MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115

Volume 10 *No* 01
Tahun 2022

DEKOMPOSISI GRAF BINTANG, GRAF BINTANG GANDA, DAN GRAF SAPU

Merlynda Marcellina Natashia Bangkit
Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia
email: merlynda.18016@mhs.unesa.ac.id

Budi Rahadjeng
Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia
Penulis Korespondensi : budirahadjeng@unesa.ac.id

Abstrak

Salah satu cabang ilmu dari Matematika ialah Teori Graf. Salah satu topik dari Teori graf yang menarik untuk dibahas ialah Dekomposisi Graf. Dekomposisi suatu graf G ialah koleksi $\{H_i\}$ dari subgraf G sedemikian hingga $H_i = \langle E_i \rangle$ dimana E_i subset dari $E(G)$. Partisi dari $E(G)$ adalah $\{E_i\}$. Jika $\{H_i\}$ adalah sebuah dekomposisi dari G, maka G dapat dinyatakan sebagai $H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus \dots \oplus H_t$ yang disebut penjumlahan sisi, dimana $|\{H_i\}| = t$. Jika diberikan graf bintang S_n dengan $n \geq 1$ maka dekomposisinya berupa K_2 dan P_3 sehingga disebut $K_2 -$ dekomposisi dan $P_3 -$ dekomposisi untuk n genap. Jika diberikan graf bintang ganda $S_{n,m}$ dengan $n \geq 1$ dan $m \geq 1$ maka dekomposisinya berupa K_2 sehingga disebut $K_2 -$ dekomposisi. Jika diberikan graf sapu $B_{n,m}$ dengan $n \geq 1$ dan $m \geq 1$ maka dekomposisinya berupa K_2 sehingga disebut $K_2 -$ dekomposisi.

Kata Kunci: dekomposisi, graf bintang, graf bintang ganda, graf sapu

Abstract

One of the branches of mathematics is graph theory. One of the topics of graph theory that is interesting to discuss is Graph Decomposition. The decomposition of a graph G is a collection of $\{H_i\}$ *of subgraph* G *such that* $H_i = \langle E_i \rangle$ *where* E_i *is a subset of* $E(G)$. *The partition of* $E(G)$ *is* $\{E_i\}$. *If* $\{H_i\}$ *is a decomposition of* G, *then* G *can be expressed as* $H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus \dots \oplus H_t$ *which is called side sum, where* $|\{H_i\}| = t$. *If given a star graph* S_n *with* $n \geq 3$ *then the decomposition is in the form of* K_2 *and* P_3 *so it is called* $K_2 -$ *decomposition and* $P_3 -$ *decomposition. If given a double star graph* $S_{n,m}$ *with* $n \geq 1$ *and* $m \geq 1$ *then the decomposition is in the form of* K_2 *so it is called* $K_2 -$ *decomposition. If given a sweep graph* $B_{n,m}$ *with* $n \geq 1$ *and* $m \geq 1$ *then the decomposition is in the form of* K_2 *so it is called* $K_2 -$ *decomposition.*

Keywords: *decomposition, star graph, double star graph, sweep graph*

PENDAHULUAN

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu pengetahuan yang memiliki banyak manfaat guna menyelesaikan suatu masalah. Matematika megalami perkembangan yang cukup pesat sebagai bentuk penyesuaian dengan masalah yang ada. Salah satu cabang ilmu dari matematika yang mengalami banyak perkembangan ialah Teori Graf.

Tokoh asal Swiss bernama Leonard Euler merupakan matematikawan pertama yang mengenalkan Teori Graf pada tahun 1736. Euler mencoba menyelesaikan masalah jembatan Königsberg dan memodelkannya dalam bentuk graf. Dari sini semakin banyak pertanyaan yang muncul dari matematikawan mengenai berbagai masalah yang dapat dimodelkan dalam graf. Hal ini menyebabkan sub materi dari graf juga mengalami perkembangan, salah satunya tentang dekomposisi graf.

Dekomposisi suatu graf G ialah koleksi $\{H_i\}$ dari subgraf G sedemikian hingga $H_i = \langle E_i \rangle$ dimana E_i subset dari $E(G)$. Partisi dari $E(G)$ adalah $\{E_i\}$. Jika $\{H_i\}$ adalah sebuah dekomposisi dari G, maka G dapat dinyatakan sebagai $H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus \dots \oplus H_t$ atau penjumlahan sisi, dimana $|\{H_i\}| = t$. Cukup banyak sumber yang membahas tentang dekomposisi graf dimana artikel pertama yang membahas masalah ini muncul pada tahun 1991 dengan judul "Decomposition of regular bipartite graphs" oleh Jacobson, M.S., Truszcynski, M. dan Tuza, Zs. Pada artikel tersebut penulis membahas mengenai pohon dan hutan yang berasal dari dekomposisi isomorfik graf bipartit biasa. Selain itu terdapat artikel dengan judul "Dekomposisi Graf Komplit' (2009) oleh Rina Munawarah,"Dekomposisi

Graf Sikel, Graf Roda, Graf Gir dan Graf Persahabatan" (2014) oleh Nur Rahmawati, "Dekomposisi Graf Kembang Api $F_{n,k}$" (2019) oleh Soraya Fajarwati dimana beberapa judul tersebut membahas tentang bagaimana menemukan dekomposisi suatu graf serta teorema-teorema yang berlaku. Topik ini sangat menarik untuk dipelajari lebih lanjut sehingga pada artikel ini akan dikaji mengenai Dekomposisi Graf Bintang, Graf Bintang Ganda, dan Graf Sapu.

