MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115

Volume 10 *No* 02
Tahun 2022

`PENENTUAN STRATEGI HEDGING DAN EXERCISE OPSI SAHAM KARYAWAN PADA PASAR DENGAN KONDISI REGIME SWITCHING

Dea Widyananda
Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : dea.18063@mhs.unesa.ac.id

Rudianto Artiono
Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
Penulis Korespondensi: rudiantoartiono@unesa.ac.id

Abstrak

Opsi saham karyawan merupakan salah satu jenis opsi saham yang diberikan oleh perusahaan kepada karyawan sebagai bentuk insentif atau penghargaan. Opsi tersebut memberikan hak kepada karyawan untuk membeli saham dari perusahaan pada periode tertentu sesuai harga yang telah disepakati saat opsi tersebut diberikan. Artikel ini bertujuan untuk memperkirakan *exercise* pemegang opsi saham karyawan dan menentukan strategi *hedging* (lindung nilai) dinamis saat pasar mengalami kondisi *regime switching* yaitu ketika pasar mengalami kondisi yang berbeda, baik saat meningkat maupun ketika menurun sehingga proses *regime switching* dirasa mampu menggambarkan keadaan pasar yang lebih realistis sesuai dengan keadaan ekonomi yang sedang terjadi. Dengan menerapkan metode *utility indifference price, optimal hedging* dan strategi *exercise* akan ditentukan melalui masalah maksimalisasi utilitas. Pendekatan juga dilakukan dengan memperhitungkan sebagian *hedging* yang berkorelasi dengan aset likuid dan *multiple early exercise* opsi saham tipe amerika. Penelitian ini menghasilkan strategi *hedging* yang optimal dan strategi *exercise* yang sesuai dengan kondisi pasar saat ini, yang nantinya akan berguna untuk memperkirakan *exsercise* pemegang opsi saham karyawan di bawah kondisi pasar yang berbeda dan menghitung biaya yang terkait dengan opsi bagi perusahaan.
Kata Kunci: Opsi Saham Karyawan, *Hedging, Exercise, Regime Switching.*

Abstract

Employee stock options are a type of stock options given by companies to employees as incentives or rewards. The option gives the employee the right to buy shares from the company for a certain period at the agreed price when the option is granted. This article aims to estimate the exercise of option holders as well as to determine dynamic hedging strategies when the market undergoes regime changes, namely when the market experiences different conditions, either when it increases or when it decreases, the regime change process is deemed capable of describing a more realistic market situation in accordance with the circumstances. the economy is going on. By applying the utility indifference price method, the optimal hedging and exercise strategy will be determined through the utility maximization problem. The approach is also carried out by estimating partial hedging shares that are correlated with liquid assets and multiple early exercise of American-type options. This research produces optimal hedging strategies and strategy exercises according to current market conditions, which will later be useful for estimating the exercise of stock option holders under different market conditions and calculating the costs associated with options for companies.
Keywords: *Employee Stock Options, Hedging, Exercise, Regime Switching.*

PENDAHULUAN

Dalam dunia keuangan, risiko finansial bukanlah hal yang asing, karena setiap kejadian pasti mempunyai risiko atau kerugian yang tidak diharapkan sehingga seorang investor perlu melakukan *hedging* (lindung nilai) untuk melindungi portofolio dari risiko penurunan harga pasar. *Hedging* merupakan suatu investasi yang dilakukan khususnya untuk mengurangi atau meniadakan risiko pada suatu investasi lain (Mutia, 2021). Salah satu strategi *hedging* yaitu opsi, sebuah kontrak yang memberikan hak kepada investor untuk membeli atau menjual suatu saham pada harga dan waktu tertentu (tidak wajib melakukan hak tersebut) (Fahira, 2021). Opsi saham bila berdasarkan periode waktu dan hak yang dimilki pemegangnya maka opsi terbagi menjadi dua tipe yaitu opsi amerika dan opsi eropa. Opsi tipe amerika merupakan opsi yang mengizinkan pemiliknya melakukan *exercise* opsi tersebut kapan saja baik sebelum jatuh tempo maupun pada saat jatuh tempo. Sedangkan opsi eropa mengizinkan pemilik dari opsi untuk melakukan *exercise* opsi hanya pada saat jatuh tempo (Sawidji Widioatmodjo, 2005: 163). *Exercise* terjadi ketika investor menggunakan posisi opsi mereka yaitu *put option* atau *call option* (Hidayat, W.W, 2019). Investor yang berekspektasi bahwa harga saham akan mengalami kenaikan, akan membeli *call option* dan atau menjual *put option*. Sedangkan, jika investor berekspektasi bahwa harga saham akan turun, maka investor akan membeli *put option* dan atau menjual *call option*. *Call option* (opsi beli) merupakan opsi yang memberikan hak kepada pemegangnya untuk membeli saham dalam jumlah tertentu pada waktu dan harga yang telah disepakati. Sedangkan *put option* (opsi jual) merupakan kebalikan dari *call option* karena opsi ini memberikan hak kepada pemegangnya untuk menjual saham dalam jumlah tertentu pada waktu dan harga yang telah disepakati (Mooy, M. N., Rusgiyono, A., & Rahmawati, R, 2017). Menurut yunita (2018), Opsi saham keryawan merupakan salah satu jenis opsi saham yang diterbitkan oleh perusahaan dan berfungsi sebagai bentuk insentif atau penghargaan ke karyawan. Opsi saham karyawan tidak bisa dipindahkan maupun dijual. Karyawan hanya mempunyai hak (bukan kewjiban) untuk menggunakannya dengan membeli saham perusahaan.

