**MATH**_unesa_
Jurnal Ilmiah Matematika
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115
*Volume 10 No 03*
*Tahun 2022*

# PELABELAN HARMONIS GENAP SEJATI DARI BEBERAPA GRAF TERHUBUNG

**Diyanatut Taqiyah**
Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
email : diyanatuttaqiyah@gmail.com

**Budi Rahadjeng**
Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
email : budirahadjeng@unesa.ac.id

**Abstrak**

Pelabelan harmonis dari graf G dengan $q$ sisi merupakan suatu pemetaan injektif $f$ dari suatu titik yang ada pada graf G ke bilangan bulat modulo $q$ sehingga setiap sisi $xy$ dilabeli $f(x)+f(y)\ (mod\ q)$ menghasilkan label sisi yang berbeda. Graf yang dilabeli menggunakan pelabelan harmonis dinamakan graf harmonis. Pelabelan harmonis genap adalah suatu pemetaan injektif $f$ dari suatu titik pada G ke bilangan bulat dari 0 sampai $2q$ dan menginduksi fungsi $f^*$ dari sisi pada G ke $0,2,\ldots,2(q-1)$ yang didefinisikan dengan $f^*(xy)=f(x)+f(y)(mod\ 2q)$ yang merupakan suatu pemetaan bijektif. Graf yang dilabeli menggunakan pelabelan harmonis genap dinamakan graf harmonis genap. Pelabelan harmonis genap sejati adalah pelabelan harmonis genap dari graf G dengan $q$ sisi yang label titiknya $0,2,\ldots,2q-2$. Graf yang dilabeli menggunakan pelabelan harmonis genap sejati dinamakan graf harmonis genap sejati.. Artikel ini membahas mengenai pelabelan harmonis genap sejati pada beberapa graf terhubung. Apabila terdapat graf yang memiliki semua kriteria pelabelan harmonis genap, kemudian graf itu dapat dilabeli dengan pelabelan harmonis genap sejati. Pada artikel ini akan paparkan mengenai suatu graf terhubung yang memiliki kriteria pelabelan harmonis sejati antara lain graf roda serta graf helm.

**Kata Kunci:** pelabelan graf, pelabelan harmonis, pelabelan harmonis genap, pelabelan harmonis genap sejati.

**Abstract**

***Harmonious labeling*** *of graph G with $q$ edges is an injection $f$ from the vertices of G to the group of integer modulo $q$ such that when edges $xy$ is assigned the label $f(x)+f(y)\ (mod\ q)$. A graph that has* ***harmonious labeling*** *is called a* ***harmonious graph. Even harmonious labeling*** *of graph G with $q$ edges is an injection $f$ from the vertices of G integers from 0 to $2q$ and the induced function $f^*$ from the edges of G to $0,2,\ldots,2(q-1)$ defined by $f^*(xy)=f(x)+f(y)(mod\ 2q)$ is bijective. A graph that has* ***even harmonious labeling*** *is called a* ***even harmonious graph. Properly even harmonious labeling*** *of graph G with $q$ edges is even harmonious labeling with vertex label belong to $\{0,2,\ldots,2q-2\}$. A graph that has* ***properly even harmonious labeling*** *is called a* ***properly even harmonious graph.*** *In this paper we discussed about properly even harmonious labelings of some connected graphs. If a graph that has even harmonious labeling, then it can be labeled with properly even harmonious labelling. In this artikel it will be shown that a graph that has properly even harmonious labeling among other wheel and helm.*

