristik eksponen di bawah $\mathbb{Q}$.

Harga OSK $C(t,x)$ memenuhi PIDE yang tak homogen

$$-\left(\partial_t + \hat{\mathcal{L}}\right)C + (r+\lambda)C - \varphi(x) = 0, \qquad (13)$$

di mana

$$\varphi(x) := \lambda(S_0 e^x - K)^+$$

Selanjutnya menerapkan transformasi Fourier ke persamaan (13) sehingga didapat

$$\begin{aligned}
-\left(\partial_t + \hat{\mathcal{L}}\right)C + (r+\lambda)C - \varphi(x) &= 0 \\
-\varphi(x) &= \partial_t C + \left(\hat{\mathcal{L}}C + rC + \lambda C\right) \\
-\mathcal{F}[\varphi(\omega)] &= \partial_t \mathcal{F}[C(t,\omega)] \\
&\quad + \left(\widehat{\Psi}(\omega)\mathcal{F}[C(t,\omega)] + r\mathcal{F}[C(t,\omega)] \right. \\
&\quad \left. + \lambda\mathcal{F}[C(t,\omega)]\right) \\
-\mathcal{F}[\varphi](\omega) &= \partial_t \mathcal{F}[C](t,\omega) \\
&\quad + \left(\widehat{\Psi}(\omega) - r - \lambda\right)\mathcal{F}[C](t,\omega) \qquad (14)
\end{aligned}$$

oleh karena itu, PIDE tak homogen asli ditransformasikan menjadi ODE homogen pada (14) yang memenuhi $\mathcal{F}[C](t,\omega)$, parameter bergantung waktu t dan ω. Mengingat nilai $\mathcal{F}[C]$ sebarang waktu $t_2 \le T$, peneliti sebelumnya mendapatkan t_1 bahwa

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[C](t_1,\omega) &= \mathcal{F}[C](t_2,\omega)e^{\left(\widehat{\Psi}(\omega)-r-\lambda\right)(t_2-t_1)} \\
&\quad + \left(\frac{\mathcal{F}[\varphi](\omega)}{\widehat{\Psi}(\omega) - r - \lambda}\right)\left(e^{\left(\widehat{\Psi}(\omega)-r-\lambda\right)(t_2-t_1)}\right. \\
&\quad \left. - 1\right), \ \ t_1 < t_2
\end{aligned}$$

Dengan invers transformasi fourier, peneliti menentukan harga OSK sebagai berikut

$$C(t_1,x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}[C](t_2,\omega)e^{\left(\widehat{\Psi}(\omega)-r-\lambda\right)(t_2-t_1)}\right](x) + \mathcal{F}^{-1}\left[\left(\frac{\mathcal{F}[\varphi](\omega)}{\widehat{\Psi}(\omega)-r-\lambda}\right)\left(e^{\left(\widehat{\Psi}(\omega)-r-\lambda\right)(t_2-t_1)} - 1\right)\right](x).$$

OSK dapat dieksekusi lebih awal sehingga peneliti perlu membandingkan nilai OSK individu dengan hasil dari *exercise* langsung. Selanjutnya, peneliti mempartisi selang waktu $[t_v, T\,]$ menjadi $t_m, m = M, M-1, \ldots, 1$, kemudian diiterasi mundur dalam waktu dengan

$$\begin{cases}
C(t_{m-1},x) = \mathcal{F}^{-1}\begin{bmatrix}
\mathcal{F}[C](t_m,\omega) \times \\
e^{\left(\widehat{\Psi}(\omega)-r-\lambda\right)(t_m-t_{m-1})} \\
+\dfrac{\mathcal{F}[\varphi](\omega)}{\widehat{\Psi}(\omega)-r-\lambda} \times \\
\left(e^{\left(\widehat{\Psi}(\omega)-r-\lambda\right)(t_2-t_1)} - 1\right)
\end{bmatrix}(x), \\
C(t_{m-1},x) = \max\{C(t_{m-1},x), (S_0e^x - K)^+,
\end{cases}$$

di mana $t_m = T$ dan $t_0 = t_v$.

