

BILANGAN KETERHUBUNGAN PELANGI KUAT GRAF KUPU-KUPU, BENES, DAN TORUS

Dinda Anisa' Nur Fadlilah

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia
email: dinda.18017@mhs.unesa.ac.id

I Ketut Budayasa

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia
Penulis Korespondensi : ketutbudayasa@unesa.ac.id

Abstrak

Misalkan G graf terhubung. Pewarnaan-sisi graf G yakni fungsi $W: E(G) \rightarrow \{1,2, \dots, k\}$ = himpunan warna. Dalam hal ini, warna yang sama dapat diberikan pada dua sisi G yang terhubung pada titik yang sama. Graf G dengan Pewarnaan-sisi W disebut terhubung pelangi kuat jika untuk setiap dua titik u dan v di G ada lintasan pelangi terpendek dari titik u ke titik v . Lintasan pelangi adalah lintasan yang semua sisinya memiliki warna berbeda-beda. Minimum banyaknya warna yang dibutuhkan dalam mewarnai semua sisi G agar terhadap pewarnaan tersebut G terhubung pelangi kuat dinamakan bilangan keterhubungan pelangi kuat graf G dilambangkan dengan $src(G)$. Di dalam artikel ini, akan ditentukan bilangan keterhubungan pelangi kuat graf kupu-kupu $BF(n)$, Benes $BB(n)$, dan torus $T(m, n)$.

Kata Kunci: Pewarnaan sisi, Bilangan Keterhubungan Pelangi Kuat, Graf Kupu-kupu, Graf Benes, Graf Torus

Abstract

Let G be a connected graph, an edge coloring of G is a function $W: E(G) \rightarrow \{1,2, \dots, k\}$ = the set of colors. In this case, the same color can be assigned to two edges of G that connected to the same vertex. An edge coloring W in graph G is called strong rainbow connected if for every two vertices u and v in G there is a rainbow shortest path from u to v . A rainbow path is a path in which all edges have different colors. The minimum number of colors needed to color the edges of G such that G is strong rainbow connected is called the strong rainbow connection number of G , denoted as $src(G)$. In this paper, we will determined the strong rainbow connection number of butterfly graph $BF(n)$, Benes $BB(n)$, and torus $T(m, n)$.

Keywords: Edge coloring, Strong rainbow connection, Butterfly graph, Benes graph, Torus graph

1. PENDAHULUAN

Matematika merupakan ilmu dasar yang penerapannya hampir di semua mata pelajaran, salah satunya ialah teori graf. Seorang matematikawan terkenal dari Swiss yaitu Leonard Euler pertama kali memperkenalkan Teori Graf pada tahun 1736. Secara umum, pengertian graf adalah pasangan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$, di mana $V(G)$ merupakan himpunan berhingga tak kosong dan $E(G)$ merupakan himpunan berhingga (mungkin kosong) sehingga setiap elemen $E(G)$ adalah pasangan tidak terurut dari $V(G)$ (Budayasa, 2007).

Salah satu topik dalam graf yang cukup menarik untuk dibahas yaitu pewarnaan sisi. Mewarnai semua sisi G dengan sebarang warna merupakan pengertian dari pewarnaan sisi graf G . Perluasan

dari pewarnaan sisi salah satunya ialah pewarnaan pelangi. Dikatakan pewarnaan sisi- k pelangi pada G , jika setiap pasang titik $u, v \in V(G)$ terdapat suatu lintasan $u - v$ yang setiap sisinya mendapat warna berbeda, lintasan yang demikian disebut lintasan pelangi. Keterhubungan pelangi graf G merupakan suatu pewarnaan sisi sedemikian hingga setiap pasang titik terdapat suatu lintasan pelangi.

Selanjutnya, setiap dua titik u dan v di graf G , lintasan geodesik $u - v$ adalah lintasan terpendek $d(u, v)$, di mana $d(u, v)$ adalah panjang lintasan paling pendek yang menjadi penghubung antara titik u dan titik v di G . Pewarnaan sisi pada G adalah bilangan keterhubungan pelangi kuat jika setiap dua titik $u, v \in V(G)$ ada lintasan pelangi geodesik $u - v$. Minimum banyaknya warna dalam pewarnaan sisi G agar G terhubung pelangi kuat dikatakan bilangan

keterhubungan pelangi kuat, dan diberi lambang $src(G)$ (Chartrand et. al., 2008).

Konsep pewarnaan pelangi ini sangat menarik untuk dikembangkan luaskan dengan berbagai macam graf yang masih jarang dibahas. Oleh karena itu, untuk memperluas konsep tersebut pada penelitian ini akan dicari keterhubungan pelangi kuat pada jaringan interkoneksi yaitu jaringan kupu-kupu, jaringan Benes, dan jaringan torus.

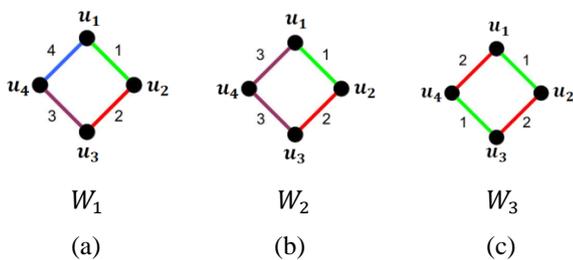
Jaringan interkoneksi digunakan untuk pertukaran data antara dua prosesor dalam jaringan interkoneksi bertingkat, yang dimodelkan oleh graf dengan titik merepresentasikan prosesor dan sisi merepresentasikan saluran komunikasi.

2. KAJIAN TEORI

Definisi 2.1:

Misalkan G graf terhubung. Pewarnaan-sisi graf G yakni fungsi $W: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ = himpunan warna. Dalam hal ini, warna yang sama dapat diberikan pada dua sisi G yang terhubung pada titik yang sama. Graf G dengan Pewarnaan-sisi W disebut terhubung pelangi kuat jika untuk setiap dua titik u dan v di G ada lintasan pelangi terpendek dari titik u ke titik v . Lintasan pelangi adalah lintasan yang semua sisinya memiliki warna berbeda-beda. Minimum banyaknya warna yang dibutuhkan dalam mewarnai semua sisi G agar terhadap pewarnaan tersebut G terhubung pelangi kuat dinamakan bilangan keterhubungan pelangi kuat graf G dilambangkan dengan $src(G)$.