***Keywords:*** *graph labelings, harmonious labelings, even harmonious labelings, properly even harmonious labelings.*

## PENDAHULUAN

Salah satu bagian dari ilmu matematika yang keberadaanya telah ada hingga lebih dari dua abad lalu adalah teori graf (I Ketut Budayasa, 2007). Seorang matematikawan dari Swiss bernama Euler menerbitkat sebuah jurnal pada tahun 1736 yang merupakan jurnal pertama yang membahas mengenai teori graf. (I Ketut Budayasa, 2007). Di awal perkembangannya, teori graf hanya digunakan sebagai pemecah masalah mengenai teka-teki hingga dianggap kurang signifikan dari segi matematika, tetapi kemudian medapatkan rangkaian yang sangat cepat sekitar akhir-akir puluhan tahun ini. Pengaplikasian teori graf pada bidang yang lain ataupun pada bidang umum merupakan suatu kejadian yang menyebabkan berkembangnya teori yang sangat pesat. (I Ketut Budayasa, 2007). Graf G berisi 2 himpunan, yakni himpunan titik V(G) yang merupakan suatu elemen-elemen dari himpunan berhingga tak kosong dan himpunan sisi E(G) yang merupakan suatu objek-objek dari suatu himpunan berhingga yang mungkin kosong sehingga diperoleh setiap objek $e$ yang ada di E(G) merupakan suatu pasangan tak terurut dari titik-titik yang ada di V(G). (I Ketut Budayasa, 2007). Himpunan titik yang ada di G dinamakan {V(G)} dan himpunan sisi yang ada di G dinamakan {E(G)} (I Ketut Budayasa, 2007). Salah satu topik yang dibahas pada teori graf yakni pelabelan. Metode pelabelan pada graf dimulai oleh Rosa (1967). Sebarang fungsi yang mempertemukan setiap elemen-elemen graf baik berupa titik maupun sisi pada bilangan yang biasanya merupakan himpunan bilangan bulat positif dinamakan pelabelan (Tikasari & Rahadjeng, 2014). Pelabelan titik (vertex labeling) merupakan suatu pelabelan yang domain fungsinya berupa {E(G)}. (Tikasari & Rahadjeng, 2014). Pelabelan sisi (edge labeling) merpukan suatu pelabelan yang domain fungsinya berupa sisi (Tikasari & Rahadjeng, 2014). Pelabelan total (total labeling) merupakan suatu pelabelan yang domain fungsinya berupa sisi dan titik (Tikasari & Rahadjeng, 2014). Graham dan Sloane (1980) memperkenalkan pelabelan harmonis yang berhubungan dengan kode koreksi kesalahan dan masalah penugasan saluran pada tahun 1980. Beberapa hasil yang terkait dengan pelabelan harmonis genap sejati dipublikasikan oleh Sarasija dan Binthiya (2014,2011) dan Gallian dan Shoenhard (2014). Pada artikel ini dibahas mengenai pelabelan harmonis genap sejati dari beberapa graf terhubung seperti graf helm serta graf roda.

## KAJIAN TEORI

**Definisi 2.1.** Graf G berisi 2 himpunan, yakni himpunan titik V(G) yang merupakan suatu elemen-elemen dari himpunan berhingga tak kosong dan himpunan sisi E(G) yang merupakan suatu objek-objek dari suatu himpunan berhingga yang mungkin kosong sehingga diperoleh setiap objek $e$ yang ada di E(G) merupakan suatu pasangan tak terurut dari titik-titik yang ada di V(G) (I Ketut Budayasa, 2007). Himpunan titik yang ada di G dinamakan {V(G)} dan himpunan sisi yang ada di G dinamakan {E(G)} (I Ketut Budayasa, 2007).

**Definisi 2.2.** Graf yang tidak mempunyai gelung serta tidak mempunyai sisi rangkap dinamakan **graf sederhana** (I Ketut Budayasa, 2007).

**Definisi 2.3. Sisi rangkap** merupakan 2 titik a dan b yang ada di graf yang dihubungkan dengan lebih dari satu sisi (I Ketut Budayasa, 2007).

**Definisi 2.4.** Sisi yang ada di graf G yang menghubungkan titik yang ada pada dirinya sendiri dinamakan **gelung** (I Ketut Budayasa, 2007).

**Definisi 2.5.** Titik $a$ dan $b$ pada graf G dikatakan **berhubungan langsung**, apabila sisi $e = \{a, b\}$ menghubungkan titik $a$ dan $b$ pada graf G (I Ketut Budayasa, 2007).

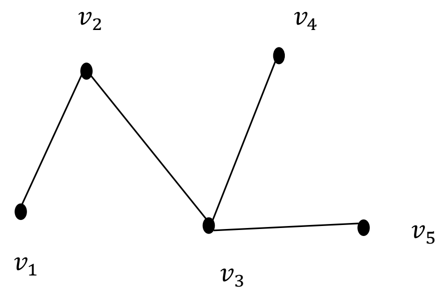
**Definisi 2.6.** Sebuah barisan berhingga (tak kosong) $W = (a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_k, b_k)$ yang objek-objeknya bergantian titik kemudian sisi, sehingga diperoleh $a_{i-1}$ serta $a_i$ yang merupakan titik terakhir yang ada pada $e_i$, untuk $k \geq i \geq 1$ dinamakan **jalan** (I Ketut Budayasa, 2007). Jalan dikatakan tertutup jika $v_0 = v_n$ dan terbuka jika $v_0 \neq v_n$ (Widya Ekashanti Marmanita, 2002).

