MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115

Volume 10 No 01
Tahun 2022

HIMPUNAN KONVEKS DAN MATRIKS BISTOKASTIK

Lilik Fepila
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
email: lilik.18012@mhs.unesa.ac.id

I Ketut Budayasa
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
email: ketutbudayasa@gmail.com

Abstrak

Misal C sebuah himpunan. Himpunan C disebut konveks jika untuk setiap dua titik x_1 dan x_2 di C, ruas garis $(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$, dengan $0 \leq \lambda \leq 1$, menghubungkan dua titik tersebut terletak dalam C, dimana λ adalah sebarang bilangan dalam bilangan real. Misalkan S sebuah himpunan. Galangan konveks atau hull konveks dari S dilambangkan conv (S), yang merupakan himpunan semua kombinasi konveks dari titik-titik di S. Jika S adalah himpunan finit dari titik-titik, maka conv (S) dinamakan sebuah politop. Sebuah politop sering didefinisikan sebagai sebuah polihedron terbatas dan sangat penting dalam permasalahan program linear, karena himpunan fisibel dari kebanyakan program linear adalah politop. Jika ada sebuah titik $x \in C$ sedemikian hingga titik x tidak dapat ditulis sebagai titik tengah dari dua titik x_1 dan x_2 di C, sedemikian hingga $x = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$ tidak ada. Maka dikatakan x sebuah titik ekstrim dalam himpunan C, titik ekstrim tersebut sebagai titik dalam suatu politop. Galangan konveks dari himpunan independen disebut sebuah simpleks dengan himpunan titik $\{x_1, x_2, \dots, x_t\}$. Himpunan semua matriks bistokastik ordo $n \text{ x } n$ dilambangkan Ω_n, disebut politop Birkhoff. Himpunan Ω_n adalah konveks. Matriks A berordo $n \text{ x } n$ disebut matriks permutasi ordo n jika A diperoleh dari matriks identitas ordo n (I_n) dengan mempermutasikan kolom-kolom atau baris-barisnya. Himpunan semua matriks permutasi ordo n, dilambangkan P_n. Terdapat sebanyak $n!$ matriks permutasi ordo n.

Kata Kunci: Himpunan Konveks, Galangan Konveks (Hull Konveks), Matriks Bistokastik, Politop Birkhoff

Abstract

Let C be a set. The set C is said to be convex if for every two points x_1 dan x_2 in C, the line segment $(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$, with $0 \leq \lambda \leq 1$, connecting the two points lies in C, where λ is any number in real numbers. Suppose S is a set. The convex hull of S is denoted by conv (S), which is the set of all convex combinations of points in S. If S is a finite set of points, then conv (S) is a polytope. A polytope is often defined as a finite polyhedron and is very important in linear programming problems, because the set of feasible of most linear programming is a polytope. If there is a point $x \in C$ such that the point x cannot be written as the midpoint of the two points x_1 and x_2 in C, such that $x = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$ does not exist. Then we say x is an extreme point in the set C, that extreme point is a point in a polytope. The convex hull of the independent set is called a simplex with the vertex set $\{x_1, x_2, \dots, x_t\}$. The set of all doubly stochastic matrices of the order $n \text{ x } n$, denoted Ω_n, is said to be the Birkhoff polytop. The set Ω_n is convex. A matrix of order $n \text{ x } n$ is called a permutation matrix of order n if A is obtained from an identity matrix of order n (I_n) by permutating its columns or rows. The set of all permutation matrices of order n, denoted P_n. There are as many as $n!$ permutation matrix of order n.

Keywords: *Convex Set, The Convex Hull, Doubly Stochastic Matrices, The Birkhoff Polytope.*

PENDAHULUAN

Matematika merupakan salah satu ilmu yang penerapannya paling banyak diterapkan dalam kehidupan manusia. Program linear merupakan salah satu cabang ilmu matematika, yaitu suatu program yan digunakan untuk meminimalkan atau memaksimalkan suatu permasalahan dalam bidang optimasi.