Contoh 2.1:



Gambar 2.1 Pewarnaan $W_1, W_2,$ dan W_3 pada graf siklus C_4

Pada Gambar 2.1 (a), siklus C_4 terhadap W_1 , terhubung pelangi kuat dengan 4 warna. Pada Gambar 2.1 (b), siklus C_4 terhadap W_2 , terhubung pelangi kuat dengan 3 warna. Pada Gambar 2.1 (c), siklus C_4 terhadap W_3 , terhubung pelangi kuat dengan 2 warna. Siklus C_4 tidak terhubung pelangi

kuat dengan hanya 1 warna, agar C_4 terhubung pelangi kuat, maka $src(C_4) = 2$.

Definisi 2.2:

Misalkan G graf terhubung dan $u, v \in V(G)$. Jarak u dan v di G , dilambangkan dengan $d_G(u, v)$ atau $d(u, v)$, adalah panjang lintasan terpendek yang mengaitkan u ke v di G . Diameter G dilambangkan $diam(G)$, didefinisikan sebagai berikut:

$$diam(G) = \max\{d(u, v) \mid u, v \in V(G)\}$$

Berikut ditunjukkan bilangan keterhubungan pelangi kuat suatu graf tidak pernah kurang dari diameter graf.

Lemma 2.1: Jika G graf terhubung. Maka $src(G) \geq diam(G)$

Bukti:

Misalkan G graf terhubung dengan $diam(G) = t$. Berdasarkan Definisi 2.2, ada dua titik u dan v di G sedemikian hingga lintasan terpendek P yang menghubungkan titik u dan v mempunyai panjang t . Pikirkan sebuah pewarnaan-sisi W pada graf G terhadap W , agar G terhubung pelangi kuat, maka semua sisi di lintasan P harus berbeda warna. Berdasarkan Definisi 2.1,

$$src(G) \geq t = diam(G)$$

Dengan demikian, lemma terbukti. ■

Perhatikan bahwa, untuk lintasan dengan n titik P_n diperoleh

$$src(P_n) = n - 1 = diam(P_n)$$

Untuk graf bipartit komplet $K_{1,n}$ dengan $n \geq 3$, diperoleh

$$src(K_{1,n}) = n > 2 = diam(K_{1,n})$$

Teorema 2.2:

- a) Untuk siklus dengan n titik C_n , $src(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
- b) Untuk graf komplet K_n dengan $n \geq 2$, $src(K_n) = 1$
- c) Untuk pohon dengan n titik T_n dengan $n \geq 2$, $src(T_n) = n - 1$

Bukti:

- a) Misalkan C_n siklus dengan n titik. Ditinjau 2 kasus, n genap dan n ganjil.

Kasus 1: n genap

Dalam hal ini $diam(C_n) = \frac{n}{2}$, berdasarkan Lemma 2.1

$$src(C_n) \geq diam(C_n) = \frac{n}{2} \dots (1)$$

Pikirkan sebuah pewarnaan-sisi W pada C_n sebagai berikut.

$$W(v_i v_{i+1}) = i, 1 \leq i \leq \frac{n}{2};$$

$$W\left(v_{\frac{n}{2}+i} v_{\frac{n}{2}+i+1}\right) = i, 1 \leq i \leq \frac{n}{2}$$

Tentu pewarnaan W menggunakan $\frac{n}{2}$ warna dan graf C_n dengan pewarnaan tersebut terhubung pelangi kuat. Menurut Definisi 2.1,

$$src(C_n) \leq \frac{n}{2} \dots (2)$$

Dari (1) dan (2) dapat disimpulkan

$$src(C_n) = \frac{n}{2} = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

Kasus 2: n ganjil

Dalam kasus ini, tidak ada pewarnaan-sisi pada C_n dengan $\frac{n-1}{2}$ warna, sehingga terhadap pewarnaan tersebut C_n terhubung pelangi kuat. Menurut Lemma 2.1,

$$src(C_n) \geq diam(C_n) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \dots (3)$$

Pikirkan sebuah pewarnaan-sisi W pada C_n sebagai berikut.

$$W(v_i v_{i+1}) = i, 1 \leq i \leq \frac{n-1}{2};$$

$$W\left(v_{\frac{n-1}{2}+i} v_{\frac{n-1}{2}+i+1}\right) = i, 1 \leq i \leq \frac{n-1}{2};$$

$$W(v_n v_1) = \frac{n-1}{2} + 1$$

Perhatikan bahwa W adalah sebuah pewarnaan-sisi pada graf C_n dengan menggunakan $\frac{n-1}{2} + 1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ warna. Dan graf C_n terhadap pewarnaan tersebut terhubung pelangi kuat. Oleh karena itu, menurut Definisi 2.1,

$$src(C_n) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \dots (4)$$

Dari (3) dan (4) disimpulkan

$$src(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

Teorema terbukti. ■

b) Karena K_n merupakan graf komplet dengan $n \geq 2$ titik, maka jelas bahwa $diam(K_n) \geq 1$. Berdasarkan Lemma 2.1,

$$src(K_n) \geq diam(K_n) = 1 \dots (1)$$

Buatlah suatu pewarnaan-sisi W pada K_n . Maka untuk setiap sisi di K_n diwarnai dengan 1 warna. Jelas bahwa terhadap pewarnaan W , terhubung pelangi kuat. Menurut Definisi 2.1,

$$src(K_n) \leq 1 \dots (2)$$

Dari (1) dan (2) didapatkan

$$src(K_n) = 1$$

Teorema terbukti. ■

c) Buatlah suatu pewarnaan-sisi W pada T_n , sehingga seluruh sisi T_n mendapat warna yang berbeda. Maka terhadap pewarnaan-sisi W , T_n terhubung pelangi kuat, banyak warna yang dibutuhkan adalah $(n-1)$ warna. Berdasarkan Definisi 2.1,

$$src(T_n) \leq n-1 \dots (1)$$

Akan ditunjukkan bahwa tidak mungkin $(T_n) < n-1$. Andaikan $src(T_n) < n-1$. Karena $src(T_n)$ bilangan bulat berarti $src(T_n) \leq n-2$. Karena banyak sisi T_n adalah $n-1$, akibatnya ada sekurang-kurangnya 2 sisi yang berwarna sama dan ingat bahwa sifat graf pohon antara 2 titik terdapat tepat satu lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut, akibatnya T_n tidak memuat lintasan pelangi dan terhadap pewarnaan $n-2$, T_n tidak terhubung pelangi kuat sehingga pengandaian salah dan tidak mungkin $src(T_n) < n-1$, maka haruslah,

$$src(T_n) \leq n-1 \dots (2)$$

Dari (1) dan (2) disimpulkan

$$src(T_n) = n-1$$

Teorema terbukti. ■

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Graf Kupu-kupu

Definisi 3.1:

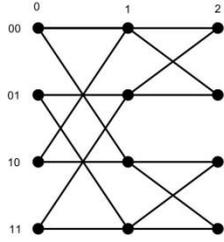
Graf kupu-kupu berdimensi- n dinotasikan dengan $BF(n)$, adalah graf dengan himpunan titik pasangan $[x, y]$ dimana x menyatakan sebuah barisan n -angka biner dan y menyatakan sebuah level, berupa bilangan bulat, dengan $0 \leq y \leq n$. Titik $[x, y]$ dan $[x', y']$ terhubung langsung jika dan hanya jika $y' = y + 1$ dan salah satu dari hubungan berikut berlaku:

- i. x dan x' identik, atau
- ii. x dan x' berbeda hanya pada angka ke- y .

Selanjutnya, sisi $([x, y], [x, y'])$ disebut "sisi-datar" dan $([x, y], [x', y'])$ disebut "sisi-miring (sisi-silang)".

Contoh 3.1:

Graf kupu-kupu berdimensi-2, ditunjukkan seperti gambar berikut.



Gambar 3.1 Graf Kupu-kupu $BF(2)$

Dapat dilihat pada Gambar 3.1, himpunan titik $BF(2)$ adalah : $V(BF(2)) = \{(00,0), (00,1), (00,2), (01,0), (01,1), (01,2), (10,0), (10,1), (10,2), (11,0), (11,1), (11,2)\}$.

Himpunan sisi graf $BF(2)$ adalah : $E(BF(2)) = \{(00,0)(00,1), (00,1)(00,2), (01,0)(01,1), (01,1)(01,2), (10,0)(10,1), (10,1)(10,2), (11,0)(11,1), (11,1)(11,2), (00,0)(10,1), (10,0)(00,1), (01,0)(11,1), (11,0)(01,1), (00,1)(01,2), (01,1)(00,2), (10,1)(11,2), (11,1)(10,2)\}$.

Lemma 3.1: Jika $BF(n)$ graf kupu-kupu berdimensi- n , maka $|V(BF(n))| = (n + 1)2^n$, dan $|E(BF(n))| = n2^{n+1}$

Bukti:

Berdasarkan definisi, himpunan titik graf $BF(n)$ berkorespondensi dengan himpunan pasangan $[x, j]$ dimana x menyatakan sebuah barisan n -angka biner dan j menyatakan sebuah level (bilangan bulat) dengan $0 \leq j \leq n$. Mudah ditunjukkan, bahwa banyak barisan n -angka biner adalah 2^n .

Jadi, untuk setiap level j , terdapat sebanyak 2^n barisan n -angka biner. Padahal ada sebanyak $(n + 1)$ level. Sehingga, berdasarkan Aturan Perkalian, banyak pasangan $[x, j]$ yang mungkin adalah $2^n \times (n + 1)$. Dengan demikian,

$$|V BF(n)| = (n + 1)2^n$$

Misalkan $[x, j] \in V(BF(n))$. Akan dicari derajat titik $[x, j]$ pada graf $BF(n)$. Karena $0 \leq j \leq n$, ditinjau 3 kasus.

Kasus 1: Level-0 ($j = 0$).

Berdasarkan definisi graf $BF(n)$, titik $[x, 0]$ berhubungan langsung dengan titik $[x, 1]$ dan titik $[x', 1]$ dimana barisan n -angka biner x dan x' berbeda hanya pada angka ke-0.

Ini berarti, derajat titik $[x, 0]$ adalah 2. Karena pada level-0, terdapat sebanyak 2^n barisan n -angka biner, maka total derajat semua titik $BF(n)$ pada level-0 adalah

$$t_0 = 2 \times 2^n = 2^{n+1} \dots (i)$$

Kasus 2: Level- j dengan ($1 \leq j \leq n - 1$).

Berdasarkan definisi, titik $[x, j]$ berhubungan langsung dengan titik-titik:

$$[x, j + 1], [x, j - 1], [x', j + 1], [x'', j - 1]$$

Dimana barisan n -angka biner x dan x' berbeda hanya pada angka pada posisi ke- j . Sedangkan barisan biner x dan x'' berbeda hanya pada angka pada posisi ke- $(j - 1)$.

Ini berarti titik $[x, j]$ berderajat 4. Karena di setiap level- j ada 2^n titik, derajat setiap titik 4, dan $1 \leq j \leq n - 1$, maka berdasarkan prinsip Aturan Perkalian, total derajat titik $BF(n)$ di semua level- j dengan $1 \leq j \leq n - 1$ adalah

$$t_j = 4(n - 1)2^n \dots (ii)$$

Kasus 3: level- n ($j = n$).

Dalam hal ini, titik $[x, n]$ berhubungan langsung dengan titik $[x, n - 1]$ dan titik $[x', n - 1]$ dimana barisan n -angka biner x dan x' berbeda hanya pada angka pada posisi ke- $(n - 1)$. Sehingga derajat titik pada level- n adalah 2. Dengan demikian, total derajat titik pada level- n adalah

$$t_n = 2 \times 2^n = 2^{n+1} \dots (iii)$$

Dari (i), (ii), dan (iii) disimpulkan

$$\begin{aligned} \sum_{[x,j] \in V(BF(n))} d([x,j]) &= t_0 + t_j + t_n \\ &= 2^{n+1} + 4(n - 1)2^n + 2^{n+1} = 2 \cdot n \cdot 2^{n+1} \end{aligned}$$

Berdasarkan, Teorema Jabat Tangan,

$$\begin{aligned} |E(BF(n))| &= \frac{1}{2} \sum_{[x,j] \in V(BF(n))} d([x,j]) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot n \cdot 2^{n+1} = n \cdot 2^{n+1} \end{aligned}$$

Dengan demikian, bukti lemma lengkap. ■

Lemma 3.2: Jika $BF(n)$ graf kupu-kupu berdimensi- n , maka $src(BF(n)) \leq n(2^{n-1} + 1)$

Bukti:

Perhatikan bahwa, dalam graf kupu-kupu berdimensi- n , $BF(n)$, antara level $k - 1$ dan level k , $1 \leq k \leq n$, terdapat sebanyak 2^n "sisi-datar" dan 2^n "sisi-miring".