Seiring berjalannya waktu dengan berbagai kejadian yang ada sehingga membuat pertumbuhan ekonomi juga mengalami perubahan, terkadang mengalami kenaikan terkadang pula mengalamai penurunan. Badan Pusat Statistika (BPS) melaporkan pertumbuhan ekonomi Indonesia Kuartal I-2021 turun sebesar 0,74 persen (*year on year/yoy*), sedangkan pada Kuartal II-2021 mengalami peningkatan hingga 7,07 persen secara tahunan (*year on year/yoy*). Sehingga perlu adanya metode yang dapat menggambarkan bagaimana cara menghadapi permasalahan tersebut. *Regime switching* menggambarkan perubahan pilihan dan kepercayaan investor terhadap harga aset seiring dengan perubahan keadaan ekonomi, sehingga proses *regime switching* mampu menggambarkan keadaan pasar yang lebih realistis sesuai dengan keadaan ekonomi, baik saat lesu maupun sedang tumbuh (Sabila Zamani, 2017).

Penelitian yang telah dilakukan oleh Lee, H., Choi, Y. H., & Lee, G. (2022) *Multi-step barrier products and static hedging* membahas tentang *multi step barrier option* dengan fungsi pembayaran yang berubah-ubah menggunakan metode lindung nilai statis yang diperluas dan penelitian terdahulu yang dilakukan oleh Muhammad Sabila Zamani (2017) membahas tentang metode pohon binomial untuk menentukan nilai *stock loan* tanpa dividen dalam *regime switching* yang menunjukkan bahwa nilai *stock loan* dalam regime meningkat ketika nilai *interest rate, stock rate, volatility, maturity* meningkat dan nilai *stock loan* menurun ketika suku bunga pinjaman meningkat. Bedasarkan penelitian tersebut, penliti tertarik untuk menentukan strategi *hedging* (lindung nilai) dinamis saat pasar mengalami kondisi *regime switching* Dalam artikel ini akan mempertimbangkan masalah *hedging* dinamis *long position* saat *early exercise stock option* yaitu mengakhiri kontrak kapanpun selama waktu kontrak dalam pasar *regime switching*, sehingga nanti akan digunakan opsi saham amerika yang dilakukan *exercise* kapan saja antara tanggal pembelian dan jatuh tempo. Dalam model tersebut, pemegang opsi menghadapi risiko idiosinkratik dari masalah khusus perusahaan seperti kerusakan alat, pemogokan kerja, dan bencana alam, serta risiko *regime switching* di pasar finansial. Kedua risiko yang tidak dapat dihindarkan ini membuat pasar *incomplete* (tidak lengkap). Tidak semua risiko dapat dilakukan *hedging*, sehingga risiko pemegangnya memainkan peran kunci dalam penilaian dan keputusan investasi. Dengan mengadopsi metode *utility indifference price,* di mana *optimal hedging* dan strategi *exercise* ditentukan melalui masalah maksimalisasi utilitas. Selain itu, pendekatan juga dilakukan dengan memperhitungkan sebagian hedging yang berkorelasi dengan aset likuid dan *multiple early exercise* opsi saham tipe amerika.

Dalam formulasi ini, maksimalisasi utilitas pemegang melibatkan stokastik kontrol (karena *hedging* dinamis) dan *optimal stopping* (karena *early exercise*). Analisis ini memberikan interpretasi matematika dan finansial untuk harga subjektif pemegang, atau *indifference price* untuk opsi tipe Amerika. Selanjutnya, peneliti menganalisis masalah optimasi ganda yang terkait dengan masalah maksimalisasi utilitas pemegang. Secara khusus, akan menghitung secara eksplisit *minimal entropi martingale measure* (MEMM) dalam pasar *regime switching*. Formula ganda diterapkan untuk menghindari asimtotik penghindaran risiko dari *indifference price* pemegang. Diharapkan hasil dari analisis ini berguna untuk memperkirakan exercise pemegang opsi saham karyawan di bawah kondisi pasar yang berbeda dan menghitung opsi terkait biaya kepada perusahaan.

KAJIAN TEORI

1. GERAK BROWNIAN GEOMETRIK

Menurut Dmouj (2006) dalam Trimono, T., Di Asih, I. M., & Ispriyanti, D. (2017), jika diberikan model gerak brown dengan suku $B(t) = \mu^*(t) + \sigma W(t); t \geq 0$ dengan parameter $\mu^*(t) = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$, σ^2 merupakan parameter variansi dan $W(t)$ adalah gerak brown yang dimulai pada $W(0) = 0$. Pada pemodelan harga saham, proses stokastik $\{P(t); t \geq 0\}$ disebut gerak brown geometri jika $B(t) = \ln \frac{p(t)}{p(t-1)}$, dengan $B(t)$ adalah *return* saham pada waktu ke – t.

2. FUNGSI MERTON

Proses *Merton's portofolio problem* adalah permasalahan yang terkenal dalam keuangan dengan waktu terus menerus dan khususnya pilihan portofolio antar waktu. Seorang investor harus memilih berapa banyak yang akan digunakan dan harus mengalokasikan kekayaannya antara saham dan asset bebas risiko untuk memaksimalkan utilitas yang diharapkan. Investor dapat memulai dari waktu 0 sampai waktu T, kekayaan pada waktu t dilambangkan dengan W_t (Merton, R.C., 1975).