KAJIAN TEORI

Definisi 1

Suatu graf G terdiri dari dua himpunan yaitu $V(G)$, merupakan himpunan berhingga dan tak kosong dari obyek yang dinamai titik sehingga $V(G)$ disebut himpunan titik G serta $E(G)$, merupakan himpunan berhingga (dapat kosong) sedemikian hingga setiap elemen e dalam $E(G)$ merupakan pasangan tak berurutan dari titik-titik $V(G)$ sehingga $E(G)$ disebut himpunan sisi G (Budayasa, 2007).

Definisi 2

Sebuah Graf komplit K_n(memiliki n titik) merupakan graf sederhana dimana sebuah sisi menghubungkan setiap dua titik berbeda (Budayasa, 2007).

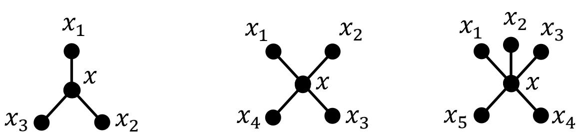
Definisi 3

Pohon (*Tree*) merupakan graf terhubung dan tidak memiliki sikel (Budayasa, 2007). Keluarga graf pohon ialah graf yang memiliki sifat sama seperti pohon. Pada graf pohon sebuah titik berderajat satu disebut daun (Rohmatillah, 2018; Gross, 2006).

Definisi 4

Graf Bintang S_n merupakan keluarga dari graf pohon. Graf bintang terdiri dari satu titik pusat yang terhubung dengan dengan sejumlah n daun. Graf bintang S_n memiliki $n+1$ titik dan n sisi (Muzayyin, 2012; Choudum dan Kishore, 1996).

Contoh :



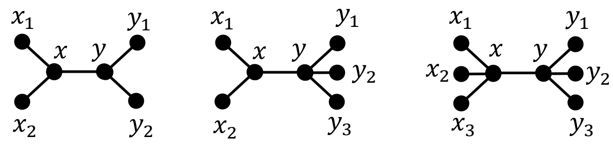
(i) (ii) (iii)

Gambar 1 Graf (i) S_3, Graf (ii) S_4, Graf (iii) S_5 (**Sumber** : dokumentasi pribadi)

Definisi 5

Graf Bintang Ganda $S_{n,m}$ merupakan keluarga dari graf pohon. Graf bintang ganda adalah graf yang memiliki dua titik pusat bertetangga yaitu x dan y, serta terdapat n daun, $x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n$ yang bertetangga dengan x kemudian m daun, $y_1 ; y_2 ; \dots ; y_m$ yang bertetangga dengan y (Rohmatillah, 2018; Wallis dan Marr, 2013).

Contoh :



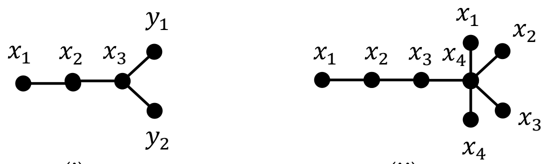
(i) (ii) (iii)

Gambar 2 Graf (i) $S_{2,2}$, Graf (ii) $S_{2,3}$, Graf (iii) $S_{3,3}$ (**Sumber** : dokumentasi pribadi)

Definisi 6

Graf Sapu $B_{n,m}$ adalah graf khusus dari graf *caterpillar* (Graf *caterpillar* juga merupakan keluarga graf pohon) dimana sejumlah m titik hanya dihubungkan pada satu titik ujung dari tulang belakang P_n (Muzayyin, 2012; Sevenhot, 2010).

Contoh :



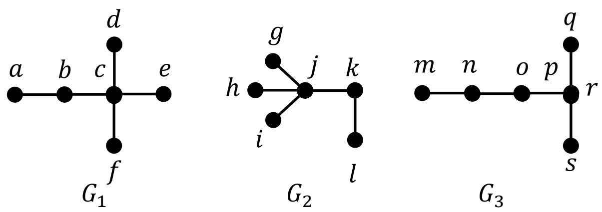
(i) (ii)

Gambar 3 Graf (i) $B_{3,2}$ dan Graf (ii) $B_{4,4}$ (**Sumber** : dokumentasi pribadi)

Definisi 7

Dua graf G dan H disebut isomorfik, dinyatakan $G \cong H$, jika ada korespondensi satu-satu antara $V(G)$ dan $V(H)$ serta banyaknya sisi yang menghubungkan dua titik di G (dinyatakan dengan u dan v) sama dengan banyaknya sisi yang menghubungkan dua titik yang bersesuaian dengan titik u dan titik v di H. (Budayasa, 2007).

Contoh :



Gambar 4 Graf G_1 isomorfik graf G_2 ; graf G_1 tidak isomorfik graf G_3 (**Sumber** : dokumentasi pribadi)

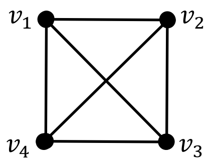
Definisi 8

Graf G dapat difaktorkan dimana faktor-faktor tersebut adalah sisi yang saling lepas dan dinyatakan sebagai G_1, G_2, …, G_t serta $\bigcup_{i=1}^{t} E(G_i) = E(G)$. Jika G difaktorkan ke dalam G_1, G_2, …, G_t, maka dapat dinyatakan sebagai $G = G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 \oplus \ldots \oplus G_t$ yang merupakan faktorisasi dari G.