Misalkan e_{ki} dan e^k_i , secara berturut-turut, menyatakan sisi-datar dan sisi-miring pada graf $BF(n)$ antara level $k - 1$ dan k , $1 \leq k \leq n$, $1 \leq i \leq 2^n$.

Buatlah suatu pewarnaan-sisi W pada graf $BF(n)$ seperti berikut.

$$w_{ki} = \begin{cases} W(e_{k(i+2^{k-1}j)}) \\ W(e_{k(i+2^{k-1}j+2^{k-1})}) \end{cases}$$

dengan

$$0 \leq j \leq 2^{n-k} - 1 \text{ dan } 2^{k-1}j + 1 \leq i \leq 2^{k-1}j + 2^{k-1}$$

dan

$$w_k = W(e^k_i)$$

untuk sisi $BF(n)$ antara level k dan level $k - 1$, $1 \leq k \leq n$; $1 \leq i \leq 2^{n-1}$.

Perhatikan bahwa, himpunan warna yang dipakai dalam mewarnai semua sisi-datar antara level k dan level $k - 1$ adalah

$$\{w_{k1}, w_{k2}, w_{k3}, \dots, w_{k2^{n-1}}\}$$

Perhatikan setiap dua sisi-datar, yang membangun siklus C_4 , mendapat warna yang sama. Sedangkan himpunan warna yang dipakai dalam mewarnai semua sisi-miring antara level k dan $k - 1$ adalah $\{w_k\}$.

Jadi ada sebanyak $2^{n-1} + 1$ warna yang digunakan untuk mewarnai semua sisi $BF(n)$ antara level k dan level $k - 1$. Karena $1 \leq k \leq n$, maka ada sebanyak $n(2^{n-1} + 1)$ warna yang dibutuhkan dalam mewarnai semua sisi $BF(n)$. Sehingga pewarnaan-sisi W pada $BF(n)$ menggunakan $n(2^{n-1} + 1)$ warna.

Perhatikan bahwa warna-warna yang digunakan untuk mewarnai sisi-sisi antara level i dan level $i + 1$ berbeda dengan warna-warna yang digunakan untuk mewarnai sisi-sisi antara level $i + 1$ dan $i + 2$, untuk $0 \leq i \leq n - 2$. Akibatnya untuk setiap 2 titik yang terletak pada level berbeda terdapat lintasan pelangi terpendek yang menghubungkan kedua titik tersebut. Jadi ada beberapa kemungkinan lintasan, yaitu jika kedua titik terletak pada level berbeda dan baris yang sama maka lintasan tersebut terdiri dari sisi-sisi datar saja, jika kedua titik terletak pada level berbeda dan baris yang berbeda pula maka lintasan tersebut terdiri dari sisi-sisi datar dan sisi-sisi silang atau terdiri dari sisi-sisi silang saja. Dengan demikian berdasarkan Definisi 2.1, terhadap pewarnaan W tersebut graf $BF(n)$ terhubung pelangi kuat.

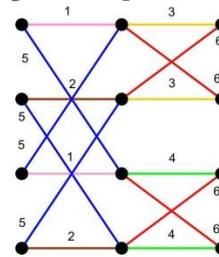
$$src(BF(n)) \leq n(2^{n-1} + 1)$$

Dengan demikian, bukti lemma lengkap. ■

Contoh 3.2 :

Suatu pewarnaan-sisi W pada graf kupu-kupu $BF(2)$ dengan $2(2^{2-1} + 1) = 6$ warna, sedemikian

hingga terhadap pewarnaan W tersebut graf $BF(2)$ terhubung pelangi kuat seperti Gambar 3.2



Gambar 3.2 Graf $BF(2)$ terhubung pelangi kuat dengan 6 warna

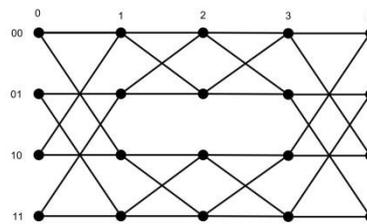
Graf Benes

Definisi 3.2:

Graf Benes berdimensi- n merupakan *back to back* dari graf kupu-kupu, artinya graf kupu-kupu dicerminkan dan saling bertemu pada level ke n . Graf Benes berdimensi- n memiliki $2n + 1$ level, dimana setiap level memiliki 2^n titik. Graf Benes berdimensi- n dilambangkan dengan $BB(n)$.

Contoh 3.3:

Graf Benes berdimensi- 2 , ditunjukkan seperti gambar berikut.



Gambar 3.3 Graf Benes $BB(2)$

Lemma 3.3: Jika $BB(n)$ graf Benes berdimensi- n , maka $|V(BB(n))| = (2n + 1)2^n$, dan $|E(BB(n))| = n2^{n+2}$

Bukti:

Berdasarkan definisi, graf $BB(n)$ merupakan graf $BF(n)$ yang dicerminkan. Sedemikian hingga graf $BB(n)$ memiliki $(2n + 1)$ level, dan untuk setiap level terdapat sebanyak 2^n titik, sehingga berdasarkan Aturan Perkalian banyak titik pada graf $BB(n)$ adalah $(2n + 1) \times 2^n$. Sehingga,

$$|V(BB(n))| = (2n + 1)2^n$$

Berdasarkan definisi, graf $BB(n)$ terdiri dari graf kupu-kupu berdimensi- n $BF(n)$ yang diikuti oleh graf kupu-kupu terbalik $BF(n)$ berdimensi n . Dan berdasarkan Lemma 2.3,

$$|E(BF(n))| = n2^{n+1}$$

Padahal ada sebanyak 2 graf $BF(n)$ dalam $BB(n)$. Maka, berdasarkan Aturan Perkalian banyak sisi pada graf $BB(n)$ adalah $n2^{n+1} \times 2$. Sehingga,

$$|E(BB(n))| = n2^{n+2}$$

Dengan demikian, bukti lemma lengkap. ■

Lemma 3.4: Jika $BB(n)$ graf Benes berdimensi- n , maka $src(BB(n)) \leq n(2^n + 1)$

Bukti:

Berdasarkan definisi, graf $BB(n)$ terdiri dari 2 graf $BF(n)$, yaitu $BF(n)$ kiri dan $BF(n)$ kanan. Oleh karena itu, terdapat dua tahap pewarnaan sisi dari graf $BB(n)$:

- Tahap 1: Pewarnaan sisi Graf $BF(n)$ kiri. Dalam hal ini titik-titik dari graf $BB(n)$ terletak pada level- j dengan $0 \leq j \leq n$.