3. *INDIFFERENCE PRICE*

Dalam bidang keuangan, penetapan *indifference price* adalah metode penetapan harga sekuritas keuangan sehubungan dengan fungsi utilitas. Diberikan fungsi utility u dan klaim C_T dengan *payoffs* yang diketahui pada beberapa terminal waktu T , missal fungsi $V: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh

$$V(x, k) = sup_{X_T \in A(x)} \mathbb{E}[u(X_T + kC_T)]$$

dimana x adalah modal awal, $A(x)$ adalah kumpulan dari semua portofolio pada waktu T dimulai dengan sumbangan x, dan k adalah angka jumlah klaim yang akan dibeli atau dijual. Maka *indifference bid price* $u^b(k)$ untuk $k$unit dari C_T adalah solusi dari $V(x - u^b(k), k) = V(x, 0)$ dan *indifference ask price* $u^a(k)$ adalah solusi dari $V(x + u^a(k), -k) = V(x, 0)$. Pada pasar lengkap, indifference price selalu sama dengan harga untuk klaim lindung nilai. (Henderson, V., & Hobson, D. ,2004)

METODE

Penelitian ini merupakan studi literatur yang mengkaji strategi *hedging* dan *exercise* pada pasar dengan kondisi *regime switching* dengan melakukan perumusan strategi *hedging* dinamis pada opsi tipe amerika tunggal maupun pada opsi tipe amerika dengan beberapa kali *exercise,* serta menentukan *indifference price* melalui penalti entropis dengan *optimal stopping*. Adapun rancangan dari penelitian ini adalah sebagai berikut

1. Memodelkan *regime switching* pada gerak Brownian geometrik.
2. Melakukan optimalisasi portofolio *merton* dengan *regime switching.*
3. Membuat hubungan langsung antara fungsi nilai pemegang dengan *indifference price.*
4. Mendefinisikan ukuran *martingale local* pada pasar *regime switching.*
5. Merumuskan formula ganda *indifference price*
6. Menganalisis *indifference price* pada dampak penghindaran risiko.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. HEDGING DINAMIS PADA OPSI AMERIKA TUNGGAL

Dalam suatu model matematika keuangan, hedging dinamis dengan menggunakan opsi amerika tunggal terdapat *markov chain* yang merepresentasikan perubahan *regime* pada pasar keuangan dan mempengaruhi aset dinamik (Manurung, M. 2015), yang mana ξ merupakan waktu kontinu tak tereduksi terbatas *state markov* dengan *state space* $E = \{1, 2, \ldots, m\}$. Ruang probabilitas $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dimana P merupakan ukuran probabilitas historis. Generator matriks dari ξ dilambangkan dengan A,yang mempunyai entri konstan $A(i, j) = a_{ij}$ untuk $i, j \epsilon E$, sedemikian hingga $a_{ij} \geq 0$ untuk$i \neq j$ dan $\sum_{j \in E} a_{ij} = 0$ untuk setiap $i \in E$. *Discounted price* dari (*S, Y*) dimodelkan sebagai korelasi *regime switching* geometrik gerak Brownian:

$$dS_t = \mu(\xi_t) S_t dt + \sigma(\xi_t) S_t dW_t,$$
$$dY_t = v(\xi_t) Y_t dt + \eta(\xi_t) Y_t (\rho(\xi_t) dW_t + \tilde{\rho}(\xi_t) d\widetilde{W}_t,$$

Dimana, S = aset liquid

Y = aset non diperdagangkan (*non traded*)

Dengan koefisien korelasi $\rho(i) \in (-1, 1)$ untuk $i \in E$ dan $\tilde{\rho}(i) = \sqrt{1 - \rho^2(i)}$. Proses W dan $\widetilde{W}$adalah dua gerak brownian independen dibawah P dan independen dengan ξ. Didefinisikan filtrasi $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ dengan $\mathcal{F}_t$ augmented σ -algebra yang digenerasi oleh $\{W_u, \widetilde{W}_u, \xi_u; 0 \leq u \leq t\}$ untuk setiap $i \in E$, koefisien $\mu(i), v(i), \sigma(i), \eta(i)$ konstan dengan $\sigma(i), \eta(i) > 0$. Rasio dari S dan Y masing-masing adalah

$$\lambda(i) = \frac{\mu(i)}{\sigma(i)} \text{ dan } \kappa(i) = \frac{v(i)}{\eta(i)}.$$

Dimana $\mu_i \equiv \mu(i)$ dan $\rho_i \equiv \rho(i)$

Dengan mempertimbangkan masalah *hedging long position* opsi tipe amerika pada aset yang tidak diperdagangkan Y dengan *payoff* $g_\tau := g(\tau, Y_\tau, \xi_\tau)$ pada setiap waktu dilakukan *exercise* $\tau \leq T$. Bagian dari waktu *exercise* yang dapat diterima disimbolkan ζ yang terdiri dari semua *stopping times* yang berhubungan dengan $\mathbb{F}$ yang mengambil nilai di $[0,T]$. Untuk setiap dua stopping times $s,u \in \zeta$ dengan $s \leq u$, yang didefinisikan $\zeta_{s,u} \coloneqq \{\tau \in \zeta : s \leq \tau \leq u\}$

Dengan asumsi bahwa pemegang opsi saham mengukur utilitas dari kekayaan pada terminal waktu T maka fungsi eksponensial utilitas (Bäuerle, N., & Rieder, U., 2011) adalah

$$U(x) = -e^{-\gamma x},\ x \in \mathbb{R},$$

Dengan konstan absolut penghindaran risiko $\gamma \in (0,\infty)$. Pemegang opsi dapat melakukan *hedging* sebagian dengan trading secara dinamis di S dan *money market account* sepanjang $[0,T]$. Strategi trading $(\theta_t)_{0\leq t\leq T}$ adalah *discounted cash* jumlah yang diinvestasikan dalam S. Untuk setiap strategi θ, kekayaan trading pemegang mengikuti (Protter, P. E., 2005).

$$dX_t^\theta = \theta_t \frac{dS_t}{S_t} = \theta_t \mu(\xi_t)dt + \theta_t \sigma(\xi_t)dW_t. \quad (1)$$

Namun perlu diingat bahwa trading dinamis di S akan melindungi nilai terhadap risiko dari W, tetapi ada risiko *idiosyncratic* karena $\widetilde{W}$ dan risiko regime switching dari ξ yaitu kedua risiko yang tidak dapat dihindarkan ini membuat pasar *incomplete.*

masalah pengoptimalan tanpa opsi apa pun, dimodifikasi untuk dimasukkan pada *regime switching* harga dinamis. Dengan kekayaan awal x pada t [0 ,T], maka fungsi *merton* menjadi

$$M(t,x,i) = sup_{\theta\in \mathbf{Z}t,\mathrm{T}}\, E\{U(X_T^\theta)|X_t = x, \xi_t = i\}. \quad (2)$$