Untuk implementasi numerik, peneliti menghilangkan domain asli $\Omega = [t_v, T\,] \times \mathbb{R}$ ke dalam domain berhingga yang besar: $\{(t_m, x_n): m = 0,1,\ldots,M, n = 0,1,\ldots,N-1\}$, di mana $t_m = t_V + m\Delta t, dan\, x_n = x_{\min} + n\Delta x$, dengan kenaikan $\Delta t = (T - t_v)/\,M$ dan $\Delta x = (x_{max} - x_{min})/(N-1)$. Sebagian besar OSK diberikan secara tunai sehingga wajar untuk menetapkan batas harga atas atau harga bawah $x_{min} = -x_{max}$ yang memiliki jarak sama dari nol. Dengan x_{max}, M, dan N tetap, peneliti menerapkan frekuensi *Nyquist* kritis $\omega_{max} = \pi/\Delta x$ dan mengatur $\Delta\omega = 2\omega_{max}/N$.

Transformasi Fourier kontinu didekati dengan transformasi Fourier diskrit (DFT)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[C](t_m,\omega_n) &\approx \sum_{k=0}^{N-1} C(t_m,x_k)e^{-i\omega_n x_k}\Delta x \\
&= a_n \sum_{k=0}^{N-1} C(t_m,x_k)e^{-\frac{ink}{N}},
\end{aligned} \qquad (15)$$

dengan

$$a_n = e^{-i\omega_n x_{min}}\Delta x,$$

Dalam persamaan (15), peneliti mengevaluasi jumlah $\sum_{k=0}^{N-1} C(t_m,x_k)\, e^{-\frac{ink}{N}}$ menggunakan algoritma *Fast Fourier Transform* (FFT). Invers Fourier yang sesuai dilakukan oleh invers FFT, menghasilkan harga OSK $C(t_m,x_n)$. Untuk koefisien a_n dihilangkan dalam prosesnya.

Setelah menghitung nilai OSK yang diperoleh, harga OSK yang tidak digunakan diberikan oleh

$$\tilde{C}(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}\left[\tilde{C}\right](t_v,\omega)e^{\left(\widehat{\Psi}(\omega)-r-\tilde{\lambda}\right)(t_v-t)}\right](x), \quad \text{untuk } t \le t_v, \qquad (16)$$

di mana $\tilde{C}(t_v,x) = C(t_v,x)$.

INTENSITAS STOKASTIK PEMUTUSAN HUBUNGAN KERJA

Sebagai perluasan dari model penilaian OSK, peneliti dapat mengacak tingkat pemutusan hubungan kerja dengan mendefinisikan

$$T^\lambda = \inf\left\{t \ge 0: \int_0^t \lambda(s,X_s)ds > E\right\},$$

di mana $\lambda(t,x)$ adalah fungsi deterministik positif halus dan $E \sim exp(1) \perp \mathbb{F}^X$. Intensitas stokastik Markovian untuk pemutusan hubungan kerja ini memungkinkan untuk ketergantungan antara τ^λ dan X sambil menjaga traktabilitas dengan tidak meningkatkan dimensi PIDVI. Dalam penelitian OSK terkait, Carr dan Linetsky (2000) dan Cvitanic *et al.* (2008) juga mempertimbangkan pendekatan intensitas Markovian ini untuk model pemutusan hubungan kerja dan *exercise* eksogen, meskipun dalam prosesnya tidak memasukkan *exercise* sukarela yang optimal. Secara khusus, Carr dan Linetsky (2000) mempertimbangkan intensitas pemutusan hubungan kerja dalam bentuk:

$$\lambda(t, X_t) = \lambda_f + \lambda_\epsilon I_{\{S_0 e^{X_t > K}\}}.$$

Istilah kedua adalah memodelkan *exercise* awal karena keinginan likuiditas pemegang adalah eksogen dan itu konstan jika OSK sama dengan uang dan nol jika tidak. Peneliti mengasumsikan bahwa fungsi intensitas pemutusan hubungan kerja sebelum dan sesudah *vesting period* menjadi *affine* dalam harga log, yang dinyatakan sebagai $\lambda(t,x) = ax + b$ dan $\tilde{\lambda}(t,x) = \tilde{a}x + \tilde{b}$ dengan konstanta $a, b, \tilde{a}$, dan $\tilde{b}$. Secara intuitif, pekerjaan pemegang OSK lebih berisiko ketika harga saham perusahaan rendah, yang memungkinkan *a* dan $\tilde{a}$ menjadi negatif. Asumsi intensitas *affine* digunakan untuk menyederhanakan PIDE tak homogen.