G disebut $k-$ faktor jika terdapat faktorisasi dari graf G sedemikian hingga untuk setiap faktor adalah graf bagian rentang beraturan – k. Jika G adalah graf $k-$ faktor maka G adalah graf beraturan $-r$ untuk bilangan bulat r yang merupakan kelipatan dari k.

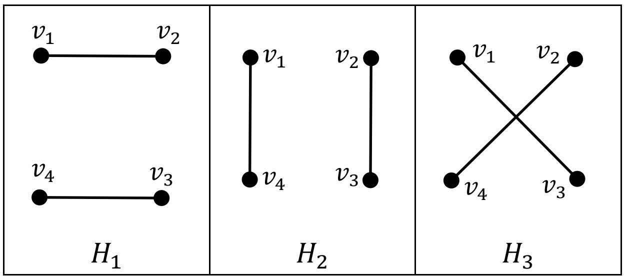
G dikatakan terfaktorisasi – H serta G memiliki faktor yang isomorfik dengan H jika G_1, G_2, …, G_t merupakan faktor dari graf G dimana $G_i = H$ untuk suatu graf H dan untuk setiap bilangan bulat i, $1 \le i \le t$ (Rahmawati, 2014).

Contoh :



Gambar 5 Graf G (K_4) (**Sumber** : Rahmawati, 2014)

Bentuk faktorisasi graf G (K_4) adalah sebagai berikut:



Gambar 6 Faktorisasi Graf G (K_4) (**Sumber** : Rahmawati, 2014)

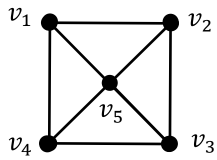
Definisi 9

Dekomposisi graf G adalah koleksi subgraf tak kosong dari G, dinotasikan $\{H_i\}$, sedemikian hingga $H_i = \langle E_i \rangle$, untuk suatu subgraf tak kosong E_i dari $E(G)$, dimana $\{E_i\}$ adalah partisi dari $E(G)$ dan H_i tidak memuat titik terisolasi. $\{H_i\}$ dapat dinotasikan $G = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus \ldots \oplus H_t$ sama seperti pada faktorisasi. Jika G didekomposisi ke dalam subgraf $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_t$ di mana $|\{H_i\}| = t$, maka $G = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus \ldots \oplus H_t$ adalah dekomposisi dari graf G.

Suatu graf G dapat di dekomposisikan menjadi subgraf $H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus \ldots \oplus H_t$ jika dua buah subgraf H_i dan H_j isomorfis serta tidak terdapat sisi yang sama $(E(H_i) \neq E(H_j))$ sehingga penjumlahan subgraf H_i sama dengan graf G.

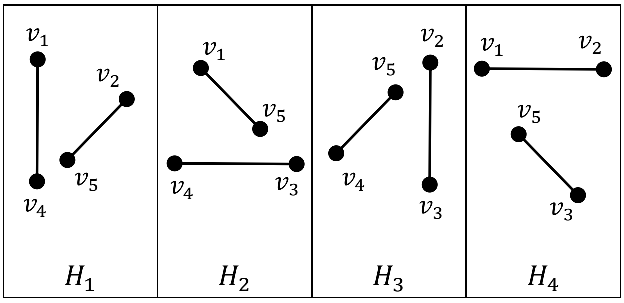
G dikatakan H – dekomposisi jika $\{H_i\}$ merupakan dekomposisi dari graf G sedemikian hingga $H_i = H$ untuk sebuah graf H dan untuk setiap i. Jika G merupakan graf H – dekomposisi, maka dapat dinyatakan sebagai $H|G$ sehingga H dikatakan pembagi banyaknya sisi G serta G adalah kelipatan dari H. Untuk setiap graf (tak kosong) merupakan K_2 – dekomposisi (Rahmawati, 2014).

Contoh :



Gambar 7 Graf G (**Sumber** : dokumentasi pribadi)

Partisi dari graf G adalah sebagai berikut :



Gambar 8 Partisi sisi-sisi dari Graf G (**Sumber** : dokumentasi pribadi)

Dari **Gambar 8** diperoleh 4 partisi yaitu H_1, H_2, H_3, H_4 dimana tiap partisi terdiri dari 2 sisi dengan $H_i \cong 2K_2$. Karena $G = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4$ maka G adalah $2K_2-$ dekomposisi.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dekomposisi Graf Bintang S_n

Diberikan graf bintang S_n dengan $n \ge 1$. Graf S_n dipartisi menjadi subgraf H_i berupa K_2 dan P_3 sehingga diperoleh dekomposisi sebagai berikut.

Tabel 1 Graf bintang S_n dengan $n \ge 1$

Graf Bintang	Dekomposisi	H – dekomposisi	Banyak titik dan sisi
S_1	$S_1 = H_1$ (1 partisi)	$H_i = K_2$	$\lvert V(H_i)\rvert = 2$ $\lvert E(H_i)\rvert = 1$
S_2	$S_3 = H_1$ (1 partisi)	$H_i = P_3$	$\lvert V(H_i)\rvert = 2$ $\lvert E(H_i)\rvert = 1$