Pemegang opsi saham akan mengalami masalah *merton* selama $[\tau, \mathrm{T}]$ karena setelah pelaksanaan opsi, pemegang akan menginvestasikan kembali pembayaran opsi ke dalam portofolionya, dan terus melakukan *trading* hingga waktu T dengan nilai fungsi yang diberikan oleh

$$V(t,x,y,i) = \sup_{\substack{\tau\in\zeta_{t,T}\\ \theta\in\mathcal{L}t,\tau}} \mathbb{E}_{t,x,y,i}\{M(\tau, X_T^\theta + g_\tau, \xi_t)\}, \quad (3)$$

Dimana $\mathbb{E}_{t,x,y,i}\{\cdot\} \equiv E\{\cdot\, |X_t = x, Y_t = y, \xi_t = i\}$.

pemegang *indifference price* dari opsi tipe Amerika g didefinisikan sebagai jumlah kas p sedemikian rupa sehingga pemegang tidak tertarik antara berinvestasi secara optimal tanpa klaim, dan berinvestasi secara optimal dengan klaim di awal biaya p.

Indifference price p dari pemegang opsi tipe amerika $\equiv p(t,x,y,i)$ didefinisikan dengan relasi *indifference*

$$M(t,x,i) = V(t, x-p, y, i). \quad (4)$$

1.1 OPTIMALISASI PORTOFOLIO *MERTON* DENGAN *REGIME SWITCHING*

Pengoptimalan portofolio *merton* dengan *regime switching*, diperoleh fungsi *merton*

$$M(t,x,i) = -e^{-\gamma x}F_i(t), \quad (5)$$

untuk $(t,x,i) \in [0,T] \times \mathbb{R}_+ \times E$, dimana $F(t) \coloneqq (F_1(t), \dots, F_m(t))'$ diberikan oleh

$$F(t) = \exp\{(A-D)(T-t)\}\,1, \quad (6)$$

Dimana $D = diag\left(\frac{\lambda_1{}^2}{2}, \dots, \frac{\lambda_m{}^2}{2}\right)$, A merupakan generator matriks, 1 merupakan vektor, dan exp merupakan matriks eksponensial.

Selain itu, setiap $F_i(t)$ mengakui representasi probabilistik sehingga

$$F_i(t) = E\left\{exp\left(-\int_t^T \frac{\lambda^2(\xi_s)}{2}ds\right)|\xi_t = i\right\}. \quad (7)$$

Dapat dibuktikan dengan menggunakan persamaan Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) dengan $M(t,x,i)$ adalah

$$M_t^i + \max_\theta\left(\frac{\theta^2\sigma_i^2}{2}M_{xx}^i + \theta\mu_i M_x^i\right) + \sum_{j\in E} a_{ij}M^j = 0,$$
$$M(T,x,i) = U(x). \quad (8)$$

Pada $[0,T] \times \mathbb{R} \times E$ dimana $M^i \equiv M(t,x,i)$ lalu dengan melakukan substitusi (5) pada persamaan (8) maka diperoleh

$$F'(t) = (D-A)F, \quad (9)$$
$$F(T) = 1.$$

Sehingga (6), (9) dan (7) merupakan representasi *Feyman-Kac* yang sesuai.

Dengan melakukan maksimalisasi θ pada (8), Sehingga strategi *trading* yang optimal untuk masalah *merton* adalah

$$\hat{\theta}(t,i) = \frac{\lambda_i}{\gamma\sigma_i}. \quad (10)$$

Perhatikan bahwa $\hat{\theta}$ berbanding terbalik dengan penghindaran risiko γ, namun tidak bergantung dengan kekayaan x. akan tetap konstan di setiap *regime* tetapi akan berubah ketika ξ beralih *states.* Ketika hanya satu regime, $\hat{\theta}$ serupa dengan solusi *merton standard*

fungsi *merton* $M(t,x,i)$ sebagai fungsi *utilitas* yang bergantung pada *regime switching*. Tepatnya, mengukur utilitas kekayaan pada waktu antara t dalam *regime* i dengan akuntansi untuk peluang investasi yang tersedia bagi investor selama periode tersebut [0 , T].

1.2 INDIFFERENCE PRICE

Untuk indifference price, Operator diferensial diberikan (Musiela, M., & Zariphopoulou, T., 2004) sebagai berikut

$$\mathcal{L}_i u = \frac{\eta_i{}^2 y^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v_i y\frac{\partial u}{\partial y},$$
$$\mathcal{L}_i{}^0 u = L_i u - \rho_i\eta_i\lambda_i y\frac{\partial u}{\partial y},$$
$$\mathcal{A}_i u = \frac{\partial u}{\partial t} + L_i{}^0 u - \frac{1}{2}\gamma(1-\rho_i{}^2)\eta_i{}^2 y^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2,$$