PIDE untuk biaya OSK yang dipegang di daerah kelanjutan adalah

$$(\partial_t + \hat{\mathcal{L}})C - rC = (ax + b)C + \psi(x), \qquad (17)$$

di mana $\psi(x) = (ax + b)(S_0 e^x - K)^+$.

Kemudian peneliti menerapkan Transformasi Fourier dan persamaan (12), diperoleh PDE tak homogen di t dan ω yaitu,

$$i\omega\left(\partial_t + (\hat{\Psi}(\omega) - r)\mathcal{F}[C](t,\omega)\right) = \mathcal{F}[aC + (ax + b)C_x](t,\omega) - i\omega\mathcal{F}[\psi](\omega), \qquad (18)$$

dengan kondisi terminal

$$\mathcal{F}[C](t,\omega) = \mathcal{F}[(S_0 e^x - K)^+].$$

Menggunakan fitur dari transformasi Fourier yaitu

$$\mathcal{F}[xC_x](t,\omega) = -\mathcal{F}[C](t,\omega) - \omega\partial_\omega \mathcal{F}[C](t,\omega),$$

diikuti oleh substitusi

$$\mathcal{F}[C](t,\omega) = e^{\frac{-i}{a}\int_{-\infty}^{\omega}(\hat{\Psi}(s) - r - b)ds} H(t,\omega),$$

Peneliti menyederhanakan persamaan (18) untuk mendapatkan PDE orde satu.

$$\partial_t H(t,\omega) + \frac{a}{i}\partial_\omega H(t,w) = -e^{\frac{i}{a}\int_{-\infty}^{\omega}(\hat{\Psi}(s) - r - b)ds}\mathcal{F}[\psi](\omega), \qquad (19)$$

dengan kondisi terminal

$$H(T,\omega) = \mathcal{F}[(S_0 e^x - K)^+](\omega)\, e^{\frac{i}{a}\int_{-\infty}^{\omega}(\hat{\Psi}(s) - r - b)ds}$$

Akhirnya, penyelesaian (19) dan penguraian substitusi, transformasi Fourier dari C dapat dinyatakan sebagai

$$\mathcal{F}[C(t_1,x)](\omega) = e^{\frac{-i}{a}\int_{-\infty}^{\omega}(\hat{\Psi}(s) - r - b)ds}\left(\mathcal{F}[C(t_2,x)](\omega)e^{\frac{i}{a}\int_{-\infty}^{\omega + \frac{a}{i}\Delta t}(\hat{\Psi}(s) - r - b)ds} + \int_0^{\Delta t} g\left(\omega - \frac{a}{i}(s - \Delta t)\right)ds\right), \qquad (20)$$

Di mana

$$g(\omega) = e^{\frac{i}{a}\int_{-\infty}^{\omega}(\hat{\Psi}(s) - r - b)ds}\mathcal{F}[\psi](\omega),$$

$$t_v \le t_1 < t_2 \le T, \qquad \Delta t = t_2 - t_1$$

Transformasi Fourier (20) memungkinkan untuk menghitung nilai $C(t,x)$ mundur dalam waktu, dari tanggal kedaluwarsa T. Implementasi numerik dari persamaan (20) memerlukan pengintegrasian $\int_0^{\Delta t} g(\omega - \frac{a}{i}(s - \Delta t))ds$. Pada setiap langkah waktu kecil $[t, t + \Delta t]$, peneliti mendekati integral $\int_0^{\Delta t} g(\omega - \frac{a}{i}(s - \Delta t))ds$ dengan penambahan sembarang pada waktu pembagian tambahan, yaitu $\sum_{k=0}^{n'} g\left(\omega + \frac{ak}{in'}\Delta t\right)\Delta t/n'$. Oleh karena itu, solusi untuk harga OSK yang diperoleh di daerah lanjutan diberikan oleh