Dalam optimasi linier dipertimbangkan masalah yang dapat disajikan sebagai masalah pemrograman linier yang dalam penjelasan ini menjadi kelas matriks bistokastik, dan ketika matriks bistokastik terkait dengan masalah optimasi linier, batasan yang diterapkan akan menimbulkan beberapa jenis masalah khusus, di antaranya akan menggunakan notasi matriks dan grafik, dan oleh karena itu diberikan penjelasan singkat dari pendekatan himpunan konveks. Misal C sebuah himpunan. Himpunan C disebut konveks jika untuk setiap dua titik di C,ruas garis $(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$,dengan $0 \leq \lambda \leq 1$, yang menghubungkan dua titik tersebut terletak dalam C. Akan dimisalkan juga bahwa S adalah suatu himpunan. Galangan konveks dari S dilambangkan dengan conv (S). Dalam artikel ini juga akan dijelaskan jika S adalah himpunan finit dari titik-titik, maka conv (S) dinamakan sebuah politop. Sebuah politop sendiri didefinisikan sebagai sebuah polihedron terbatas dan sangat penting dalam permasalahan program linear. Kemudian matriks bistokastik akan didefinisikan dengan benar dengan beberapa konsep matematika terkait erat dengan teorema utama dalam artikel ini, yaitu teorema Birkhoff dan von Neumann. Misalkan himpunan matriks $n \, \mathrm{x} \, n$, disebut dengan politop Birkhoff dan dilambangkan Ω_n. Himpunan Ω_n adalah konveks. Matriks A berordo $n \, \mathrm{x} \, n$ disebut matriks permutasi ordo n jika A diperoleh dari matriks identitas ordo n (I_n) dengan mempermutasikan kolom-kolom atau baris-barisnya. Himpunan semua matriks permutasi ordo n, dilambangkan P_n. Maka dari semua konsep di atas akan diperoleh terdapat sebanyak $n!$ matriks permutasi ordo n dan setiap anggota Ω_n merupakan kombinasi konveks dari P_n.

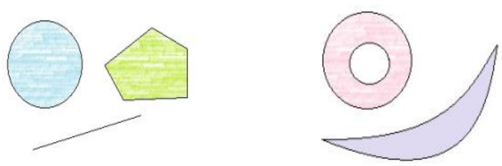
KAJIAN TEORI

Himpunan Konveks

Definisi 2.1 :

Misal C sebuah himpunan bilangan real. Himpunan C disebut konveks jika untuk setiap dua titik di C, $x_1, x_2 \in C$, ruas garis $(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$, dengan $0 \leq \lambda \leq 1$, yang menghubungkan dua titik tersebut terletak dalam C, dimana λ adalah sebarang bilangan dalam bilangan real .

Contoh 2.1 :



(a) (b)

Gambar 2.1 (a) merupakan himpunan konveks. Dikatakan himpunan konveks karena ada bagian ruas garis yang menghubungkan kedua titik terletak dalam C. Gambar 2.1 (b) merupakan himpunan tidak konveks. Sedangkan gambar 2.1 (b) dikatakan tidak konveks karena terdapat bagian ruas garis yang menghubungkan kedua titik terletak di luar C.

Definisi 2.2 :

Sebuah kombinasi linear konveks adalah sebuah vektor $= \sum_{i=1}^{t} \lambda_i \, x_i$, dimana $x_i, \ldots, x_t \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_i \geq 0$, untuk $i = 1, \ . \ . \ . \ , t \; dan \; \sum_{i=1}^{t} \lambda_i = 1$.

Proposisi 2.1 :

Sebuah himpunan infinit, himpunan $C \subseteq \mathbb{R}^n$ dikatakan konveks jika dan hanya jika C memuat semua kombinasi konveks dari titik-titiknya.

Bukti :

$\Rightarrow$ Misal $C = \{x_1, \ . \ . \ , x_n\}$ dan C konveks. Berdasarkan Definisi 2.1, berarti bahwa C memuat untuk setiap dua titik x_1 dan x_2 di C, dimana seluruh ruas garis yang menguhubungkan kedua titik tersebut terletak dalam C, seluruh ruas garis yang menghubungkan x_1 dan x_2 dapat ditulis $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ dimana $\lambda \in [0,1]$ dalam C. Karenanya, C memuat semua kombinasi konveks dari setiap dua titik di C.

Selanjutnya akan dibuktikan dengan induksi. Asumsikan bahwa C memuat semua kombinasi konveks pada $n-1$ dari titik di C.

Kita mempunyai $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i \in C$ untuk $x_{i,} . \ . \ . \ , x_{n-1} \in C$ dan $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i = 1$, dimana λ_i adalah nilai skalar dari vektor-vektornya. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa ini juga berlaku untuk n pada titik . Pikirkan sebuah kombinasi linear dari n titik pada C sebagai berikut:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

dimana $x_{i,} . \ . \ . \ , x_n \in C$ dan $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Misalkan $y = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1-\lambda_n} \lambda_i x_i$. Karena

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1-\lambda_n} \lambda_i = \frac{1}{1-\lambda_n} \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i$$

$$= \frac{1}{1-\lambda_n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i - \lambda_n$$

$$= \frac{1}{1-\lambda_n} (1-\lambda_n) = 1.$$

Maka $y = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1-\lambda_n} \lambda_i x_i$ sebuah kombinasi konveks dari $n-1$ titik di C. Berdasarkan asumsi, y juga terletak di C.