Dan Hamiltonian
$\widetilde{H}_i\left(u_{xx}, u_{xy}, u_x\right) = max_\theta \left(\frac{\theta^2 \sigma_i{}^2}{2} u_{xx} + \theta(\rho_i \sigma_i \eta_i y u_{xy} + \mu_i u_x)\right)$.
fungsi nilai pemegang diberikan oleh
$$V(t,x,y,i) = M(t,x,i)e^{-\gamma p(t,y,i)} \quad (11)$$
Untuk $(t,x,y,i) \in [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times E$, dimana $p(t,y,i)$ adalah *indifference price* pemegang. $p(t,y,i)$ memenuhi system dari Vis
$$\mathcal{A}_i p(t,y,i) + \frac{1}{\gamma}\sum_{j\in\frac{E}{\{i\}}} a_{ij}\frac{F_j(t)}{F_i(t)}\left(1 - e^{-\gamma(p(t,y,j)-p(t,y,i))}\right) \leq 0,$$
$$p(t,y,i) \geq g(t,y,i),$$
$$\mathcal{A}_i p(t,y,i) + \frac{1}{\gamma}\sum_{j\in\frac{E}{\{i\}}} a_{ij}\frac{F_j(t)}{F_i(t)}\left(1 - e^{-\gamma(p(t,y,j)-p(t,y,i))}\right). \quad (12)$$
$$\big(g(t,y,i) - p(t,y,i)\big) = 0,$$
Untuk $(t,y,i) \in [0,T) \times \mathbb{R}_+ \times E$, dan
$p(T,y,i) = g(T,y,i)$, untuk $(y,i) \in \mathbb{R}_+ \times E$

Strategi *hedging* yang optimal untuk pemegang opsi saham pada p di peroleh
$$\theta^*(t,y,i) = \frac{\lambda_i}{\gamma\sigma_i} - \rho_i\frac{\eta_i}{\sigma_i} y p_y(t,y,i),$$
Sedemikian hingga waktu *exercise* optimal pemegang adalah
$$\tau^* = \inf\{0 \leq t \leq T : V(t, X_t^{\theta^*}, Y_t, \xi_t) = M(t, X_t^{\theta^*} + g_t)\}$$
$$= \inf\{0 \leq t \leq T : p(t, Y_t, \xi_t) = g(t, Y_t, \xi_t)\}. \quad (13)$$

2.HEDGING DINAMIS DENGAN BEBERAPA KALI EXERCISE

Sedangkan untuk lindung nilai dinamis opsi tipe amerika dengan beberapa kali *exercise,* fungsi nilai pemegang $n \geq 2$ didefinisikan secara rekursif
$$V^{(n)}(t,x,y,i) = \sup_{\substack{\tau_n \in \zeta_{t,T} \\ \theta \in \mathcal{L}_{t,\tau_n}}} \mathbb{E}_{t,x,y,i}\{V^{n-1}(\tau_n, X_{\tau_n} + g_{\tau_n}, Y_{\tau_n}, \xi_{\tau_n})\}, \quad (14)$$
dimana $V^1(t,x,y,i) = V(t,x,y,i)$ dan $V^0(t,x,y,i) = M(t,x,i)$ ketika tidak melakukan opsi. Persamaan diatas merupakan masalah stokastik kontrol dengan *optimal multiple stopping.* Dan waktu *excercise* pemegang yang optimal untuk opsi berikutnya ketika *n* opsi tetap tidak diexcercise adalah
$$\tau^{(n)*} = \inf\{t \leq T : p^{(n)}(t, Y_t, \xi_t) - p^{(n-1)}(t, Y_t, \xi_t) = g(t, Y_t, \xi_t)\}.$$
Ini mengisyaratkan bahwa pemegang *n* opsi, akan menggunakan opsi berikutnya segera setelah kenaikan *indifference price* $p^{(n)} - p^{(n-1)}$ mencapai nilai dari opsi hasil g.

3.*INDIFFERENCE PRICE* MELALUI PENALTI ENTROPI DENGAN *OPTIMAL STOPPING*

Interpretasi alternatif dari penetapan *indifference price* adalah melalui representasi gandanya, yang melibatkan pemilihan ukuran penetapan harga melalui entropi relatif penalti. Hal ini terkait dengan menemukan premi risiko yang optimal untuk *idiosyncratic* dan risiko *regime switching* karena $\widetilde{W}$ dan ξ.

3.1 PREMI RISIKO ENTROPY MINIMAL

Probabiltas ukuran Q^ϕ didefinisikan oleh
$$\frac{dQ^\phi}{dP} = exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^T(\lambda^2(\xi_s) + \phi_s{}^2)ds - \int_0^T(\lambda(\xi_s)dW_s - \int_0^T \phi_s d\widetilde{W}_s\right), \quad (14)$$
Dimana $(\phi_t)_{t\geq 0}$ adalah proses adaptasi $\mathcal{F}_t$ Dan $\mathbb{E}^{Q^\phi}\left\{\int_0^T \phi_t{}^2 dt\right\} < \infty$. Proses densitasnya dilambangkan dengan
$$Z_t^\phi = \mathbb{E}\left\{\frac{dQ^\phi}{dP} | \mathcal{F}_t\right\}.$$
Dengan teorema *Girsanov,* (S,Y) dibawah Q^ϕ memenuhi
$$dS_t = \sigma(\xi_t)S_t dW_t{}^\phi,$$
$$dY_t = (v(\xi_t) - \rho(\xi_t)\eta(\xi_t)\lambda(\xi_t) - \tilde{\rho}(\xi_t)\eta(\xi_t)\phi_t)Y_t dt + \eta(\xi_t)Y_t(\rho(\xi_t)dW_t{}^\phi + \tilde{p}(\xi_t)d\widetilde{W}_t{}^\phi)$$
Dimana
$$W_t^\phi = W_t + \int_0^t \lambda(\xi_s)ds,$$
$$\widetilde{W}_t^\phi = \widetilde{W}_t + \int_0^t \phi_s ds$$
Merupakan gerak brown independen di bawah Q^ϕ. Harga diskon S adalah *martingale local* Q^ϕ. Jadi Q^ϕ adalah ukuran *local martingale* yang setara. Proses ϕ hanya menghitung risiko premi untuk $\widetilde{W}$, sehingga untuk menyelesaikan masalah premi untuk risiko *regime switching* perlu menghitung teorema *Girsanov* untuk *markov chain* $Q^{\phi,\alpha}$di definisikan oleh
$$\frac{dQ^{\phi,\alpha}}{dP} = \frac{dQ^{\phi\emptyset}}{dP}\frac{dQ^{\phi,\alpha}}{dQ^\phi},$$
dan
$$\frac{dQ^{\phi,\alpha}}{dQ^{\phi,\alpha}} = \exp\left(-\int_0^T\left(\tilde{A}_s(\xi_s,\xi_s) - A(\xi_s,\xi_s)ds\right).\prod_{\substack{0\leq s\leq T\\ \xi_{s-}\neq\xi_s}} \alpha_s(\xi_{s-},\xi_s)\right) \quad (15)$$

dimana $\{\alpha_t(i,j)\}_{i\neq j}$ adalah bagian dari proses adaptasi berbatas positif, dan
$$\tilde{A}_t(i,j) = \begin{cases} \alpha_t(i,j)A(i,) & if\ i \neq j, \\ -\sum_{k\neq i}\tilde{A}_t(i,k) & if\ i = j. \end{cases} \quad (16)$$