S_3	$S_3 = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$ (3 partisi)	$H_i = K_2$	$\lvert V(H_i)\rvert = 2$ $\lvert E(H_i)\rvert = 1$
S_4	$S_4 = H_1 \oplus H_2$ (2 partisi)	$H_i = P_3$	$\lvert V(H_i)\rvert = 3$ $\lvert E(H_i)\rvert = 2$
S_5	$S_5 = H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_5$ (5 partisi)	$H_i = K_2$	$\lvert V(H_i)\rvert = 2$ $\lvert E(H_i)\rvert = 1$
S_6	$S_6 = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$ (3 partisi)	$H_i = P_3$	$\lvert V(H_i)\rvert = 3$ $\lvert E(H_i)\rvert = 2$
S_7	$S_7 = H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_7$ (7 partisi)	$H_i = K_2$	$\lvert V(H_i)\rvert = 2$ $\lvert E(H_i)\rvert = 1$
S_8	$S_8 = H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_4$ (4 partisi)	$H_i = P_3$	$\lvert V(H_i)\rvert = 3$ $\lvert E(H_i)\rvert = 2$
S_9	$S_8 = H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_9$ (9 partisi)	$H_i = K_2$	$\lvert V(H_i)\rvert = 2$ $\lvert E(H_i)\rvert = 1$
S_n	$S_n = H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_n$ (n partisi)	$H_i = K_2$	$\lvert V(H_i)\rvert = 2$ $\lvert E(H_i)\rvert = 1$
S_n, $n =$ genap	$S_n = H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_{n/2}$ (n/2 partisi)	$H_i = P_3$	$\lvert V(H_i)\rvert = 3$ $\lvert E(H_i)\rvert = 2$

Berdasarkan **Tabel 1** diperoleh teorema sebagai berikut.

Torema 1

Graf Bintang S_n dengan $n \geq 1$ merupakan $K_2 -$ dekomposisi.

Bukti :

Ambil sebarang graf bintang S_n dengan $n \geq 3$.

Misal $V(S_n) = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n+1}\}$ dan $E(S_n) = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$

Partisikan graf bintang S_n menjadi subgraf $H_i = \langle E_i \rangle$ yang berupa K_2.

Berdasarkan **Tabel 1**, misalkan graf bintang $S_n = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus \ldots \oplus H_n$.

Partisi graf S_n adalah sebagai berikut :

Untuk $i = 1,2,3, \ldots, n$ diperoleh subgraf $H_i = \langle \{v_1, v_{i+1}\} \rangle$.

Untuk setiap $i = 1,2,3, \ldots, n$ dan $j = 1,2,3, \ldots, n$ subgraf H_i dikatakan saling lepas yaitu jika $i \neq j$ maka $H_i \cap H_j = \emptyset$ sehingga akan dibuktikan jika $H_i \cap H_j \neq \emptyset$ maka $i = j$.

Diketahui $H_i \cap H_j \neq \emptyset$ maka $\exists e_k \in H_i \cap H_j, \exists k \in \mathbb{N}$. Hal ini berarti $e_k \in H_i$ dan $e_k \in H_j$. Berdasarkan definisi jika $e_k \in H_i$ maka $e_k = (v_1, v_{i+1})$ dan jika $e_k \in H_j$ maka $e_k = (v_1, v_{j+1})$. Akibatnya, $e_k = (v_1, v_{i+1}) = (v_1, v_{j+1})$ maka $i = j$.

Jadi terbukti bahwa subgraf H_i saling lepas yaitu jika $i \neq j$ maka $H_i \cap H_j = \emptyset$. Partisi graf $S_n = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus \ldots \oplus H_n$ dan H_i merupakan K_2 maka graf S_n merupakan $K_2 -$ dekomposisi.

Torema 2

Graf Bintang S_n dengan $n \geq 2$ dan n genap merupakan $P_3 -$ dekomposisi.

Bukti :

Ambil sebarang graf bintang S_n dengan $n \geq 3$ dan n genap.

Misal $V(S_n) = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n+1}\}$ dan $E(S_n) = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$

Partisikan graf bintang S_n menjadi subgraf $H_i = \langle E_i \rangle$ yang berupa P_3.

Berdasarkan **Tabel 1**, misalkan graf bintang $S_n = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4 \oplus \ldots \oplus H_{n/2}$.

Partisi graf S_n adalah sebagai berikut :

Untuk $i = 1,2,3, \ldots, n/2$ diperoleh subgraf $H_i = \langle \{v_{2i}, v_1, v_{2i+1}\} \rangle$.

Untuk setiap $i = 1,2,3, \ldots, n/2$ dan $j = 1,2,3, \ldots, n/2$ subgraf H_i dikatakan saling lepas yaitu jika $i \neq j$ maka $H_i \cap H_j = \emptyset$ sehingga akan dibuktikan jika $H_i \cap H_j \neq \emptyset$ maka $i = j$.

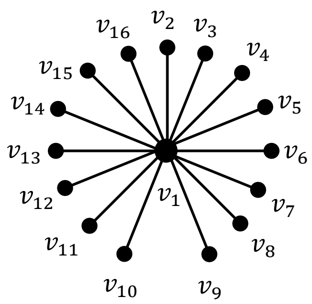
Diketahui $H_i \cap H_j \neq \emptyset$ maka $\exists e_k \in H_i \cap H_j, \exists k \in \mathbb{N}$. Dari sini diperoleh $e_k \in H_i$ dan $e_k \in H_j$. Berdasarkan definisi jika $e_k \in H_i$ maka $e_k = (v_{2i}, v_1, v_{2i+1})$ dan jika $e_k \in H_j$ maka $e_k = (v_{2j}, v_1, v_{2j+1})$. Akibatnya, $e_k = (v_{2i}, v_1, v_{2i+1}) = (v_{2j}, v_1, v_{2j+1})$ maka $i = j$.