Pikirkan sebuah pewarnaan-sisi W pada graf $BF(n)$ kiri seperti dalam bukti Lemma 3.2, sedemikian hingga graf $BF(n)$ kiri terhubung pelangi kuat. Dalam hal ini terdapat sebanyak $n(2^{n-1} + 1)$ warna.

- Tahap 2: Pewarnaan sisi Graf $BF(n)$ kanan. Dalam hal ini titik-titik dari graf $BB(n)$ terletak pada level- j dengan $(n \leq j \leq 2n + 1)$.

Misalkan e'_{ki} dan e'^k_i , untuk $1 \leq k \leq n$, $1 \leq i \leq 2^n$, secara berturut-turut menyatakan sisi-sisi datar dan sisi miring dari $BF(n)$ kanan. Pikirkan sebuah pewarnaan sisi W' pada graf $BF(n)$ kanan sebagai berikut.

$$w'_{ki} = \begin{cases} W'(e'_{k(i+2^{k-1}j)}) \\ W'(e'^k_{(i+2^{k-1}j+2^{k-1})}) \end{cases}$$

dengan

$$0 \leq j \leq 2^{n-k} - 1 \text{ dan } 2^{k-1}j + 1 \leq i \leq 2^{k-1}j + 2^{k-1}$$

dan

$$w_k = W'(e'^k_i)$$

untuk sisi $BF(n)$ kanan antara level $k - 1$ dan level k , $n \leq k \leq 2n + 1$; $1 \leq i \leq 2^n$;

Perhatikan bahwa, himpunan warna yang digunakan untuk mewarnai semua sisi-datar antara level $k - 1$ dan level k adalah

$$\{w'_{k1}, w'_{k2}, w'_{k3}, \dots, w'_{k2^{n-1}}\}$$

Perhatikan setiap dua sisi-datar, yang membangun siklus C_4 , mendapat warna yang sama dan warna-warna ini berbeda dengan warna-warna sisi-datar di $BF(n)$ kiri.

Sedangkan himpunan warna yang dipakai dalam mewarnai semua sisi-miring antara level $k - 1$ dan level k adalah $\{w_k\}$. Perhatikan bahwa warna

ini sama dengan warna sisi miring di $BF(n)$ kiri. Dengan demikian dalam pewarnaan sisi $BB(n)$ banyaknya warna yang dibutuhkan untuk memberi warna seluruh sisi yang mendatar adalah

$$2n(2^{n-1}) = n2^n$$

Dan banyaknya warna yang dibutuhkan untuk memberi warna seluruh sisi- miring adalah n . Maka banyak warna yang dibutuhkan dalam pewarnaan semua sisi $BB(n)$ adalah

$$n2^n + n = n(2^n + 1)$$

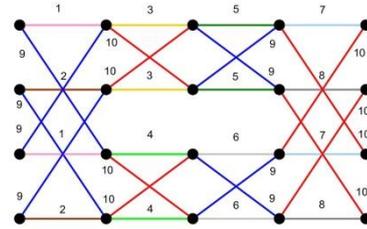
Perhatikan bahwa terhadap pewarnaan tersebut graf $BB(n)$ terhubung pelangi kuat. Sehingga berdasarkan Definisi 2.1 diperoleh

$$src(BB(n)) \leq n(2^n + 1)$$

Teorema terbukti. ■

Contoh 3.4:

Suatu pewarnaan-sisi W pada graf Benes $BB(2)$ dengan $2(2^2 + 1) = 10$ warna, sedemikian hingga terhadap pewarnaan W tersebut graf $BB(2)$ terhubung pelangi kuat pada Gambar 3.4.



Gambar 3.4 Graf $BB(2)$ terhubung pelangi kuat dengan 10 warna

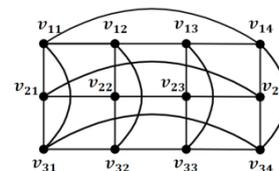
Definisi 3.3

Misalkan m dan n dua bilangan bulat positif. Graf Torus berukuran $m \times n$, yang dilambangkan $T(m, n)$, yaitu graf yang memiliki himpunan titik $V(T(m, n)) = \{v_{ij} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$. Dua titik v_{ij} dan v_{kl} berhubungan langsung di $T(m, n)$ jika dipenuhi salah satu dari yang berikut ini:

- $i = k$ dan $|j - l| = 1$, atau
- $j = l$ dan $|i - k| = 1$, atau
- $i = k$ dan $|j - l| = n - 1$, atau
- $j = l$ dan $|i - k| = m - 1$

Contoh 3.5

Torus $T(3,4)$ ditunjukkan seperti gambar berikut.



Gambar 3.5 Graf Torus $T(3,4)$ Graf Torus $T(3,4)$

Catatan:

Sisi-sisi graf $T(m, n)$:

- Yang memenuhi (i) disebut sisi-sisi horisontal;
- Yang memenuhi (ii) disebut sisi-sisi vertikal;
- Yang memenuhi (iii) disebut sisi-sisi pembungkus horisontal;
- Yang memenuhi (iv) disebut sisi-sisi pembungkus vertikal.

Perhatikan bahwa Torus $T(3,4)$ mempunyai 9 sisi-sisi horisontal, beberapa diantaranya adalah :

$$v_{11}v_{12}, v_{12}v_{13}, v_{13}v_{14}, v_{21}v_{22}, \text{ dll.}$$

Terdapat 8 sisi-sisi vertikal, beberapa diantaranya :

$$v_{11}v_{21}, v_{21}v_{31}, v_{12}v_{22}, v_{22}v_{32}, \text{ dll.}$$

Terdapat 3 sisi pembungkus horisontal yaitu: $v_{11}v_{14}, v_{21}v_{24}, v_{31}v_{34}$ dan terdapat 4 sisi pembungkus vertikal yaitu:

$$v_{11}v_{31}, v_{12}v_{32}, v_{13}v_{33}, v_{14}v_{34}.$$

Lemma 3.5: Untuk Torus $T(m, n)$ berlaku $|V(T(m, n))| = mn$, dan $|E(T(m, n))| = 2mn$

Bukti:

Karena $V(T(m, n)) = \{v_{ij} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ maka $|V(T(m, n))| = mn$.