Sehingga $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1-\lambda_n} \lambda_i = 1$. Akibatnya, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = (1-\lambda_n)y + \lambda_n x_n$ merupakan kombinasi linear konveks dari n titik pada C.

Karena $x \in C$, maka

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = (1-\lambda_n)y + \lambda_n x_n$$

merupakan kombinasi konveks dari n titik di C juga terletak di C.

$\Leftarrow$ Misalkan C memuat semua kombinasi konveks dari titik-titiknya. Karena ruas garis antara sebarang dua titik $x_1, x_2 \in C$, dapat ditulis $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ dan $\lambda + (1-\lambda) = 1$, dan ini sebuah kombinasi konveks dari $x_1\, dan\, x_2$, maka C merupakan himpunan konveks.

Dengan demikian, teorema terbukti. ∎

Galangan Konveks (Hull Konveks)

Definisi 2.3 :

Misalkan S sebuah himpunan. Galangan konveks dari S, dilambangkan conv (S), adalah himpunan semua kombinasi konveks dari titik-titik di S.

Catatan : Berdasarkan Proposisi 2.1, conv (S) selalu konveks.

Proposisi 2.2 :

Jika $S \subseteq R^n$, maka conv (S) sama dengan irisan dari semua himpunan konveks yang memuat S. Sehingga, conv (S) merupakan himpunan konveks terkecil yang memuat S.

Bukti :

Berdasarkan Definisi 2.3, conv (S) terdiri dari elemen-elemen dalam bentuk $\sum_{i=1}^{t} \lambda_i x_i$ untuk $x_i, \ldots, x_t \in S$ dan dimana $\sum_{i=1}^{t} \lambda_i = 1$, dimana λ_i adalah nilai skalar dari vektor-vektornya. Misalkan H adalah irisan dari semua himpunan konveks yang memuat S, dan akan ditunjukkan bahwa conv $(S) = H$.

Diketahui dari Prosposisi 2.2 bahwa conv (S) merupakan irisan dari semua himpunan konveks yang memuat S, yang dapat ditulis dengan $S \subseteq$ conv (S).

Untuk menunjukkan bahwa bahwa conv $(S) = H$, dimisalkan H juga merupakan irisan dari semua himpunan konveks yang memuat S, maka dapat ditulis

$$H \subseteq \text{conv}\ (S) \qquad (1)$$

Misalkan C_i adalah himpunan-himpunan konveks sedemikian hingga $S \subseteq C_i$, dimana $i = \{1, \ldots, n\}$, maka $S \subseteq \bigcap C_i = H$. Karena irisan dari himpunan-himpunan konveks adalah himpunan konveks, maka $\bigcap C_i$ adalah himpunan konveks.

Karena $H \supseteq S$ dan H adalah konveks, maka H harus memuat semua kombinasi konveks dari S, sehingga

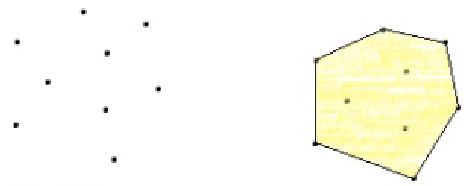
$$H \supseteq conv(S) \qquad (2)$$

Dari (1) dan (2) disimpulkan :

$$H = \text{conv}\ (S)$$

Dengan demikian, bukti proposisi lengkap. ∎

Contoh 2.3 : Galangan konveks himpunan S



(a) (b)

Gambar 2.3 (a) merupakan contoh himpunan S. Gambar 2.3 (b) merupakan contoh conv (S).

Definisi 2.4 :

Jika S adalah himpunan finit dari titik-titik, maka conv (S) dinamakan sebuah politop. Sebuah politop sebagai sebuah polihedron terbatas dan sangat penting dalam permasalahan program linear, karena himpunan fisibel dari kebanyakan program linear adalah politop. Faktanya, himpunan fisibel dari sebuah permasalahan program linear adalah sebuah politop jika himpunan tersebut terbatas.