Jadi terbukti bahwa subgraf H_i saling lepas yaitu jika $i \neq j$ maka $H_i \cap H_j = \emptyset$. Partisi graf $S_n = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus \ldots \oplus H_{n/2}$ dan H_i merupakan P_3 maka graf S_n merupakan $P_3 -$ dekomposisi.

Contoh 1 :

Diberikan graf bintang S_n ; $n = 15$

Misal $G = S_{15}$, dapat digambar sebagai berikut,



Titik – titik dari G adalah $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}\}$. Partisi dari G adalah:
Untuk $i = 1,2,3, \dots, 15$
Menurut **Teorema 1** subgraf H_i ditulis dengan aturan $H_i = \langle\{v_1, v_{i+1}\}\rangle$ maka diperoleh subgraf sebagai berikut,
$H_1 = \{(v_1, v_2)\}$
$H_2 = \{(v_1, v_3)\}$
$H_3 = \{(v_1, v_3)\}$
$\vdots$
$H_{15} = \{(v_1, v_{16})\}$
Karena $G = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus \dots \oplus H_{15}$ dimana setiap subgraf H_i berupa K_2 maka S_{15} merupakan $K_2 -$ dekomposisi.

Dekomposisi Graf Bintang Ganda $S_{n,m}$
Diberikan graf bintang ganda $S_{n,m}$ dengan $n \geq 1$ dan $m \geq 1$. Graf $S_{n,m}$ dipartisi menjadi subgraf H_i berupa K_2 sehingga diperoleh dekomposisi sebagai berikut.

Tabel 2 Dekomposisi dari graf bintang ganda $S_{n,m}$ dengan $n \geq 1$ dan $m \geq 1$

Graf Bintang Ganda	Dekomposisi	H–dekomposisi	Banyak titik dan sisi
$S_{2,2}$	$S_{2,2} = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_5$ (5 partisi)	$H_i = K_2$	$\lvert V(H_i)\rvert = 2$ $\lvert E(H_i)\rvert = 1$
$S_{2,3}$	$S_{2,3} = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_6$ (6 partisi)	$H_i = K_2$	$\lvert V(H_i)\rvert = 2$ $\lvert E(H_i)\rvert = 1$
$S_{2,4}$	$S_{2,4} = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_7$ (7 partisi)	$H_i = K_2$	$\lvert V(H_i)\rvert = 2$ $\lvert E(H_i)\rvert = 1$
$S_{3,3}$	$S_{3,3} = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_7$ (7 partisi)	$H_i = K_2$	$\lvert V(H_i)\rvert = 2$ $\lvert E(H_i)\rvert = 1$
$S_{5,3}$	$S_{5,3} = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_9$ (9 partisi)	$H_i = K_2$	$\lvert V(H_i)\rvert = 2$ $\lvert E(H_i)\rvert = 1$
$S_{6,5}$	$S_{6,5} = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_{12}$ (12 partisi)	$H_i = K_2$	$\lvert V(H_i)\rvert = 2$ $\lvert E(H_i)\rvert = 1$
$S_{5,8}$	$S_{5,8} = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_{14}$ (14 partisi)	$H_i = K_2$	$\lvert V(H_i)\rvert = 2$ $\lvert E(H_i)\rvert = 1$
$S_{7,6}$	$S_{7,6} = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_{14}$ (14 partisi)	$H_i = K_2$	$\lvert V(H_i)\rvert = 2$ $\lvert E(H_i)\rvert = 1$
$S_{n,m}$	$S_{n,m} = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_{n+m+1}$ (n+m+1 partisi)	$H_i = K_2$	$\lvert V(H_i)\rvert = 2$ $\lvert E(H_i)\rvert = 1$

Berdasarkan **Tabel 1** diperoleh teorema sebagai berikut.
Torema 3
Graf Bintang Ganda $S_{n,m}$ dengan $n \geq 1$ dan $m \geq 1$ merupakan $K_2 -$ dekomposisi.
Bukti :
Ambil sebarang graf bintang ganda $S_{n,m}$ dengan $n, m \geq 2$.
Misal $V(S_{n,m}) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n+m+2}\}$ dan $E(S_{n,m}) = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_{n+m+1}\}$
Partisikan graf bintang ganda $S_{n,m}$ menjadi subgraf $H_i = \langle E_i\rangle$ yang berupa K_2.
Berdasarkan **Tabel 2**, misalkan graf bintang ganda $S_{n,m} = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus \dots \oplus H_{n+m+1}$.
Partisi graf $S_{n,m}$ adalah sebagai berikut :
Karena adanya perbedaan pola, maka $i = 1,2,3, \dots, (n+m+1)$ akan dibagi menjadi dua bagian:

- Untuk $i = 1,2,3, \dots, n$
  Subgraf $H_i = \langle\{v_i, v_{n+1}\}\rangle$
- Untuk $i = (n+1), \dots, (n+m), (n+m+1)$
  Subgraf $H_i = \langle\{v_i, v_{n+m+2}\}\rangle$

Untuk setiap $i = 1,2,3, \dots, (n+m+1)$ dan $j = 1,2,3, \dots, (n+m+1)$, subgraf H_i dikatakan saling lepas yaitu jika $i \neq j$ sehingga akan dibuktikan jika $H_i \cap H_j \neq \emptyset$ maka $i = j$.