Perhatikan bahwa, di setiap baris terdapat $(n - 1)$ sisi horisontal, dan banyak baris adalah m , sehingga banyak sisi horisontal $T(m, n)$ adalah

$$m(n - 1)$$

Di setiap kolom terdapat $(m - 1)$ sisi vertikal, dan ada sebanyak n kolom, maka banyak sisi vertikal $T(m, n)$ adalah

$$n(m - 1)$$

Banyak sisi pembungkus horisontal adalah m dan banyak sisi pembungkus vertikal adalah n . Sehingga $|E(T(m, n))| = m(n - 1) + n(m - 1) + m + n = 2mn$ Dengan demikian, lemma terbukti. ■

Lemma 3.6: $src(T(3,3)) = 2$

Bukti:

Karena titik v_{11} dan titik v_{22} tidak berhubungan langsung pada $T(3,3)$, maka $T(3,3)$ bukan graf komplet. Berdasarkan Teorema 2.2 b diperoleh

$$src(T(3,3)) \geq 2 \dots (1)$$

Buatlah suatu pewarnaan W pada $T(3,3)$ sehingga: setiap sisi horisontal dan setiap sisi pembungkus horisontal diwarnai dengan warna 1; setiap sisi vertikal dan setiap sisi pembungkus vertikal diwarnai dengan warna 2.

Perhatikan bahwa terhadap pewarnaan W , torus $T(3,3)$ terhubung pelangi kuat dengan menggunakan 2 warna, berdasarkan Definisi 2.1

$$src(T(3,3)) \leq 2 \dots (2)$$

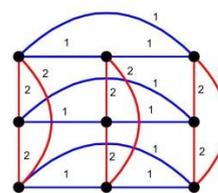
Dari (1) dan (2), disimpulkan

$$src(T(3,3)) = 2$$

Lemma terbukti. ■

Contoh 3.6:

Suatu pewarnaan-sisi W pada graf Torus $T(3,3)$ dengan 2 warna, sedemikian hingga terhadap pewarnaan W tersebut graf $T(3,3)$ terhubung pelangi kuat pada Gambar 3.6.



Gambar 3.6 Graf $T(3,3)$ terhubung pelangi kuat dengan 2 warna

Lemma 3.7 : Untuk $n \geq 4$, $src(T(3, n)) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$

Bukti:

Ditinjau 2 kasus yaitu, n genap dan n ganjil

Kasus 1 : n genap

Pikirkan sebuah pewarnaan-sisi W pada $T(3, n)$ sebagai berikut :

- 1) Sisi horisontal diwarnai seperti berikut ini. Untuk $1 \leq i \leq 3$,

$$W(v_{ij}v_{i,j+1}) = j, 1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor;$$

$$W(v_{i, \frac{n}{2}+j}v_{i, \frac{n}{2}+j+1}) = j, 1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1;$$

- 2) Sisi pembungkus horisontal diwarnai dengan warna $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
- 3) Sisi vertikal dan sisi pembungkus vertikal diwarnai dengan warna $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$

Perhatikan bahwa W adalah sebuah pewarnaan sisi pada graf $T(3, n)$ dengan menggunakan $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ warna. Graf $T(3, n)$ terhadap pewarnaan tersebut terhubung pelangi kuat. Menurut Definisi 2.1

$$src(T(3, n)) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1. \dots (1)$$

Kasus 2 : n ganjil

Pikirkan sebuah pewarnaan-sisi W pada $T(3, n)$ sebagai berikut :

- 1) Sisi horisontal diwarnai seperti berikut ini. Untuk $1 \leq i \leq 3$,

$$W(v_{ij}v_{i,j+1}) = j, 1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor;$$

$$W\left(v_{i\frac{n-1}{2}+j}, v_{i\frac{n-1}{2}+j+1}\right) = j, 1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2;$$

- 2) Sisi pembungkus horisontal diwarnai dengan warna $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.
- 3) Sisi vertikal dan sisi pembungkus vertikal diwarnai dengan warna $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$

Perhatikan bahwa W adalah sebuah pewarnaan sisi pada graf $T(3, n)$ dengan menggunakan $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ warna. Terhadap pewarnaan W graf $T(3, n)$ terhubung pelangi kuat. Berdasarkan Definisi 2.1

$$src(T(3, n)) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1. \dots \dots (2)$$

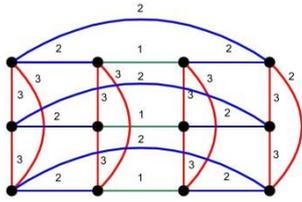
Dari (1) dan (2), didapat

$$src(T(3, n)) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$$

Lemma terbukti. ■

Contoh 3.7:

Suatu pewarnaan-sisi W pada graf Torus $T(3,4)$ dengan $\left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor + 1 = 3$ warna, sedemikian hingga terhadap pewarnaan W tersebut graf $T(3,4)$ terhubung pelangi kuat pada Gambar 3.7.



Gambar 3.7 Graf $T(3,4)$ terhubung pelangi kuat dengan 3 warna

Lemma 3.8: Untuk $m \geq 4$, $src(T(m, 3)) \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1$

Bukti:

Ditinjau 2 kasus, m genap dan m ganjil

Kasus 1 : m genap

Pikirkan sebuah pewarnaan-sisi W pada $T(m, 3)$ sebagai berikut :

- 1) Sisi vertikal diwarnai seperti berikut ini.
Untuk $1 \leq j \leq 3$,

$$W(v_{ij}v_{i+1j}) = i, 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor;$$

$$W\left(v_{\frac{m}{2}+i,j}, v_{\frac{m}{2}+i+1,j}\right) = i, 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - 1;$$

- 2) Sisi pembungkus vertikal diwarnai dengan warna $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$
- 3) Sisi horisontal dan sisi pembungkus horisontal diwarnai dengan warna $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1$

Perhatikan bahwa W adalah sebuah pewarnaan sisi pada graf $T(m, 3)$ dengan menggunakan $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1$

warna. Graf $T(m, 3)$ terhadap pewarnaan tersebut terhubung pelangi kuat. Menurut Definisi 2.1

$$src(T(m, 3)) \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1. \dots \dots (1)$$