Daerah yang diarsir pada Gambar 2.3 (b) adalah contoh sebuah politop di $\mathbb{R}^2$ (ruang dimensi-2). Selanjutnya, jika ada sebuah titik $x \in C$ sedemikian hingga titik x tidak dapat ditulis sebagai titik tengah dari dua titik lain dalam himpunan dengan kata lain $x_1, x_2 \in C$ sedemikian hingga $x = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$ tidak ada. Maka dikatakan x sebuah titik ekstrim dalam himpunan C. Secara figural, titik ekstrim tersebut adalah sebagai titik dalam suatu politop. Perhatikan bahwa politop pada Gambar 2.3 (b) mempunyai tujuh titik ekstrim.

Definisi 2.5 :

Himpunan $\{x_1, x_2, \ldots, x_t\} \in \mathbb{R}^n$ disebut independen jika $\sum_{i=1}^{t} \lambda_i x_i = \mathbf{0}$ dan $\sum_{i=1}^{t} \lambda_i = 0$, maka $\lambda_1 = \cdots = \lambda_t = 0$. Galangan konveks dari himpunan

independen disebut sebuah simpleks dengan himpunan titik $\{x_1, x_2, \ldots, x_t\}$.
Untuk sebarang pengambilan $k+1$ dari titik-titik k tersebut, kita peroleh sebuah simpleks- k, yang merupakan sebuah politop dimensi-k. Sehingga, jika S_n adalah himpunan n vektor-vektor independen, maka dalam $(S_n) = n-1$.

Sebuah sifat penting dari simpleks diberikan dalam proposisi berikut.

Proposisi 2.3 :

Misalkan vektor-vektor $\{x_1, \ldots, x_t\} \in \mathbb{R}^n$ adalah independen dan pikirkan simpleks $S = conv$ $(\{x_1, x_2, \ldots, x_t\})$ dibangun oleh vektor-vektor tersebut. Maka setiap titik dalam S mempunyai sebuah representasi tunggal sebagai sebuah kombinasi konveks dari $x_1, \ldots, x_t$.

Bukti :

Misal $y \in \text{conv}\,(\{x_1, x_2, \ldots, x_t\})$, maka berdasarkan Definisi 2.3 terdapat sebuah kombinasi konveks dari y dari vektor-vektor $x_1, \ldots, x_t$. Andaikan kombinasi konveks dari y tidak tunggal. Misal

$$y = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i x_i \text{ dan } y = \sum_{i=1}^{t} \mu_i x_i$$

dimana

$$\sum_{i=1}^{t} \lambda_i = 1;\ \sum_{i=1}^{t} \mu_i = 1;\ \lambda_i \neq \mu_i, i = 1, \ldots, t$$

karena

$$y = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{t} \mu_i x_i$$

maka

$$\sum_{i=1}^{t} \lambda_i x_i - \sum_{i=1}^{t} \mu_i x_i = 0$$

atau

$$\sum_{i=1}^{t} (\lambda_i - \mu_i)\, x_i = 0$$

ekuivalen dengan

$$(\lambda_k - \mu_k)\, x_k + \sum_{i=1, i\neq k}^{t} (\lambda_i - \mu_i)\, x_i = 0$$

atau

$$(\lambda_k - \mu_k)\, x_k = \sum_{i=1, i\neq k}^{t} (\mu_i - \lambda_i)\, x_i$$

Karena $\lambda_k \neq \mu_k$, maka $\lambda_k - \mu_k \neq 0$. Sehingga

$$x_k = \sum_{i=1, i\neq k}^{t} \frac{(\mu_i - \lambda_i)}{(\lambda_k - \mu_k)}\, x_i \qquad (*)$$

Karena

$$\sum_{i=1}^{t} \lambda_i = 1$$

maka

$$\sum_{i=1, i\neq k}^{t} \lambda_i = 1 - \lambda_k$$

Demikian juga, karena

$$\sum_{i=1}^{t} \mu_i = 1$$

maka

$$\sum_{i=1, i\neq k}^{t} \mu_i = 1 - \mu_k$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1, i\neq k}^{t} \frac{(\mu_i - \lambda_i)}{(\lambda_k - \mu_k)} &= \frac{1}{(\lambda_k - \mu_k)} \sum_{i=1, i\neq k}^{t} (\mu_i - \lambda_i) \\
&= \frac{1}{(\lambda_k - \mu_k)} \left\{ \sum_{i=1, i\neq k}^{t} \mu_i - \sum_{i=1, i\neq k}^{t} \lambda_i \right\} \\
&= \frac{1}{(\lambda_k - \mu_k)} \{(1 - \mu_k) - (1 - \lambda_k)\} \\
&= \frac{1}{(\lambda_k - \mu_k)} \{(\lambda_k - \mu_k)\} \\
&= 1 \qquad (**)
\end{aligned}$$