$$C(t_1,x) = \mathcal{F}^{-1}\left[e^{\frac{i}{a}\int_{\omega}^{\omega + \frac{a}{i}\Delta t}(\hat{\Psi}(s) - r - b)ds}\mathcal{F}[C(t_2,x)]\left(\omega + \frac{a}{i}\Delta t\right) + \sum_{k=0}^{n'-1} g\left(\omega + \frac{ak}{in'}\Delta t\right)\frac{\Delta t}{n'}\; e^{\frac{-i}{a}\int_{-\infty}^{\omega}(\hat{\Psi}(s) - r - b)ds}\right](x),$$

untuk $t_v \le t_1 < t_2 \le T, x \in \mathbb{R}$. Sekali lagi, dalam setiap iterasi, peneliti menentukan kondisi

$$C(t,x) = \max\{C(t_1,x), (S_0 e^x - K)^+\}$$

untuk mendapatkan nilai opsi tipe Amerika.

Adapun OSK yang belum tersedia, peneliti harus membandingkan $\tilde{C}(t_v,x) = C(t_v,x)$ pada saat t_v dan

$$(\partial_t + \hat{\mathcal{L}})\tilde{C} - \left(r + (\tilde{a}x + \tilde{b})\right)\tilde{C} = 0$$

untuk $(t,x) \in [0,t_v) \times \mathbb{R}$. Pada saat $t < t_v$, harga OSK yang belum dicairkan dihitung dengan cara sebagai berikut.

$$\tilde{C}(t,x) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}\left[\tilde{C}(t_v,x)\left(\omega + \frac{\tilde{a}}{i}(t_v - t)\right)e^{\frac{i}{a}\int_{\omega}^{\omega + \frac{a}{i}(t_v - t)}(\hat{\Psi}(s) - r - \tilde{b})ds}\right](x).$$

Transformasi Fourier dari harga OSK memenuhi

$$\partial_t\mathcal{F}[C](t,\omega) + (\hat{\Psi}(\omega) - r)\mathcal{F}[C](t,\omega) - \mathcal{F}[\lambda C](t,\omega) = -\mathcal{F}[\xi](\omega),$$

di mana

$$\xi(t,x) = \lambda(t,x)(S_0 e^x - K)^+.$$

Untuk menyelesaikan ODE ini, peneliti menerapkan skema *eksplisit* ke suku $\mathcal{F}[\lambda C](t,\omega)$, dan menerapkan skema *implisit* ke suku lainnya. Oleh karena itu, mengingat nilai $C(t_2,x)$ pada waktu $t_2 > t_1$, dihitung nilai $C(t_1,x)$ dengan

$$C(t_1,x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}[C](t_2,\omega)e^{(\widehat{\Psi}(\omega)-r)(t_2-t_1)}\right] + \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\mathcal{F}[\xi](\omega)-\mathcal{F}[\lambda C](t_2,\omega)}{\widehat{\Psi}(\omega)-r}\left(e^{(\widehat{\Psi}(\omega)-r)(t_2-t_1)}-1\right)\right].$$

PROBABILITAS PEMUTUSAN KONTRAK OSK

Kontrak OSK dapat diakhiri karena pemutusan hubungan kerja sebelum *vesting period*, atau *exercise* secara sukarela atau paksa setelah *vesting period*. Dalam hal ini, peneliti mempertimbangkan probabilitas pemutusan kontrak OSK selama interval waktu tertentu $[t,\tilde{T}]$. Peneliti mempertimbangkan tiga kasus yang berbeda.

Kasus 1: $t<\tilde{T}\le t_v$ .Selama *vesting period*, pemutusan kontrak sepenuhnya bisa terjadi karena pemutusan hubungan kerja sebelum t_v, yang probabilitasnya adalah $1-e^{-\tilde{\lambda}(\tilde{T}-t)}$.

Kasus 2: $t_v\le t<\tilde{T}\le T$. Setelah *vesting period*, pemutusan kontrak dapat terjadi baik dari *exercise* paksa karena pemutusan hubungan kerja, atau *exercise* secara sukarela. Untuk tujuan perhitungan, peneliti membagi probabilitas pemutusan kontrak menjadi dua bagian sesuai dengan apakah pemutusan kerja terjadi sebelum atau sesudah $\tilde{T}$.