Maka ukuran $Q^{\phi,\alpha}$ setara dengan Q^{ϕ} dan demikian juga untuk P. Selain itu, untuk mempertahankan markovian ξ di bawah ukuran baru $Q^{\phi,\alpha}$ maka semua $\alpha_t(i,j)$ harus menjadi markovian. Lalu di bawah $Q^{\phi,\alpha}$, generator matriks dari ξ adalah $\tilde{A} = [\tilde{A}_s(i,j)]_{i,j\epsilon E}$. Koleksi $\{\alpha_t(i,j)\}_{i\neq j}$ dapat dianggap sebagai faktor premi risiko untuk risiko *regime switching*. Sehingga himpunan dari ukuran *local martingale* yang setara terhadap P, dilambangkan dengan $\mathcal{M}(P) := \{Q^{\phi,\alpha}\}_{\phi,\alpha}$ adalah parameterisasi oleh pasangan premi risiko (ϕ,α). Untuk setiap ukuran Q, entropi relatif dari Q terhadap P didefinisikan oleh

$$H(Q|P) := \begin{cases} \mathbb{E}^{Q}\left\{\log\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}Q}\right\}, & Q \ll P, \\ +\infty, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Ukuran martingale entropi minimal (MEMM), $\hat{Q}$, meminimalkan entropi relatif terhadap P diatas himpunan dari ukuran martingale lokal setara $M(P)$:

$$\hat{Q} = arg \min_{Q\epsilon M(P)} H(Q|P)$$

Kondisi umum untuk keberadaan MEMM unik adalah keberadaan dari ukuran *local martingale* yang setara dengan entropi relatif terbatas terhadap P dan hal ini berlaku pada model yang diterapkan. Untuk setiap $Q^{\phi,\alpha}\epsilon M(P)$, entropi relatf bersyarat dari Q terhadap P pada waktu $t\epsilon[0,T]$ adalah

$$H_t^T\left(Q^{\phi,\alpha}\middle|P\right) := \mathbb{E}^{Q^{\phi,\alpha}}\left\{\log\frac{Z_T^{\phi,\alpha}}{Z_t^{\phi,\alpha}}|\mathcal{F}_t\right\}, \quad (17)$$

Dimana $Z_T^{\phi,\alpha} := \mathbb{E}\left\{\frac{dQ^{\phi,\alpha}}{dP}|\mathcal{F}_t\right\}$ adalah proses kepadatan yang sesuai. Entropi relatif minimal dirumuskan oleh $H_t^T(\hat{Q}|P) = h(t,\xi_t)$ dimana

$$h(t,i) = -logF_i(t) \quad (18)$$

$$= -\log\left(\mathbb{E}\left\{\exp\left(-\int_t^T \frac{\lambda^2(\xi_s)}{2}ds\right)|\xi_t = i\right\}\right) \quad (19)$$

Substitusi persamaan (18) ke (2) akan menghasilkan formula dualitas untuk fungsi merton yaitu

$$M(t,x,i) = -e^{-\gamma x}e^{-h(t,i)} \quad (20)$$

Sehingga

$$U^{-1}\big(M(t,0,i)\big) = \frac{1}{\gamma}h(t,i)$$

Oleh karena itu, entropi relatif minimal ketika diskalakan dengan penghindaran risiko dapat dipandang sebagai kepastian yang setara dengan investasi *merton* dengan nol kekayaan awal. Ketika $\phi = 0$ dan $\alpha(i,j) = 1$ untuk $i \neq j$ ukuran yang dihasilkan $Q^{0,1} \equiv Q^0$ merupakan ukuran martingale minimal dan tidak meminimalkan entropi relative terhadap P meskipun klaim sebaliknya seperti berikut

$$H_t^T(Q^0|P) = \mathbb{E}^{Q^0}\left\{\frac{1}{2}\int_t^T \lambda^2(\xi_s)ds|\mathcal{F}_t\right\}$$
$$= \mathbb{E}\left\{\tfrac{1}{2}\int_t^T \lambda^2(\xi_s)ds|\mathcal{F}_t\right\}$$
$$\geq -\log\left(\mathbb{E}\left\{e^{-\int_t^T\frac{\lambda^2(\xi_s)}{2}ds}|\mathcal{F}_t\right\}\right)$$
$$= H_t^T\big(\hat{Q}\big|P\big)$$

Karena ketimpangan itu ketat kecuali tidak ada *regime switching* sehingga menunjukkan bahwa $Q^0 \neq \hat{Q}$