Dari $(*)$ dan $(**)$, diperoleh bahwa $x_k \in S$ sebagai kombinasi konveks dari titik-titik yang lain dalam S. Kontradiksi bahwa S independen. Kontradiksi ini muncul sebagai akibat $\lambda_i \neq \mu_i$. Sehingga $\lambda_i = \mu_i$ untuk $i = 1, \ldots, t$.
Dengan demikian, proposisi terbukti. ■

HASIL DAN PEMBAHASAN

Matriks Bistokastik

Definisi 3.1 :

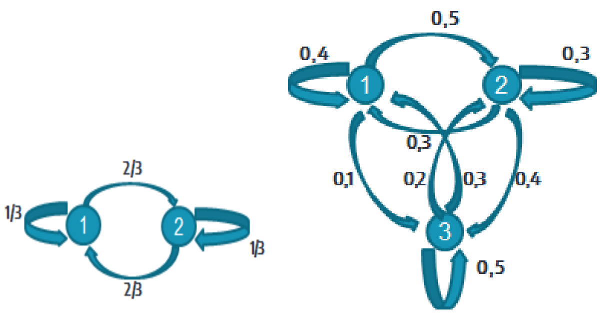
Sebuah matriks $A = (a_{ij})$ ordo $n \times n$ disebut matriks bistokastik jika dipenuhi syarat berikut :
(i) $a_{ij} \geq 0$, untuk setiap $i, j \in \{1, 2, \ldots n\}$
(ii) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1,\ j = 1, 2, \ldots, n$ dan $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1,\ i = 1, 2, \ldots, n$

Contoh 3.1 :

Matriks A_1 adalah matriks bistokastik ordo 2 x 2, dan A_2 adalah matriks bistokastik ordo 3 x 3

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \text{ dan } A_2 = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Matriks bistokastik A_1 dan A_2 tersebut dapat digambarkan perubahan transisinya menggunakan diagram, yaitu diagram "State-transition". Diagram "State-transition" A_1 dan A_2 ditunjukkan dalam Gambar 3.1 (a) dan Gambar 3.1 (b) berturut-turut



(a) (b)

Catatan : Himpunan semua matriks bistokastik ordo $n \times n$, dilambangkan Ω_n, disebut politop birkhoff. Berikut dibuktikan bahwa himpunan Ω_n adalah konveks.

Proposisi 3.1 :

Himpunan semua matriks bistokastik ordo $n \times n$ adalah konveks.

Bukti :

Misalkan $A, B \in \Omega_n$ dan $0 \le \lambda \le 1$, dimana λ adalah sebarang bilangan dalam bilangan real . Akan ditunjukkan $\lambda A + (1-\lambda)B \in \Omega_n$.

Misal $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$, maka

$$\lambda A + (1-\lambda)B$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1-\lambda)b_{11} & \cdots & (1-\lambda)b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ (1-\lambda)b_{n1} & \cdots & (1-\lambda)b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda a_{11} + (1-\lambda)b_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} + (1-\lambda)b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} + (1-\lambda)b_{n1} & \cdots & \lambda a_{nn} + (1-\lambda)b_{nn} \end{pmatrix}$$

Akan ditunjukkan bahwa setiap entri dari $\lambda A + (1-\lambda)B$ adalah bilangan non negatif. Perhatikan bahwa entri dari $\lambda A + (1-\lambda)B$ yang terletak pada baris ke-i dan kolom ke-j adalah $\lambda a_{ij} + (1-\lambda)b_{ij}$.

Karena $, B \in \Omega_n$, maka $a_{ij} \ge 0$ dan $b_{ij} \ge 0$.

Karena $0 \le \lambda \le 1$, maka 1- λ $\ge$0. Akibatnya untuk $i, j \in \{1,2, \ldots n\}$

$$\lambda a_{ij} + (1-\lambda)b_{ij} \ge 0 \qquad (1)$$

Jumlah baris ke- i, untuk $i = 1,2, \ \ldots, n$, adalah

$$\sum_{j=1}^{n} (\lambda\, a_{ij} + (1-\lambda)\, b_{ij} = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + (1-\lambda) \sum_{j=1}^{n} b_{ij}$$

$$= \lambda\ 1 + (1-\lambda)1$$

karena $A, B \in \Omega_n$

$$= 1 \qquad (2)$$

Jumlah kolom- j, untuk $j = 1,2, \ \ldots, n$, adalah

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda\, a_{ij} + (1-\lambda)\, b_{ij} = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ij} + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{n} b_{ij}$$

$$= \lambda\ 1 + (1-\lambda)1$$

$$= 1 \qquad (3)$$

Sehingga, dari (1), (2), (3) dan Definisi 3.1 disimpulkan bahwa $\lambda A + (1-\lambda)B$ adalah matriks bistokastik atau $\lambda A + (1-\lambda)B \in \Omega_n$.