Pertama, peneliti mempertimbangkan skenario di mana pemutusan hubungan kerja tidak terjadi selama $[t,\tilde{T}]$ dan pemegang OSK secara sukarela melakukan *exercise*. Ini sesuai dengan probabilitas

$$\mathbb{P}_{t,x}\{\tau^*\le\tilde{T},\tau^\lambda>\tilde{T}\}=\mathbb{P}_{t,x}\{\tau^*\le\tilde{T}\}e^{-\lambda(\tilde{T}-t)},\quad(21)$$

Di mana τ^* adalah waktu *exercise* yang optimal untuk pemegang OSK. Untuk mengevaluasi (21), peneliti memecahkan $\hat{h}(t,x):=\mathbb{P}_{t,x}\{\tau^*\le\tilde{T}\}$ dari PIDE

$$(\partial_t+\mathcal{L})\hat{h}=0,$$

untuk $(t,x)\in(t_v,\tilde{T})\times\mathbb{R}$, dengan kondisi batas

$$\hat{h}(t,x)=1,\text{for } x>x^*(t),$$

dan kondisi terminal

$$\hat{h}(\tilde{T},x)=1_{\{x\ge x^*(\tilde{T})\}},$$

di mana

$$x^*(\mathrm{t}):=\log(s^*(t)/S_0).$$

Skenario lainnya adalah ketika pemutusan pekerjaan tiba sebelum $\tilde{T}$. Akibatnya, total pemutusan kontrak probabilitas $h(t,x)$ adalah jumlah dari

$$h(t,x):=e^{-\lambda(\tilde{T}-t)}\hat{h}(\tilde{T},x)+1-e^{-\lambda(\tilde{T}-t)}.\quad(22)$$

Selanjutnya, peneliti mengamati bahwa probabilitas pemutusan kontrak meningkat dengan intensitas pemutusan kerja λ sejak batas exercise yang optimal menurun dengan λ, dan begitu juga $(1-\hat{h}(t,x))$. Atau, peneliti melihat probabilitas *exercise* sukarela karyawan

$$h^v(t,x):=\mathbb{P}_{t,x}\{\tau^*<\tau^\lambda\wedge\tilde{T}\}.$$

Probabilitas ini memenuhi PIDE

$$(\partial_t+\mathcal{L})h^v-\lambda h^v=0,\quad(23)$$

untuk $(t,x)\in(t_v,\tilde{T})\times\mathbb{R}$, dengan kondisi batas

$$h^v(t,x)=1,\text{untuk } x>x^*(t),$$

dan kondisi terminal

$$h^v(\tilde{T},x)=I_{\{x\ge x^*(\tilde{T})\}},$$

di mana

$$x^*(t):=\log(s^*(t)/S_0).$$

Dari PIDE (2.35), peneliti mengamati dua faktor yang mengatur pengaruh intensitas pemutusan hubungan kerja λ pada probabilitas *exercise* secara sukarela. Di satu sisi, intensitas pemutusan kerja λ yang lebih tinggi menyiratkan batas *exercise* optimal yang lebih rendah, yang pada gilirannya meningkatkan kemungkinan *exercise* secara sukarela. Di sisi lain, intensitas pemutusan hubungan kerja yang lebih tinggi cenderung memaksa pemegang OSK melakukan *exercise* lebih awal sebelum harga saham mencapai batas *exercise* optimal. Ini mengurangi kemungkinan *exercise* secara sukarela.

Kasus 3: $t\le t_v<\tilde{T}\le T$. Skenario ini merupakan kombinasi dari kasus 1 dan 2 di atas. Pemutusan kontrak dapat terjadi sebelum atau sesudah *vesting period*. Selama $[t,t_v]$, hanya pemutusan hubungan kerja yang dapat membatalkan kontrak. Jika tidak ada pemutusan kerja sebelum t_v, maka pemutusan kontrak seperti kasus 2. Oleh karena itu, probabilitas pemutusan kontrak adalah jumlah dari

$$1-e^{-\tilde{\lambda}(t_v-t)}+\mathbb{E}^{\mathbb{P}}_{t,x}\{h(t_v,X_{t_v})1_{\{\tau^{\tilde{\lambda}}\ge t_v\}}$$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}_{t,x}\{h(t_v,X_{t_v})1_{\{\tau^{\tilde{\lambda}}\ge t_v\}}:=\tilde{h}(t,x)$$

di mana $h(t,x)$ diberikan dalam (34). Oleh karena itu ,$\tilde{h}(t,x)$ memenuhi, untuk $(t,x)\in[0,t_v)\times\mathbb{R}$, PIDE