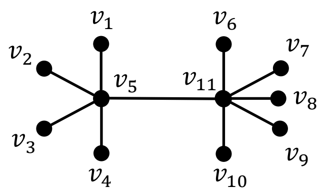
- Untuk $i = 1,2,3, \dots, n$ dan $j = 1,2,3, \dots, n$
  Diketahui $H_i \cap H_j \neq \emptyset$ maka $\exists e_k \in H_i \cap H_j, \exists k \in \mathbb{N}$. Dari sini diperoleh $e_k \in H_i$ dan $e_k \in H_j$. Berdasarkan definisi jika $e_k \in H_i$ maka $e_k = (v_i, v_{n+1})$ dan jika $e_k \in H_j$ maka $e_k = (v_j, v_{n+1})$. Akibatnya, $e_k = (v_i, v_{n+1}) = (v_j, v_{n+1})$ maka $i = j$.
- Untuk $i = (n+1), \dots, (n+m), (n+m+1)$ dan $j = (n+1), \dots, (n+m), (n+m+1)$
  Diketahui $H_i \cap H_j \neq \emptyset$ maka $\exists e_k \in H_i \cap H_j, \exists k \in \mathbb{N}$. Dari sini diperoleh $e_k \in H_i$ dan $e_k \in H_j$. Berdasarkan definisi jika $e_k \in H_i$ maka $e_k = (v_i, v_{n+m+2})$ dan jika $e_k \in H_j$ maka $e_k = (v_j, v_{n+m+2})$. Akibatnya, $e_k = (v_i, v_{n+m+2}) = (v_j, v_{n+m+2})$ maka $i = j$.

Jadi terbukti bahwa subgraf H_i saling lepas yaitu jika $i \neq j$ maka $H_i \cap H_j = \emptyset$. Partisi graf $S_{n,m} = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4 \oplus \dots \oplus H_{n+m+1}$ dan H_i merupakan K_2 maka graf $S_{n,m}$ merupakan $K_2 -$ dekomposisi.

Contoh 2 :

Diberikan graf bintang ganda $S_{n,m}$; $n = 4, m = 5$

Misal $G = S_{4,5}$, dapat digambar sebagai berikut,



Titik – titik dari G adalah $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}$. Karena ada perbedaan pola maka partisi G akan dibagi menjadi dua bagian:

Untuk $i = 1,2,3,4$

Berdasarkan **Teorema 3** subgraf H_i ditulis dengan aturan $H_i = \langle\{v_i, v_{n+1}\}\rangle$ maka diperoleh subgraf sebagai berikut,

$H_1 = \{(v_1, v_5)\}$
$H_2 = \{(v_2, v_5)\}$
$H_3 = \{(v_3, v_5)\}$
$H_4 = \{(v_4, v_5)\}$

Untuk $i = 5,6,7,8,9,10$

Berdasarkan **Teorema 3** subgraf H_i ditulis dengan aturan $H_i = \langle\{v_i, v_{n+m+2}\}\rangle$ maka diperoleh subgraf sebagai berikut,

$H_5 = \{(v_5, v_{11})\}$
$H_6 = \{(v_6, v_{11})\}$
$H_7 = \{(v_7, v_{11})\}$
$H_8 = \{(v_8, v_{11})\}$
$H_9 = \{(v_9, v_{11})\}$
$H_{10} = \{(v_{10}, v_{11})\}$

Karena $G = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4 \oplus H_5 \oplus H_6 \oplus H_7 \oplus H_8 \oplus H_9 \oplus H_{10}$ dimana setiap subgraf H_i berupa K_2 maka $S_{4,5}$ merupakan $K_2 -$ dekomposisi.

Dekomposisi Graf Sapu $B_{n,m}$

Diberikan graf sapu $B_{n,m}$ dengan $n \geq 1$ dan $m \geq 1$. Graf $B_{n,m}$ dipartisi menjadi subgraf H_i berupa K_2 sehingga diperoleh dekomposisi sebagai berikut.

Tabel 3 Graf sapu $B_{n,m}$ dengan $n \geq 1$ dan $m \geq 1$

Graf Sapu	Dekomposisi	H – dekomposisi	Banyak titik dan sisi
$B_{3,2}$	$B_{3,2} = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_4$ (4 partisi)	$Hi = K_2$	$\lvert V(H_i)\rvert = 2$ $\lvert E(H_i)\rvert = 1$
$B_{3,3}$	$B_{3,3} = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_5$ (5 partisi)	$Hi = K_2$	$\lvert V(H_i)\rvert = 2$ $\lvert E(H_i)\rvert = 1$
$B_{3,5}$	$B_{3,5} = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_7$ (7 partisi)	$Hi = K_2$	$\lvert V(H_i)\rvert = 2$ $\lvert E(H_i)\rvert = 1$
$B_{4,3}$	$B_{4,3} = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_6$ (6 partisi)	$Hi = K_2$	$\lvert V(H_i)\rvert = 2$ $\lvert E(H_i)\rvert = 1$
$B_{4,4}$	$B_{4,4} = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_7$ (7 partisi)	$Hi = K_2$	$\lvert V(H_i)\rvert = 2$ $\lvert E(H_i)\rvert = 1$
$B_{5,8}$	$B_{5,8} = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_{12}$ (12 partisi)	$Hi = K_2$	$\lvert V(H_i)\rvert = 2$ $\lvert E(H_i)\rvert = 1$
$B_{6,4}$	$B_{6,4} = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_9$ (9 partisi)	$Hi = K_2$	$\lvert V(H_i)\rvert = 2$ $\lvert E(H_i)\rvert = 1$
$B_{6,7}$	$B_{6,7} = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_{12}$ (12 partisi)	$Hi = K_2$	$\lvert V(H_i)\rvert = 2$ $\lvert E(H_i)\rvert = 1$
$B_{n,m}$	$B_{n,m} = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_{n+m-1}$ (n+m-1 partisi)	$Hi = K_2$	$\lvert V(H_i)\rvert = 2$ $\lvert E(H_i)\rvert = 1$

Berdasarkan **Tabel 3** diperoleh teorema sebagai berikut.