Dengan demikian, proposisi terbukti. ■

Berikut ditunjukkan bahwa dimensi matriks bistokastik ordo n adalah $(n-1)^2$. Dimensi matriks adalah banyaknya entri matriks yang bebas. Maka $\dim(A)$ adalah banyaknya entri matriks yang bebas pada matriks A.

Proposisi 3.2 :

Jika matriks $A \in \Omega_n$, maka $\dim(A) = (n-1)^2$

Bukti :

Tetapkan semua elemen A pada baris ke- n dan semua elemen pada kolom ke- n dengan bilangan-bilangan real non negatif yang kurang dari atau sama dengan 1.

Selanjutnya, sebanyak $(n-1)^2$ elemen-elemen A yang lain bebas ditentukan agar A matriks bistokastik.

Dengan demikian, dimensi matriks A adalah $(n-1)^2$, maka proposisi terbukti. ■

Definisi 3.2 :

Matriks A berordo $n \times n$ disebut matriks permutasi ordo n jika A diperoleh dari matriks identitas ordo n, (I_n) dengan mempermutasikan kolom-kolom atau baris-barisnya. Himpunan semua matriks permutasi ordo n, dilambangkan P_n.

Terdapat sebanyak $n!$ matriks permutasi ordo n.

Contoh 3.2 :

Untuk n=2, diperoleh

$P_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Untuk n=3, diperoleh

$$P_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Perhatikan bahwa, $|P_2| = 2!$, $|P_3| = 3!$

Secara umum diperoleh $|P_n| = n!$

Dari Definisi 3.2, dalam sebuah matriks permutasi ordo n , setiap baris dan setiap kolom hanya mempunyai satu elemen tak nol (yaitu 1) dan elemen-elemen yang lain adalah 0. Sehingga total nilai elemen-elemen di setiap baris maupun di setiap kolom adalah 1. Dengan demikian, berdasarkan Definisi 3.1, matriks permutasi adalah matriks bistokastik, sehingga $P_n \subset \Omega_n$.

Selanjutnya perhatikan matriks bistokastik A ordo 3 x 3 berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{bmatrix}$$

Matriks A dapat ditulis sebagai berikut :

$$A = 0{,}2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 0{,}4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 0{,}1 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 0{,}2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 0{,}1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena $0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 = 1$, maka A adalah sebuah kombinasi konveks dari 5 matriks permutasi ordo 3.

Selain itu, matriks A dapat juga ditulis sebagai berikut :

$$A = 0{,}1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 0{,}5 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 0{,}1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 0{,}3 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dimana $0{,}1 + 0{,}5 + 0{,}1 + 0{,}3 = 1$, maka A adalah sebuah kombinasi konveks dari 4 matriks pemutasi ordo 3. Contoh ini menunjukkan bahwa secara umum kombinasi konveks dari sebuah matriks bistokastik tidak tunggal.

Perhatikan bahwa, matriks A terletak di paling sedikit dua simpleks, yaitu :

Simplek-3 yang dibangun oleh matriks-matriks permutasi :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{dan} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Simplek-4 yang dibangun oleh matriks-matriks permutasi :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{dan} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, perhatikan matriks bistokastik B berikut :

$$B = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Ada elemen B yang terletak pada baris ke-2 dan kolom ke-3 bernilai 0.

Matriks B hanya terletak dalam satu simpleks-3 yang dibangun oleh matriks-matriks permutasi

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{dan} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ini berarti kombinasi konveks dari B adalah tunggal.

Proposisi 3.3 :
(Teorema Birkhoff dan Von Neumman)

Matriks-matriks permutasi merupakan titik-titik ekstrim dari himpunan matriks-matriks bistokastik. Lebih jauh, himpunan matriks-matriks bistokastik Ω_n, adalah galangan konveks dari matriks-matriks permutasi.