**Definisi 2.7** Suatu jalan pada G yang tidak mempunyai pengulangan pada setiap elemen yang ada pada himpunan titiknya dinamakan **lintasan (path)** (Widya Ekashanti Marmanita, 2002).

**Definisi 2.8** Jalan tertutup yang memiliki elemen pada himpunan titiknya berbeda dinamakan **sikel (cycle)**. Lintasan tertutup merupakan suatu kata ganti lain dari sikel. (Widya Ekashanti Marmanita, 2002).

**Definisi 2.9** Jika terdapat suatu lintasan pada G yang menghubungkan setiap 2 titik yang tidak sama, maka kedua titik itu dinamakan **terhubung** (I Ketut Budayasa, 2007).

Contoh :




**Gambar 1.** Graf Terhubung

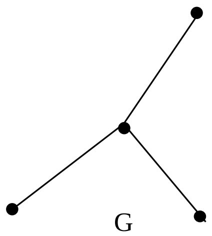
**Definisi 2.10** Setiap dua titik berbeda yang terhubung pada sebuah sisi yang terdapat pada graf sederhana yang mempunyai n titik dinamakan **graf komplit** $K_n$ (I Ketut Budayasa, 2007).

**Definisi 2.11** Graf terhubung yang memiliki $n$ titik dengan tepat satu sikel yang mempunyai panjang $n$

dinamakan **graf sikel** $C_n$, dengan $n \geq 3$ (Rahayu & Kuswardi, 2018).

**Definisi 2.12** Graf terhubung dan tidak memuat sikel dinamakan **graf pohon** (I Ketut Budayasa, 2007).

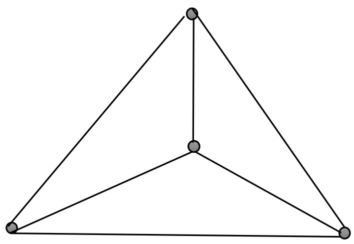
Contoh :




**Gambar 2.** Graf Pohon

**Definisi 2.13** Graf yang diperoleh dengan adanya penambahan satu titik baru yang ada di sikel $C_n$, dengan demikian diperoleh setiap titik yang ada di sikel $C_n$ terhubung langsung dengan titik baru tersebut dinamakan **graf roda** $\boldsymbol{W_n}$, dengan $n \geq 3$. Titik baru pada graf roda tersebut dinamakan **titik pusat**. Sedangkan sisi yang terdapat antara titik pada sikel $C_n$ dan titik pusat dinamakan **spoke**. $n + 1$ merupakan banyak titik yang terdapat di graf roda. Sedangkan $2n$ merupakan banyak sisi yang terdapat di graf roda (Rahayu & Kuswardi, 2018).

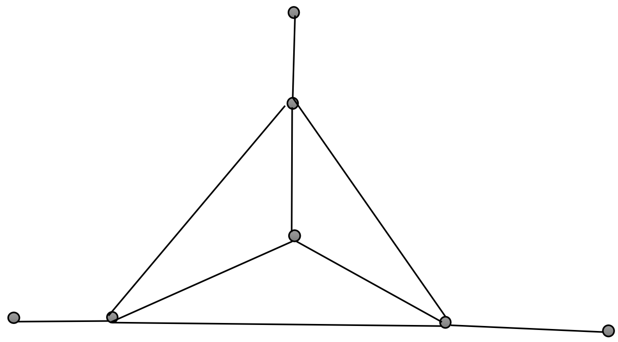
Contoh :



**Gambar 3.** Graf roda $W_3$

**Definisi 2.14 Graf helm** $\boldsymbol{H_n}$ , dengan $n \geq 3$ merupakan suatu graf yang dibentuk dari graf roda $W_n$ dengan adanya penambahan $n$ titik yang terhubung langsung pada sikel terluar yang ada di graf roda $W_n$. Sisi tambahan yang terdapat pada graf helm dinamakan sisi pendan. Banyaknya titik pada graf helm adalah $2n + 1$ dan banyaknya sisi pada graf helm adalah $3n, n \geq 3$ (Rahayu & Kuswardi, 2018).