3.2 FORMULA GANDA *INDIFFERENCE PRICE*

MEMM $\hat{Q}$ juga memainkan peran penting dalam *indifference price* karakterisasi. Untuk mengilustrasikan, maka pertama-tama akan mempertimbangkan entropi relatif terhadap $\hat{Q}$ bukan P. Dengan mendefinisikan turunan *Radon-Nikodym* maka

$$\frac{\mathrm{d}Q^{\phi,\alpha}}{\mathrm{d}\hat{Q}} = \frac{\mathrm{d}Q^{\phi,\alpha}}{\mathrm{d}P}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\hat{Q}} = \exp\left(-\tfrac{1}{2}\int_0^T \phi_s^2\, ds - \int_0^T \phi_s \mathrm{d}\widetilde{W}_s^{\hat{Q}}\right).\exp\left(-\int_0^T \tilde{A}_s(\xi_s,\xi_s) - \hat{A}(\xi_s,\xi_s)ds\right)\prod_{\substack{0\leq s\leq T \\ \xi_{s-}\neq\xi_s}} \frac{\alpha_s(\xi_{s-},\xi_s)}{\hat{\alpha}_s(\xi_{s-},\xi_s)} \quad (21)$$

$\widetilde{W}^{\hat{Q}}$ adalah gerak brown standar $\hat{Q}$ dan $\widetilde{W}^{\hat{Q}} = \widetilde{W}$ ketika $\hat{\phi} = 0$. Berdasarkan proses kepadatan dan entropi relatif bersyarat dari $Q^{\phi,\alpha}$ terhadap $\hat{Q}$ selama periode $[t,\tau]$maka

$$\widehat{H}_{\phi,\alpha}^T(t,y,i) := \mathbb{E}_{t,y,i}^{Q^{\phi,\alpha}}\left\{\log\frac{\hat{Z}_t^{\phi,\alpha}}{\hat{Z}_t^{\phi,\alpha}}\right\}, \quad (22)$$

Dengan $\mathbb{E}_{t,y,i}^{Q^{\phi,\alpha}}\{\cdot\} \equiv \mathbb{E}^{Q^{\phi,\alpha}}\{\cdot\,|Y_t = y, \xi_s = i\}$.

Istilah entropi ini merepresentasikan penalti pada formula *indifference price* yang dibahas. *Indifference price* diberikan oleh

$$p(t,y,i) = \sup_{\tau\in\zeta_t,T} \inf_{\phi,\alpha}\left(\mathbb{E}_{t,y,i}^{Q^{\phi,\alpha}}\{g_\tau\} + \frac{1}{\gamma}\widehat{H}_{\phi,\alpha}^T(t,y,i)\right). \quad (23)$$

Dualitas formula pada *indifference price* tersebut menunjukkan bahwa pemegang opsi memilih ukuran harga yang meminimalkan harga diskon ditambah penalti entropi relatif sampai dengan waktu relatif τ. Risiko premium α^* ditunjukkan sebagai

$$\alpha^*(t,y,i,j) = A(i,j)\frac{V(t,x,y,j)}{V(t,x,y,i)}, \quad untuk\ i \neq j$$

Hal ini memberikan interpretasi keuangan bahwa pemegang menetapkan faktor risiko premium α^* yang optimal untuk ξ dengan skala tingkat transisi sesuai dengan nilai relatf dari fungsi nilai di *state* yang berbeda.

Indifference price $p^{(n)}(t,y,i)$memenuhi

$$p^{(n)}(t,y,i) = \sup_{\tau_n \in F_{t,T}{}^{\phi,\alpha}} \inf \left(\mathbb{E}_{t,y,i}^{Q^{\phi,\alpha}} \{ g_{\tau_n} + p^{(n-1)}(\tau_n, Y\tau_n, \xi\tau_n) \} + \frac{1}{\gamma} \widehat{H}_{\phi,\alpha}^{\tau_n}(t,y,i) \right).$$

3.3 ASIMTOTIK PENGHINDARAN RISIKO

Dengan menggunakan formula ganda (23) untuk menganalisis beberapa sifat dari *indifference price* dengan penekanan pada dampak dari penghindaran risiko γ dan koefisien korelasi $\rho(i)$. Akan ditunjukkan *indifference price* dan waktu *exsercise* yang optimal oleh $p^{(\gamma)}(t,y,i)$ dan $\tau^{(\gamma)*}$untuk melihat ketergantungan pada γ dan menunjukkan bahwa penghindaran risiko yang lebih tinggi mengurangi *indifference price* pemegang opsi dan langsung mengarah ke waktu exsercise lebih awal. Jika $\gamma_2 \geq \gamma_1 > 0$ maka $p^{(\gamma_2)}(t,y,i) \leq p^{(\gamma_1)}(t,y,i)$ dan $\tau^{(\gamma_2)*} \leq \tau^{(\gamma_1)*}$. Ketika $\gamma \uparrow \infty$, penalti entropis pada (23) menghilang, maka diperoleh harga batas

$$\lim_{\gamma \to \infty} p^{(\gamma)}(t,y,i) = \sup_{\tau \in \mathcal{J}_{t,T}{}^{\phi,\alpha}} \inf \mathbb{E}^{Q^{\phi,\alpha}} \{ g(\tau, Y_\tau, \xi_\tau) | Y_t = y,\ \xi_\tau = i \}$$

Harga ini biasanya disebut sub lindung nilai. Di lain sisi, ketika $\gamma \downarrow 0$ maka harga batasnya menjadi formula ganda (23) juga berlaku dengan $\phi = 0$ karena tidak adanya gerakan Brownian kedua. Sehingga minimalisasi entropi yang dilakukan pada kumpulan ukuran $\{Q^{0,\alpha}\}$ adalah

$$p(t,y,i) = \sup_{\tau \in \zeta_{t,T}} \inf_{\alpha} \left(\mathbb{E}_{t,y,i}^{Q^{0,\alpha}} \{ g_\tau \} + \frac{1}{\gamma} \widehat{H}_{0,\alpha}^{\tau_n}(t,y,i) \right)$$