Kasus 2 : m ganjil

Pikirkan sebuah pewarnaan-sisi W pada $T(m, 3)$ sebagai berikut :

- 1) Sisi vertikal diwarnai seperti berikut ini.
Untuk $1 \leq j \leq 3$,

$$W(v_{ij}v_{i+1j}) = i, 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor;$$

$$W\left(v_{\frac{m-1}{2}+i,j}, v_{\frac{m-1}{2}+i+1,j}\right) = i, 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - 2;$$

- 2) Sisi pembungkus vertikal diwarnai dengan warna $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$.
- 3) Sisi horisontal dan sisi pembungkus horisontal diwarnai dengan warna $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1$

Perhatikan bahwa W adalah sebuah pewarnaan sisi pada graf $T(m, 3)$ dengan menggunakan $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1$ warna. Graf $T(m, 3)$ terhadap pewarnaan tersebut terhubung pelangi kuat. Menurut Definisi 2.1

$$src(T(m, 3)) \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1. \dots \dots (2)$$

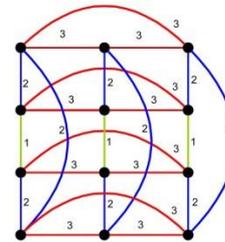
Dari (1) dan (2), didapat simpulan

$$src(T(m, 3)) \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1$$

Lemma terbukti. ■

Contoh 3.8:

Suatu pewarnaan-sisi W pada graf Torus $T(4,3)$ dengan $\left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor + 1 = 3$ warna, sedemikian hingga terhadap pewarnaan W tersebut graf $T(4,3)$ terhubung pelangi kuat pada Gambar 3.8.



Gambar 3.8 Graf $T(4,3)$ terhubung pelangi kuat dengan 3 warna

Lemma 3.9: Untuk $m > 3$ dan $n > 3$, $src(T(m, n))$ adalah

- a. $src(T(m, n)) \leq \left\lfloor \frac{m+n}{2} \right\rfloor$, jika m dan n berbeda paritas
- b. $src(T(m, n)) \leq \frac{m+n}{2}$, jika m dan n keduanya genap

- c. $src(T(m, n)) \leq \left(\frac{m+n}{2}\right) + 1$, jika m dan n keduanya ganjil

Bukti:

- a. Misalkan $T(m, n)$ dengan m dan n berbeda paritas,

Ditinjau 2 kasus,

Kasus 1 : m ganjil dan n genap

Pikirkan sebuah pewarnaan-sisi W pada $T(m, n)$ sebagai berikut :

- 1) Sisi horisontal diwarnai seperti berikut ini.
Untuk $1 \leq i \leq m$,

$$W(v_{i,j}v_{i,j+1}) = j, 1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor;$$

$$W\left(v_{i, \frac{n}{2}+j}v_{i, \frac{n}{2}+j+1}\right) = j, 1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1;$$

- 2) Sisi pembungkus horisontal diwarnai dengan warna $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

- 3) Sisi vertikal diwarnai seperti berikut ini.
Untuk $1 \leq j \leq n$,

$$W(v_{i,j}v_{i+1,j}) = k, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + i \leq k \leq \left\lfloor \frac{m+n}{2} \right\rfloor, 1 \leq i \leq \frac{m}{2};$$

$$W\left(v_{\frac{m-1}{2}+i,j}v_{\frac{m-1}{2}+i+1,j}\right) = k, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + i \leq k \leq \left\lfloor \frac{m+n}{2} \right\rfloor - 2, 1 \leq i \leq \frac{m}{2} - 2;$$

- 4) Sisi pembungkus vertikal diwarnai dengan warna $\left\lfloor \frac{m+n}{2} \right\rfloor - 1$

Perhatikan bahwa W adalah sebuah pewarnaan sisi pada graf $T(m, n)$ dengan menggunakan $\left\lfloor \frac{m+n}{2} \right\rfloor$ warna. Graf $T(m, n)$ terhadap pewarnaan tersebut terhubung pelangi kuat. Menurut Definisi 2.1

$$src(T(m, n)) \leq \left\lfloor \frac{m+n}{2} \right\rfloor. \dots \dots (1)$$

Kasus 2 : m genap dan n ganjil

Pikirkan sebuah pewarnaan-sisi W pada $T(m, n)$ sebagai berikut :

- 1) Sisi horisontal diwarnai seperti berikut ini.
Untuk $1 \leq i \leq m$,

$$W(v_{i,j}v_{i,j+1}) = j, 1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor;$$

$$W\left(v_{i, \frac{n-1}{2}+j}v_{i, \frac{n-1}{2}+j+1}\right) = j, 1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2;$$

- 2) Sisi pembungkus horisontal diwarnai dengan warna $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$

- 3) Sisi vertikal diwarnai seperti berikut ini.
Untuk $1 \leq j \leq n$,

$$W(v_{i,j}v_{i+1,j}) = k, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + i \leq k \leq \left\lfloor \frac{m+n}{2} \right\rfloor, 1 \leq i \leq \frac{m}{2};$$

$$W\left(v_{\frac{m-1}{2}+i,j}v_{\frac{m-1}{2}+i+1,j}\right) = k, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + i \leq k \leq \left\lfloor \frac{m+n}{2} \right\rfloor - 1, 1 \leq i \leq \frac{m}{2} - 1;$$

- 4) Sisi pembungkus vertikal diwarnai dengan warna $\left\lfloor \frac{m+n}{2} \right\rfloor$

Perhatikan bahwa W adalah sebuah pewarnaan sisi pada graf $T(m, n)$ dengan menggunakan $\left\lfloor \frac{m+n}{2} \right\rfloor$ warna. Graf $T(m, n)$ terhadap pewarnaan tersebut terhubung pelangi kuat. Menurut Definisi 2.1

$$src(T(m, n)) \leq \left\lfloor \frac{m+n}{2} \right\rfloor. \dots \dots (2)$$

Dari (1) dan (2), didapatkan simpulan

$$src(T(m, n)) \leq \left\lfloor \frac{m+n}{2} \right\rfloor$$

Lemma terbukti. ■

- b. Misalkan $T(m, n)$ dengan m dan n keduanya bilangan genap.

Pikirkan sebuah pewarnaan-sisi W pada $T(m, n)$ sebagai berikut.