Bukti :

Definisikan Ω_n sebagai sebuah politop konveks dalam $R^{n\,x\,n}$ dengan matriks A, memenuhi

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1, \; i = 1,2, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1, \; j = 1, \ldots, n-1$$

$$a_{ij} \geq 0, \; i,j = 1, \ldots, n$$

sebagai anggota-anggotanya.

Perhatikan indeks- j dalam persamaan kedua, hanya sampai dengan $n-1$, karena untuk $j = n$, batasan-batasan telah diberikan oleh persamaan-

persamaan lain. Sehingga, terdapat sebanyak $2n-1$ persamaan dalam mendefinisikan Ω_n.

Misalkan matriks $A \in \Omega_n \subset R^{n\,x\,n}$ sebuah titik ekstrim dari politop Ω_n. Harus ditunjukkan bahwa A adalah sebuah matriks permutasi.

Perhatikan bahwa, untuk menentukan sebuah elemen dari $R^{n\,x\,n}$ secara tunggal, maka paling sedikit n^2 persamaan linear diperlukan.

Berdasarkan definisi Ω_n di atas, terdapat paling banyak $2n-1$ persamaan, maka paling sedikit $n^2-(2n-1)=(n-1)^2$ dari entri-entri A harus sama dengan nol. Sehingga, paling sedikit satu baris mempunyai $n-1$ entri-entri nol, akibatnya entri tak nol pada baris ini harus bernilai 1, sehingga kolom yang bersesuaian semua entri yang lain harus bernilai nol. Sehingga baris dan kolom ini, memenuhi syarat sebagai matriks permutasi. Tanpa menghilangkan keumuman, misalkan baris terakhir dan kolom terakhir dengan sifat seperti tersebut.

Selanjutnya, baris dan kolom ini dihapus sehingga diperoleh matriks $A^{(1)}$ berordo $(n-1)\,x\,(n-1)$. Akan ditunjukkan matriks $A^{(1)}$ sebuah titik ekstrim dari Ω_{n-1}.

Karena $A^{(1)} \in \Omega_{n-1}$, maka

$$A^{(1)} = \lambda\, A_1 + (1-\lambda) A_2$$

untuk $A_1,\ A_2 \in\ \Omega_{n-1}$ dan $0 \le \lambda \le 1$, maka

$$A = \lambda \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (1-\lambda) \begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dimana

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{dan} \begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

adalah dua anggota dari Ω_n.

Karena A sebuah titik ekstrim dari Ω_n, maka

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sehingga $A_1 = A_2$. Akibatnya, $A^{(1)}$ sebuah titik ekstrim pada Ω_{n-i}.

Dengan menggunakan argumen serupa dengam sebelumnya, diperoleh matriks $A^{(1)}$ mempunyai paling sedikit satu baris dan satu kolom yang semua entrinya nol kecuali satu tak nol yaitu bernilai 1. Seperti sebelumnya, hapus baris dan kolom tersebut dari $A^{(1)}$, diperoleh matriks $A^{(2)}$ berordo $(n-2)\,x\,(n-2)$.

Ulangi proses tersebut, secara induktif pada n, maka diperoleh matriks

$$A^{(n-1)} = [1]$$

adalah matriks permutasi pada Ω_1.

Telah ditunjukkan bahwa entri-entri A adalah 0 dan 1 saja, dan karena $A \in \Omega_n$ maka berdasarkan Definisi 3.2, A matriks permutasi ordo n.

Berikut akan ditunjukkan bahwa semua matriks permutasi ordo n merupakan titik-titik ekstrim dari politop Ω_n.

Misalkan P sebuah matriks permutasi ordo n.

Andaikan P bukan sebuah titik ektrim dari Ω_n. Berdasarkan Definisi 2.4,

$$P = \lambda\, A_1 + (1-\lambda)\, A_2 \qquad (*)$$

untuk suatu $A_1,\ A_2 \in \Omega_n$ dan $0 \le \lambda \le 1$.

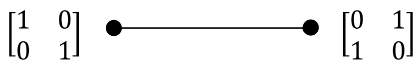
Karena entri-entri P adalah 0 dan 1 saja, maka $(*)$ dipenuhi hanya jika $A_1 = A_2$. Jadi P tidak dapat ditulis sebagai titik tengah dari dua titik pada Ω_n. Ini berarti P sebuah titik ekstrim pada Ω_n.