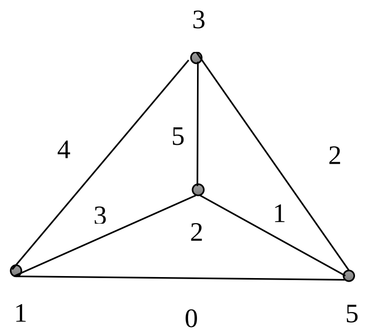
Contoh :



**Gambar 4.** Graf helm $H_3$

**Definisi 2.15 Pelabelan harmonis** adalah suatu pemetaan injektif $f$ dari suatu titik yang ada pada graf G ke bilangan bulat modulo $q$ sehingga setiap sisi $xy$ dilabeli $f(x) + f(y)\ (mod\ q)$ menghasilkan label sisi yang berbeda (Gallian & Schoenhard, 2014).

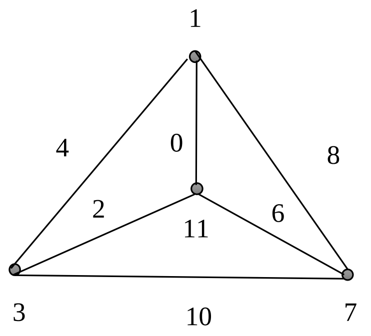
Contoh :




**Gambar 5.** Graf harmonis $W_3$ mod 6

**Definisi 2.16 Pelabelan harmonis genap** adalah suatu pemetaan injektif $f$ dari suatu titik pada G ke bilangan bulat dari 0 sampai $2q$ dan menginduksi fungsi $f^*$ dari sisi pada G ke $0,2,\dots,2(q-1)$ yang didefinisikan dengan $f^*(xy) = f(x) + f(y)(mod\ 2q)$ yang merupakan suatu pemetaan bijektif (Gallian & Steward, 2015).

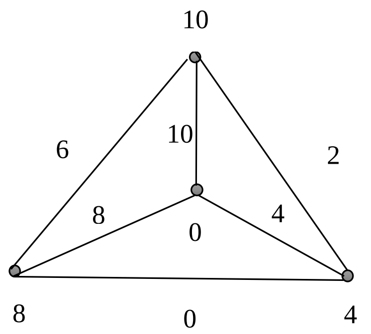
Contoh :




**Gambar 6.** Graf harmonis genap $W_3$ mod 6

**Definisi 2.17 Pelabelan harmonis genap sejati** adalah pelabelan harmonis genap dari graf G dengan $q$ sisi yang label titiknya $0,2,\dots,2q-2$ (Gallian & Steward, 2015).

Contoh :




**Gambar 7.** Graf harmonis genap sejati $W_3$ mod 12

**Definisi 2.18** Graf yang dilabeli menggunakan **pelabelan harmonis genap sejati** dinamakan **graf harmonis genap sejati** (Joseph A. Gallian, 2015).

## DISKUSI DAN HASIL

Pada diskusi dan hasil akan dipaparkan mengenai pelabelan graf harmonis genap sejati pada graf terhubung yakni graf helm serta graf roda.

**Teorema 3.1.** Graf pohon bukan merupakan graf harmonis genap sejati.

Bukti. Misalkan graf pohon dengan $n$ titik mempunyai $n-1$ sisi dan terhubung. Pelabelan harmonis genap sejati memiliki setiap label yang berbeda semua. Karena pohon memiliki $n$ titik dan $n-1$ sisi, maka terdapat beberapa label titik yang sama. Sehingga pohon tidak dapat dilabeli dengan pelabelan harmonis genap sejati. Jadi, graf pohon bukan merupakan pelabelan harmonis genap sejati. ■

**Teorema 3.2.** Graf roda $W_n$ dengan $n$ ganjil merupakan graf harmonis genap sejati.

Bukti.

Perhatikan graf roda $W_n$ dengan $2n$ sisi.

Label titik pusat dari graf $W_n$ dengan $v_0$ dan titik lainnya dengan $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Label titik $v_0$ dengan 2 dan untuk $i \geq 1$, label titik $v_i$ dengan $4(i-1)$.