- 1) Sisi horisontal diwarnai seperti berikut ini.
Untuk $1 \leq i \leq m$,

$$W(v_{i,j}v_{i,j+1}) = j, 1 \leq j \leq \frac{n}{2};$$

$$W\left(v_{i, \frac{n}{2}+j}v_{i, \frac{n}{2}+j+1}\right) = j, 1 \leq j \leq \frac{n}{2} - 1;$$

- 2) Sisi pembungkus horisontal diwarnai dengan warna $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

- 3) Sisi vertikal diwarnai seperti berikut ini.
Untuk $1 \leq j \leq n$,

$$W(v_{i,j}v_{i+1,j}) = k, \frac{n}{2} + i \leq k \leq \frac{m+n}{2}, 1 \leq i \leq \frac{m}{2};$$

$$W\left(v_{\frac{m-1}{2}+i,j}v_{\frac{m-1}{2}+i+1,j}\right) = k, \frac{n}{2} + i \leq k \leq \frac{m+n}{2} - 1, 1 \leq i \leq \frac{m}{2} - 1;$$

- 4) Sisi pembungkus vertikal diwarnai dengan warna $\frac{m+n}{2}$

Perhatikan bahwa W adalah sebuah pewarnaan sisi pada graf $T(m, n)$ dengan menggunakan $\frac{m+n}{2}$ warna. Graf $T(m, n)$ terhadap pewarnaan tersebut terhubung pelangi kuat. Menurut Definisi 2.1

$$src(T(m, n)) \leq \frac{m+n}{2}$$

Lemma terbukti. ■

- c. Misalkan $T(m, n)$ dengan m dan n keduanya bilangan ganjil.

Pikirkan sebuah pewarnaan-sisi W pada $T(m, n)$ sebagai berikut :

- 1) Sisi horisontal diwarnai seperti berikut ini.
Untuk $1 \leq i \leq m$,

$$W(v_{i,j}v_{i,j+1}) = j, 1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor;$$

$$W\left(v_{i, \frac{n}{2}+j}v_{i, \frac{n}{2}+j+1}\right) = j, 1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2;$$

- 2) Sisi pembungkus horisontal diwarnai dengan warna $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$
- 3) Sisi vertikal diwarnai seperti berikut ini.
Untuk $1 \leq j \leq n$,

$$W(v_{i,j}v_{i+1,j}) = k, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + i \leq k \leq \lfloor \frac{m+n}{2} \rfloor + 1, 1 \leq i \leq \frac{m}{2} + 1;$$

$$W(v_{\frac{m-1}{2}+i,j}v_{\frac{m-1}{2}+i+1,j}) = k, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + i \leq k \leq \lfloor \frac{m+n}{2} \rfloor - 1, 1 \leq i \leq \frac{m}{2} - 1;$$

- 4) Sisi pembungkus vertikal diwarnai dengan warna $\lfloor \frac{m+n}{2} \rfloor$

Perhatikan bahwa W adalah sebuah pewarnaan sisi pada graf $T(m, n)$ dengan menggunakan $\lfloor \frac{m+n}{2} \rfloor + 1 = \binom{m+n}{2} + 1$ warna. Graf $T(m, n)$ terhadap pewarnaan tersebut terhubung pelangi kuat. Menurut Definisi 2.1

$$src(T(m, n)) \leq \binom{m+n}{2} + 1$$

Lemma terbukti. ■

4. PENUTUP

SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan, didapatkan simpulan sebagai berikut.

1. Jika $BF(n)$ graf kupu-kupu berdimensi- n , maka $src(BF(n)) \leq n(2^{n-1} + 1)$.
2. Jika $BB(n)$ graf Benes berdimensi- n , maka $src(BB(n)) \leq n(2^n + 1)$.
3. $src(T(3,3)) = 2$.
4. Untuk $n \geq 4$, $src(T(3, n)) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.
5. Untuk $m \geq 4$, $src(T(m, 3)) \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$.
6. Untuk $m > 3$ dan $n > 3$, $src(T(m, n)) \leq \lfloor \frac{m+n}{2} \rfloor$, jika m dan n berbeda paritas.
7. Untuk $m > 3$ dan $n > 3$, $src(T(m, n)) \leq \frac{m+n}{2}$, jika m dan n keduanya genap.
8. Untuk $m > 3$ dan $n > 3$, $src(T(m, n)) \leq \binom{m+n}{2} + 1$, jika m dan n keduanya ganjil.

SARAN

Pada penelitian ini, telah dibahas mengenai bilangan keterhubungan pelangi kuat beberapa graf yang dapat diaplikasikan pada jaringan interkoneksi. Oleh karena itu, sebagai saran untuk pengembangan lebih lanjut dapat dilakukan

penelitian tentang graf pada jaringan interkoneksi yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

- Arputhamary, A., & Mercy, M. H. (2015). Strong Rainbow Edge Coloring of Some Interconnection Networks. *Procedia Computer Science*, 338-347.
- Benes, V. E. (1964). Permutation Groups, Complexes, and Rearrangeable Connecting Networks. *The Bell system technical Journal*, 1619-1640.
- Budayasa, I. K. (2007). *Teori Graf dan Aplikasinya*. Surabaya: UNESA University Press.
- Chartrand, G., Johns, G. L., McKeon, K. A., Zhang, P. (2008). Rainbow Connection in Graph. *Mathematica Bohemica*, 133(1), 85-98.
- Clancy, K., Haythrope, M., & Newcombe, A. (2020). A Survey of Graphs with Known or Bounded Crossing Numbers. *Australian Journal of Combinatorics*, 1-89.
- K. Karunakaran., Sumathi, P., & Nandakumar, V. (2015). Theory and Applications of Butterfly Network in Graph Theory. *International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology* (vol. 4, Issue 6).
- Maulani, A. (2019). Bilangan Keterhubungan Pelangi Dan Keterhubungan Pelangi Kuat Pada Beberapa Kelas Graf Korona. *Jurnal statistika dan Matematika*, 1(1), 117-130.
- Manuel, P. D., I, Mostafa., Rajasingh, I., & Rajan B. (2006). An efficient representation of Benes networks and its applications. *Journal of Discrete Algorithms*, 11-19.
- William, A., & Shanthakumari, A. (2012). Minimum Cycle Covers of Butterfly and Benes Network. *International Journal of Mathematics and Soft Computing*, 2(1), 93-98.
- Xu, Junming. (2001). Topoloical Structure and Analysis of Interconnection Networks. *Network Theory and Applications*, (vol 7).