Torema 4

Graf Sapu $B_{n,m}$ dengan $n \geq 1$ dan $m \geq 1$ merupakan $K_2 -$ dekomposisi.

Bukti :

Ambil sebarang graf sapu $B_{n,m}$ dengan $n \geq 3, m \geq 2$ untuk $n, m =$ ganjil atau $n, m =$ genap.

Misal $V(B_{n,m}) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n+m}\}$ dan $E(B_{n,m}) = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_{n+m-1}\}$

Partisikan graf bintang S_n menjadi subgraf $H_i = \langle E_i \rangle$ yang berupa K_2.

Berdasarkan **Tabel 3**, misalkan graf sapu $B_{n,m} = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus \dots \oplus H_{n+m-1}$.

Partisi graf $B_{n,m}$ adalah sebagai berikut :

Karena adanya perbedaan pola, maka $i = 1,2,3, \dots, (n + m - 1)$ akan dibagi menjadi dua bagian:

- Untuk $i = 1,2,3, \dots, n$

  Subgraf $H_i = \langle\{v_i, v_{i+1}\}\rangle$

- Untuk $i = (n+1), \ldots, (n+m-2), (n+m-1)$
  Subgraf $H_i = \langle\{v_{i+1}, v_n\}\rangle$

Untuk setiap $i = 1,2,3, \ldots, (n+m-1)$ dan $j = 1,2,3, \ldots, (n+m-1)$, subgraf H_i dikatakan saling lepas yaitu jika $i \neq j$ maka $H_i \cap H_j = \emptyset$ sehingga akan dibuktikan jika $H_i \cap H_j \neq \emptyset$ maka $i = j$.

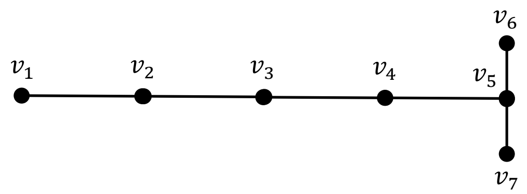
- Untuk $i = 1,2,3, \ldots, n$ dan $j = 1,2,3, \ldots, n$
  Diketahui $H_i \cap H_j \neq \emptyset$ maka $\exists e_k \in H_i \cap H_j, \exists k \in \mathbb{N}$. Dari sini diperoleh $e_k \in H_i$ dan $e_k \in H_j$. Berdasarkan definisi jika $e_k \in H_i$ maka $e_k = (v_i, v_{i+1})$ dan jika $e_k \in H_j$ maka $e_k = (v_j, v_{j+1})$. Akibatnya, $e_k = (v_i, v_{i+1}) = (v_j, v_{j+1})$ maka $i = j$.
- Untuk $i = (n+1), \ldots, (n+m-2), (n+m-1)$ dan $j = (n+1), \ldots, (n+m-2), (n+m-1)$
  Diketahui $H_i \cap H_j \neq \emptyset$ maka $\exists e_k \in H_i \cap H_j, \exists k \in \mathbb{N}$. Dari sini diperoleh $e_k \in H_i$ dan $e_k \in H_j$. Berdasarkan definisi jika $e_k \in H_i$ maka $e_k = (v_{i+1}, v_n)$ dan jika $e_k \in H_j$ maka $e_k = (v_{j+1}, v_n)$. Akibatnya, $e_k = (v_{i+1}, v_n) = (v_{j+1}, v_n)$ maka $i = j$.

Jadi terbukti bahwa subgraf H_i saling lepas yaitu jika $i \neq j$ maka $H_i \cap H_j = \emptyset$. Partisi graf $B_{n,m} = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4 \oplus \ldots \oplus H_{n+m-1}$ dan H_i merupakan K_2 maka graf $B_{n,m}$ merupakan $K_2 -$ dekomposisi.

Contoh 3 :

Diberikan graf sapu $B_{n,m}$; $n = 5, m = 2$

Misal $G = B_{5,2}$, dapat digambar sebagai berikut,



Titik – titik dari G adalah $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$. Karena ada perbedaan pola maka partisi G akan dibagi menjadi dua bagian:

1) Untuk $i = 1,2,3,4,5$
   Menurut **Teorema 4** subgraf H_i ditulis dengan aturan $H_i = \langle\{v_i, v_{i+1}\}\rangle$ maka diperoleh subgraf sebagai berikut,
   $H_1 = \{(v_1, v_2)\}$
   $H_2 = \{(v_2, v_3)\}$
   $H_3 = \{(v_3, v_4)\}$
   $H_4 = \{(v_4, v_5)\}$
   $H_5 = \{(v_5, v_6)\}$
2) Untuk $i = 6$
   Menurut **Teorema 4** subgraf H_i ditulis dengan aturan $H_i = \langle\{v_{i+1}, v_n\}\rangle$ maka $H_6 = \{(v_7, v_5)\}$

Karena $G = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4 \oplus H_5 \oplus H_6$ dimana setiap subgraf H_i berupa K_2 maka $B_{5,2}$ merupakan $K_2 -$ dekomposisi.