Perhatikan bahwa label setiap titik di $W_n$ berbeda semua.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa label sisi yang diinduksi dari pelabelan titiknya berbeda semua.

i. Akan ditunjukkan label sisi-sisi sikel pada $W_n$ berbeda semua.

   Label sisi $v_i v_{i+1}$ adalah $4(-1+i)+4(-1+i+1) = 4i-4+4i = 8i-4$.

   Andaikan label $v_i v_{i+1}$ dan $v_j v_{j+1}$ sama, yaitu

   $8i-4 = 8j-4 \ (mod\ 4n)$ (1)

   $8i-8j = 0 \ (mod\ 4n)$ (2)

   $8(i-j) = 0 \ (mod\ 4n)$ (3)

   $8(i-j) = k4n$ (4)

   Sehingga

   $2(i-j) = kn$, untuk setiap $k$ (5)

   Tanpa menghilangkan keumumannya, asumsikan $i > j$.

   $0 < i-j < n$ (6)

   $0 < 2(i-j) < 2n$ (7)

   $0 < kn < 2n$ (8)

   Sehingga

   $k = 1$ dan $2(i-j) = n$ (9)

   Karena $n$ ganjil, maka terjadi kontradiksi

   Jadi, label sisi-sisi sikel pada $W_n$ berbeda semua.

ii. Akan ditunjukkan bahwa label sisi-sisi spoke pada $W_n$ berbeda semua.

   Label sisi $v_0 v_i$ adalah $2+4(-1+i) = 2-4+4i = 4i-2$, $i = 1, 2, \dots, n$, maka semua label sisi $v_0, v_i$ berbeda.

   Jadi, label sisi-sisi spoke pada $W_n$ berbeda semua.

iii. Akan ditunjukkan label sisi-sisi sikel dan spoke pada $W_n$ berbeda semua.

   Andaikan label sisi sikel sama dengan label sisi spoke, yaitu

   $8i-4 = 4j-2 \ (mod\ 4n)$ (1)

   $8i-4j-2 = 0 \ (mod\ 4n)$ (2)

   Sehingga

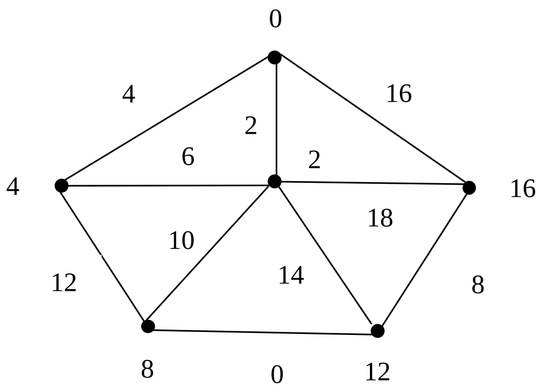
   $-2 \neq 0 \ (mod\ 4n)$ (3)

   Maka, terjadi kontradiksi.

Jadi, label sisi sikel dan spoke pada $W_n$ berbeda semua.

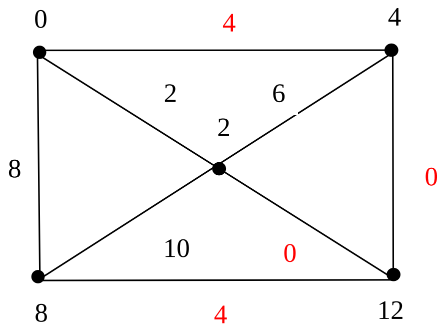
Jadi, graf roda $W_n$ dengan $n$ ganjil memenuhi pelabelan harmonis genap sejati. Sehingga, graf roda $W_n$ merupakan graf harmonis genap sejati. ■

Contoh :




**Gambar 8.** Graf harmonis sejati $W_5$ mod 20

Catatan : Graf roda $W_n$ dengan $n$ genap bukan merupakan graf harmonis genap sejati. Seperti yang ditunjukkan pada **Gambar 9.**




**Gambar 9.** Graf roda $W_4$ mod 16 bukan merupakan graf harmonis sejati

**Teorema 3.3.** Graf helm $H_n$ dengan $n$ ganjil merupakan graf harmonis genap sejati.

Bukti.

Perhatikan graf helm $H_n$ dengan $3n$ sisi.