Ketidaksetaraan variasi untuk *indifference price* dapat disederhanakan dengan substitusi persamaan diatas ke (12) sehingga menjadi

$$\frac{\partial p_j}{\partial t} + \frac{1}{2}\eta_j^2 y^2 \frac{\partial^2 p_j}{\partial y^2} + \frac{1}{\gamma} \sum_{k \epsilon E_1 \backslash \{j\}} \hat{A}_{jk}(t) \left(1 - e^{-\gamma(p(t,y,k) - p(t,y,j))}\right) \leq 0, p(t,y,j) \geq g(t,y,j), \left(\frac{\partial p_j}{\partial t} + \frac{1}{2}\eta_j^2 y^2 \frac{\partial^2 p_j}{\partial y^2} + \frac{1}{\gamma} \sum_{k \epsilon E_1 \backslash \{j\}} \hat{A}_{jk} \left(1 - e^{-\gamma(p(t,y,k) - p(t,y,j))}\right) \right) \cdot \left(g(t,y,j) - p(t,y,j)\right) = 0,\quad \text{untuk } (t,y,j) \in [0,T) \times \mathbb{R}_+ \times E,$$

$$p(T,y,j) = g(T,y,j),\ \ untuk\ (y,j) \in \mathbb{R}_+ \times E,$$

Pasar tidak lengkap pada dasarnya dapat diperdagangkan dan terdapat banyak ukuran penetapan harga kandidat. Itu berarti bahwa penentuan ukuran harga sesuai dengan preferensi risiko yang diberikan. Pernyataan ini menetapkan premi risiko yang wajar secara finansial untuk *regime switching*. Pada dasarnya hal ini sama dengan menghubungkan dinamika *Markov chain* di bawah ukuran harga dan ukuran historis yang sering diabaikan dalam literatur tentang penetapan harga opsi di bawah dinamika *regime switching*.

SIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan, penelitian ini menghasilkan strategi *hedging* yang optimal dan strategi *exercise* yang adaptif terhadap kondisi pasa untuk memperkirakan *exsercise* pemegang opsi saham karyawan di bawah kondisi pasar yang berbeda yaitu saat pasar dalam kondisi regime switching yang mana dirasa mampu menggambarkan keadaan pasar yang lebih realistis sesuai dengan keadaan ekonomi yang sedang terjadi. Penelitian ini menerapkan *optimal hedging*, strategi *exercise*, dan metode *utility indifference price*, sehingga diperoleh

$$p(t,y,i) = \sup_{\tau \in \zeta_{t,T}} \inf_{\alpha} \left(\mathbb{E}_{t,y,i}^{Q^{0,\alpha}} \{ g_\tau \} + \frac{1}{\gamma} \widehat{H}_{0,\alpha}^{\tau_n}(t,y,i) \right)$$ dan

waktu *exercise* yang optimal adalah ketika *indifference price* pemegang sama dengan hasil opsi yaitu $\tau^* = \inf\{0 \leq t \leq T : p(t,Y_t,\xi_t) = g(t,Y_t,\xi_t)\}$. Pemegang segera melakukan *exercise* setelah

penelitian ini sebagai pelengkap penelitian yang dilakukan oleh Lee, H., Choi, Y. H., & Lee, G. (2022) dengan menambahkan infomasi tentang *dynamic hedging* dan penelitian ini lebih kompleks dari penelitian terdahulu yang dilakukan oleh Muhammad Sabila Zamani (2017) yang membahas tentang metode pohon binomial dalam *regime switching*.

DAFTAR PUSTAKA

Bäuerle, N., & Rieder, U. (2011). *Markov decision processes with applications to finance*. Springer Science & Business Media.

Badan Pusat Statistik. (2021). Ekonomi Indoneia Triwulan I-2021 turun 0,74 persen (y-on-y). http://www.bps.go.id. Diakses pada 10 Januari 2022.

Fahira, F. (2021). Strategi Long Strangle Menggunakan Opsi Barrier untuk Lindung Nilai Saham.

Henderson, V., & Hobson, D. (2004). Utility indifference pricing-an overview. *Volume on Indifference Pricing*.

Hidayat, W.W. (2019). Konsep dasar investasi dan pasar modal. Uwais inspirasi Indonesia.

Lee, H., Choi, Y. H., & Lee, G. (2022). Multi-step barrier products and static hedging. *The North American Journal of Economics and Finance*, *61*, 101676.

Manurung, M. (2015). Solusi Analitik Harga Eropean Put Option Disertai Divide Dengan Regime-Switching Dua State Menggunakan Transformasi Fourier (Doctoral dissertation, Institut Teknologi Sepuluh Nopember).

Merton, R. C. (1975). Optimum consumption and portofolio rules in a continuous-time model. In Stochastic optimization models in finance (pp. 621-661). Academic Press.

Musiela, M., & Zariphopoulou, T. (2004). Indifference prices of early exercise claims. Contemporary Mathematics, 351, 259-272.

Mutia, S. M. (2021). Komponen Ardl dalam Mendukung Pengaruh Kinerja Keuangan dan Hedging terhadap Laba Perusahaan Food and Beverages Indonesia. Kumpulan Karya Ilmiah Mahasiswa Fakultas Sosial Sains, 2(02).

Mooy, M. N., Rusgiyono, A., & Rahmawati, R. (2017). Penentuan harga opsi put dan call tipe eropa terhadap saham menggunakan model black-scholes. Jurnal Gaussian, 6(3), 407-417.

Protter, P. E. (2005). Stochastic differential equations. In *Stochastic integration and differential equations* (pp. 249-361). Springer, Berlin, Heidelberg.

Widioatmodjo, S. (2005). *Cara sehat investasi pasar modal*. Elex Media Komputindo

Trimono, T., Di Asih, I. M., & Ispriyanti, D. (2017). Pemodelan Harga Saham Dengan Geometric Brownian Motion Dan Value At Risk PT Ciputra Development Tbk. *Jurnal Gaussian, 6(2), 261-270.*

Zamani, Muhammad Sabila. (2016). metode pohon binomial untuk menentukan nilai stock loan tanpa dividen dalam regime switching. surabaya: jurusan matematika its.