$$(\partial_t+\mathcal{L})\tilde{h}-\tilde{\lambda}\,\tilde{h}\ =0$$

Saat t_v, peneliti menetapkan $\tilde{h}(t_v,x)=h(t_v,x)$, di mana $h(t_v,x)$ dihitung dari kasus 2. Sekali lagi, metode FST dapat diterapkan untuk menyelesaikan $\tilde{h}(t_v,x)$. Ketika $t<t_v$, probabilitas dapat dihitung dalam satu langkah (tanpa iterasi waktu) melalui

$$\tilde{h}(t,x)=\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}[h(t_v,x)](\omega)e^{(\Psi(\omega)-\tilde{\lambda})(t_v-t)}\right](x).$$

KESIMPULAN

Dari hasil dan pembahasan, didapatkan bahwa risiko pemutusan hubungan kerja memiliki efek langsung pada waktu *exercise* pemegang OSK. Risiko pemutusan hubungan kerja yang lebih tinggi mendorong pemegang OSK untuk secara sukarela mempercepat *exercise*, yang pada gilirannya mengurangi biaya bagi perusahaan. Probabilitas pemutusan kontrak OSK selama interval waktu tertentu $[t, \tilde{T}]$, menghasilkan probabilitas yang berbeda-beda antara pemutusan kontrak OSK selama *vesting periode,* setelah *vesting periode,* dan gabungan dari keduanya.

Penelitian ini telah dapat menentukan harga opsi saham karyawan yang memperhitungkan risiko pemutusan hubungan kerja menggunakan *levy-exponential process*.

DAFTAR PUSTAKA

Budiarti, R., & Purnaba, I. (2013). Manajemen Risiko Dengan Menggunakan Levy Copula. Institut Pertanian Bogor.

Carr, P. and Linetsky, V. (2000). The valuation of executive stock options in an intensity-based framework, European Finance Review 4, pp. 211–230.

Chairunnnisa, U. H., Hoyyi, A., & Yasin, H. (2021). Pemodelan Transformasi Fast-fourier Pada Valuasi Obligasi Korporasi (Studi Kasus: PT. Bank Danamon Tbk, PT. Bank CIMB Niaga Tbk, dan PT. Bank UOB Indonesia Tbk). *Jurnal Gaussian*, *10*(1), 85-93.

Chendra, E. (2016). Opsi Saham Karyawan (OSK) : Bonus ataukah Bencana?. Universitas Katolik Parahyangan.

Cvitanic, J., Wiener, Z. and Zapatero, F. (2008). Analytic pricing of employee stock options, Review of Financial Studies 21, 2, pp. 683–724.

Gusnela, N., & Ahmad, D. (2020). Penentuan Nilai Opsi Saham Karyawan (OSK) dengan Memperhitungkan Efek Dilusi Menggunakan Metode Lattice Trinomial. *UNP Journal of Mathematics*, *3*(1).

Leung, T., & Wan, H. (2015). ESO valuation with job termination risk and jumps in stock price. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, *6*(1), 487-516.

Menawati, N. M. W., & Astika, I. B. P. (2017). Pengaruh Rentabilitas dan Likuiditas pada Jumlah Opsi Saham dan Dampaknya pada Nilai Perusahaan. *E-Jurnal Akuntansi Universitas Udayana*, *18*(3), 1915-1942.

Rahmi, E. (2017). Model Trinomial Pada Penentuan Harga Opsi Saham Karyawan. Universitas Negeri Gorontalo.

Sato, K.-I. (1999). L´evy Processes and Infinitely Divisible Distributions, Cambridge Studies in Advanced Mathematics (Cambridge University Press).

Subartini, B., Riaman, R., Nabiilah, N., & Sukono, S. (2021). Analisis Penerapan Metode Pohon Binomial Dan Metode Black-Scholes Dalam Penentuan Harga Opsi Beli. *Teorema: Teori dan Riset Matematika*, *6*(2).

Wahyuni, E., Lestari, R., & Syafwan, M. (2017). Model Black-Scholes Opsi Call Dan Opsi Put Tipe Eropa Dengan Dividen Pada Keadaan Constant Market. *Jurnal Matematika UNAND*, *6*(2), 43-49.