Label titik pusat dari graf $H_n$ dengan $v_0$ dan titik lainnya dengan $v_1, v_2, \dots, v_n$. Sedangkan titik yang berhubungan langsung dengan $v_i$, $i \geq 1$ label dengan $w_i$.

Label titik $v_0$ dengan 2, untuk $i \geq 1$, label titik $v_i$ dengan $6i - 2$ dan $w_i$ dengan $6i - 6$.

Perhatikan bahwa label setiap titik di $H_n$ berbeda semua.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa label sisi yang diinduksi dari pelabelan titiknya berbeda semua.

I. Akan ditunjukkan label sisi-sisi sikel pada $H_n$ berbeda semua. Label sisi $v_i v_{i+1}$ adalah $6i - 2 + 6(i+1) - 2 = 6i - 2 + 6i + 6 - 2 = 12i + 2$.

   Andaikan label $v_i v_{i+1}$ dan $v_j v_{j+1}$ sama.

   $12i - 3 = 12j - 3 \ (mod\ 6n)$ (1)

   $12i - 12j = 0 \ (mod\ 6n)$ (2)

   $12(i - j) = 0 \ (mod\ 6n)$ (3)

   $12(i - j) = k6n$ (4)

   Sehingga

   $2(i - j) = kn$, untuk setiap $k$ (5)

   Tanpa menghilangkan keumumannya, asumsikan $i > j$

   $0 < i - j < n$ (6)

   $0 < 2(i - j) < 2n$ (7)

   $0 < kn < 2n$ (8)

   Sehingga

   $k = 1$ dan $2(i - j) = n$ (9)

   Karena $n$ ganjil, maka terjadi kontradiksi.

   Jadi label sisi-sisi sikel pada $H_n$ berbeda semua.

II. Akan ditunjukkan bahwa label sisi-sisi spoke pada $H_n$ berbeda semua.

   Label sisi $v_0 v_i$ adalah $2 + 6i - 2 = 6i$, $i = 1, 2, \dots, n$, maka semua label sisi $v_0, v_i$ berbeda.

   Jadi, label sisi-sisi spoke pada $H_n$ berbeda semua.

III. Akan ditunjukkan bahwa label sisi-sisi pendan pada $H_n$ berbeda semua.

   Label sisi $v_i w_i$ adalah $6i - 2 + 6i - 6 = 12i - 8$, $i = 1, 2, \dots, n$, maka semua label sisi $v_i, w_i$ berbeda.

   Jadi, label-sisi pendan pada $H_n$ berbeda semua.

IV. Akan ditunjukkan label sisi-sisi sikel dan spoke pada $H_n$ berbeda semua.

   Andaikan label sisi-sisi $v_i v_{i+1}$ dan $v_0 v_i$ sama, yaitu

   $12i + 2 = 6j \ (mod\ 6n)$ (1)

   $12i - 6j + 2 = 0 \ (mod\ 6n)$ (2)

   Sehingga

   $2 \neq 0 (mod\ 6n)$ (3)

   Maka, terjadi kontradiksi.

   Jadi, label sisi-sisi sikel dan spoke pada $H_n$ berbeda semua.

V. Akan ditunjukkan label sisi-sisi sikel dan pendan pada $H_n$ berbeda semua.

   Andaikan label sisi-sisi $v_i v_{i+1}$ dan $v_i w_i$ sama, yaitu

   $12i + 2 = 12j - 8 \ (mod\ 6n)$ (1)

   $12i - 12j + 10 = 0 \ (mod\ 6n)$ (2)

   Sehingga

   $10 \neq 0 \ (mod\ 6n)$ (3)

Maka, terjadi kontradiksi.
Jadi, label sisi-sisi sikel dan pendan pada $H_n$ berbeda semua.

VI. Akan ditunjukkan label sisi-sisi spoke dan pendan pada $H_n$ berbeda semua.
Andaikan label sisi-sisi $v_i v_{i+1}$ dan $v_0 v_i$ sama, yaitu

$12i - 8 = 6j \ (mod\ 6n)$ (1)

$12i - 6j - 8 = 0 \ (mod\ 6n)$ (2)