Akhirnya, karena Ω_n politop dan merupakan galangan konveks dari titik ekstrimnya, maka

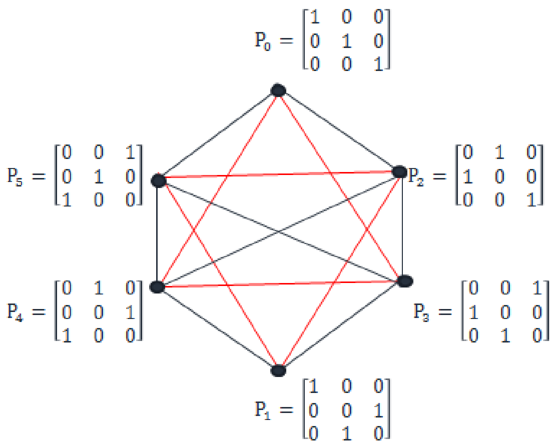
$$\Omega_n = \text{conv}\,(P_n)$$

Dengan demikian, bukti teorema lengkap. ■

Berikut, model graf politop Birkhoff Ω_2 dan Ω_3



Gambar 3.3 (a) : Politop Birkhoff Ω_2



Gambar 3.3 (b) : Politop Birkhoff Ω_3

Catatan :

Jika A dan B dua titik pada politop Ω_2, maka jarak kuadrat antara A dan B, dilambangkan $D^2(A,B)$, didefinisikan sebagai berikut :

$$D^2(A,B) = \text{Trace}\,(A-B)(A^1-B^1)$$

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \Omega_2$. Maka

$$D^2(A,B) = \text{Trace}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \text{Trace}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$
$$= 2 + 2$$
$$= 4$$

Perhatikan politop Birkhoff Ω_3 pada Gambar 3.3 (b), terdapat 6 titik ekstrim yaitu $P_0.P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$. Setiap dua titik yang dihubungkan "sisi warna hitam" mempunyai jarak kuadrat sama dengan 4.

Sedangkam setiap dua titik yang dihubungkan "sisi warna merah" mempunyai jarak kuadrat sama dengan 6.

$$D^2(P_0.P_1) = \text{Trace } (P_0 - P_1)(P_0^1 - P_1^1) = 4;$$
$$D^2(P_0.P_3) = \text{Trace } (P_0 - P_3)(P_0^1 - P_3^1) = 6.$$

PENUTUP

SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di atas dapat diperoleh simpulan berikut :

1) Sebuah himpunan $C \subseteq \mathbb{R}^n$ dikatakan konveks jika dan hanya jika C memuat semua kombinasi konveks dari titik-titiknya.
2) Jika$S \subseteq R^n$, maka conv (S) sama dengan irisan dari semua himpunan konveks memuat S . Sehingga, conv (S) merupakan himpunan konveks terkecil yang memuat S.
3) Jika vektor-vektor $\{x_1, \dots, x_t\} \in \mathbb{R}^2$ adalah independen dan simpleks $S = conv$ $(\{x_1, x_2, \dots ,$ $, x_t\})$dibangun oleh vektor-vektor tersebut. Maka setiap titik dalam S mempunyai sebuah representasi tunggal sebagai sebuah kombinasi konveks dari $x_1, \dots, x_t$
4) Himpunan semua matriks bistokastik ordo n x n adalah konveks.
5) Jika matriks $A \in \Omega_n$, maka $\dim(A) = (n-1)^2$
6) Matriks-matriks permutasi merupakan titik-titik ekstrim dari himpunan matriks-matriks bistokastik. Lebih jauh, himpunan matriks-matriks bistokastik Ω_n, adalah galangan konveks dari matriks-matriks permutasi.

SARAN

Pada artikel ini telah dijelaskan mengenai himpunan konveks dan matriks bistokastik. Penulis menyarankan kepada pembaca untuk membahas dan mempelajari lebih mendalam mengenai konsep lain himpunan konveks dan matriks bistokastik.

DAFTAR PUSTAKA

Maria Sivesind Mehlum. (2012). Doubly Stochastic Matrices and The Assignment Problem.

Dahl, G. (2004). Tridiagonal doubly stochastic matrices. *Linear Algebra and its Applications,* 390, 197.208.

Dahl, G. (2010). *Network flows and combinatorial matrix theory.* Retrieved from University of Oslo.

Dahl, G. (2010). *An Introduction to Convexity.* Retrieved from University of Oslo.

Lau, L. C., Rav, R, & Singh, M. (2011). *Iterative Methods in Combinatorial Optimization.* Cambridge : Cambridge University Press.

M. Marcus and H. Minc (1962). *Some results on Doubly Stochastic Mterices,* Proc. Amer. Math. Soc. 76, 571-579.