PENUTUP

SIMPULAN

Berdasarkan penjabaran pada Hasil dan Pembahasan, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Graf bintang S_n dengan $n \geq 1$ merupakan $K_2 -$ dekomposisi, dengan pola aturan dekomposisi sebagai berikut, Untuk $i = 1,2,3, \ldots, n$ diperoleh subgraf $H_i = \langle\{v_1, v_{i+1}\}\rangle$
2. Graf bintang S_n dengan $n \geq 2$ dan n genap merupakan $P_3 -$ dekomposisi, dengan pola aturan dekomposisi sebagai berikut, untuk $i = 1,2,3, \ldots, n/2$ diperoleh subgraf $H_i = \langle\{v_{2i}, v_1, v_{2i+1}\}\rangle$
3. Graf bintang ganda $S_{n,m}$ dengan $n \geq 1$ dan $m \geq 1$ merupakan $K_2 -$ dekomposisi, dengan pola aturan dekomposisi sebagai berikut, untuk $i = 1,2,3, \ldots, (n+m+1)$ akan dibagi menjadi dua bagian :
   - Untuk $i = 1,2,3, \ldots, n$
     Subgraf $H_i = \langle\{v_i, v_{n+1}\}\rangle$
   - Untuk $i = (n+1), \ldots, (n+m), (n+m+1)$
     Subgraf $H_i = \langle\{v_i, v_{n+m+2}\}\rangle$
4. Graf sapu $B_{n,m}$ dengan $n \geq 1$ $m \geq 1$ merupakan $K_2 -$ dekomposisi, dengan pola aturan dekomposisi sebagai berikut, untuk $i = 1,2,3, \ldots, (n+m-1)$ akan dibagi menjadi dua bagian :
   - Untuk $i = 1,2,3, \ldots, n$
     Subgraf $H_i = \langle\{v_i, v_{i+1}\}\rangle$
   - Untuk $i = (n+1), \ldots, (n+m-2), (n+m-1)$
     Subgraf $H_i = \langle\{v_{i+1}, v_n\}\rangle$

SARAN

Pada artikel ini penulis hanya membahas tentang dekomposisi dari beberapa keluarga graf pohon yaitu graf bintang S_n, graf bintang ganda $S_{n,m}$, dan graf sapu $B_{n,m}$. Dalam artikel terdapat teorema serta aturan yang dapat digunakan sebagai acuan menentukan dekomposisi graf dengan nilai n dan m yang lebih beragam.

Pada dasarnya graf tidak terbatas pada keluarga graf pohon melainkan masih banyak jenis yang lain. Selain itu dekomposisi suatu graf tidak bersifat tunggal sehingga dari graf yang sama dapat diperoleh dekomposisi yang lain berdasarkan nilai n dan m tertentu. Maka dari itu, penulis menyarankan kepada pembaca agar meninjau dekomposisi dari graf lain atau menemukan dekomposisi lain dari graf yang sudah dibahas.

DAFTAR PUSTAKA

Budayasa, Ketut. 2003. Teori Graph dan Aplikasinya. Surabaya: Unesa University Press.

Chartrand, Gery dan Lesniak, Linda. 1986. Graphs and Digraphs Second Edition. California: a Division of Wadsworth, Inc.

Fajarwati, Soraya. 2019. Dekomposisi Graf Kembang Api $F_{n,k}$. Diakses 8 Oktober 2021, https://docplayer.info/208746447-Dekomposisi-graf-kembang-api-fn-k.html.

Jacobson, M.S., Truszczynski, M. & Tuza, Zs. 1991. Decompositions of regular bipartite graphs. Discrete Mathematics, 89, 17-27. Diakses 8 Oktober 2021, https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0012365X9190396J.

Munawarah, Rina. 2009. Dekomposisi Graf Komplit. Diakses 8 Oktober 2021, http://etheses.uin-malang.ac.id/6393/1/04510046.pdf.

Mustofa, Putri Rizqi & Kuswardi, Yemi. 2018. Dekomposisi Graf Matahari $\left(C_n \odot \overline{(K_1)}\right)$. Journal of Mathematics and Mathematica Educattion, 8(1), 20-30. Diakses 9 Oktober 2021, https://jurnal.uns.ac.id/jmme/article/view/25820/18172.

Muzayyin, Ahmad. 2012. Pelabelan Graceful dan Pelabelan $\hat{\rho}$ Pada Graf Pot Budan dan Graf Pohon Palem. Diakses 4 Januari 2022, https://adoc.pub/universitas-indonesia-pelabelan-graceful-dan-pelabelan-pada.html.

Rahmawati, Nur. 2014. Dekomposisi Graf Sikel, Graf Roda, Graf Gir dan Graf Persahabatan, MATHunesa, 3(3). Diakses 28 September 2021, https://media.neliti.com/media/publications/248985-dekomposisi-graf-sikel-graf-roda-graf-gi-9e27a5f8.pdf.

Rohmatillah, Nofrian. 2018. Pewarnaan Lokal Sisi Antimagic Pada Keluarga Graf Pohon Dan Graf Hasil Operasi Shackle. Diakses 14 Oktober 2021, https://repository.unej.ac.id/bitstream/handle/123456789/86477/Nofrian%20Rohmatillah%20-%20141810101004.pdf?sequence=1