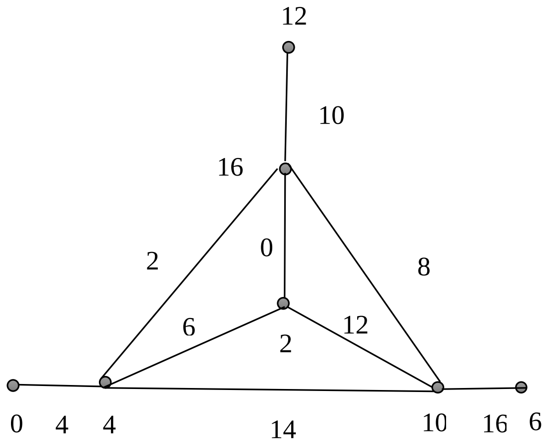
Sehingga

$-8 \neq 0 \ (mod\ 6n)$ (3)

Maka, terjadi kontradiksi.
Jadi, label sisi-sisi sikel dan pendan pada $H_n$ berbeda semua.

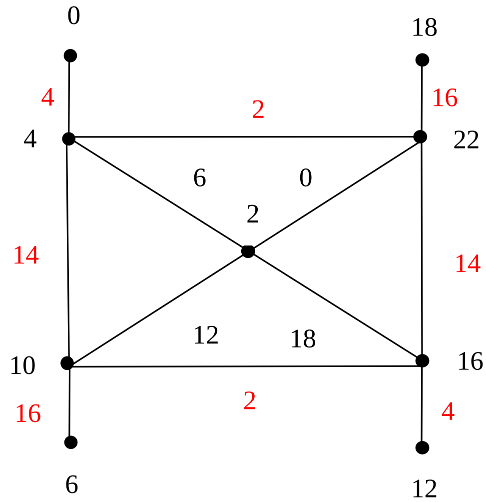
Jadi, graf helm $H_n$ dengan $n$ ganjil memenuhi pelabelan harmonis genap sejati. Sehingga, graf helm $H_n$ merupakan graf harmonis genap sejati. ■

Contoh :




**Gambar 10 .** Graf Harmonis Genap Sejati $H_3$ mod 18

Catatan : Graf helm $H_n$ dengan $n$ genap bukan merupakan graf harmonis genap sejati. Seprti yang ditunjukkan pada **Gambar 11**.




**Gambar 11.** Graf Helm $H_4$ mod 24 bukan graf harmonis genap sejati

## PENUTUP

### SIMPULAN

Pada pemaparan yang disampaikan pada bagian sebelumnya mengenai pelabelan harmonis genap sejati pada beberapa graf terhubung, dapat disimpulkan sebagai berikut :

1. Graf pohon bukan merupakan graf harmonis genap sejati.
2. Graf roda $W_n$ dengan $n$ ganjil merupakan pelabelan harmonis genap sejati.
3. Graf helm $H_n$ dengan $n$ganjil merupakan pelabelan harmonis genap sejati.

### SARAN

Penelitian tentang pelabelabelan graf harmonis genap sejati dapat dilanjutkan untuk graf-graf yang lain seperti graf tak terhubung.

## DAFTAR PUSTAKA


Binthiya,R, P.B. Sarasija. (2014). Some new even harmonious graphs. Internat. math. Soft Comput.

Budayasa, I. K. (2016). *Teori Graph dan Aplikasinya.* Surabaya: Unesa University Press.

Gallian, J. (2014,#DS6). A Dynamic Survey of Graph Labeling. *Elect J. Combin*.

Gallian, J.A., Danielle Steward. (2015). Even Harmonious Labelings of disjoint graphs with a small component. *ScienceDirect*.

Marmanita, W. E. (2002). Eksentrik Digraf pada Graf Lintasan, Graf Sikel dan Graf Lengkap.

Jember: Digital Repository Universitas Jember.

Sarasija, P.B.,R. Binthiya. (2011). Even harmonious Graph with Application. *International Journal of Computer Science and Information Security* .

R.L. Graham, N.J.A. Sloane. (1980). On Additive Base and Harmonious Graphs. *SIAM J Alg. Disc Math*, 3820-404.

Risti Dwi Rahayu, Y. K. (2018). Dekomposisi Graf Helm. Semarang: Journal of Mathematics and Mathematics Education.

Rosa, A. (1967). On Certain Valuation of Vertices of a Graph. Dalam *Theory of Graph* (hal. 345-355). Gardon and Breach, N.Y. and Denod Paris.

S.C. Lopez, F. M. (2014). perfec edge-magic labelings. Romanic: Bull. Math. Soc. sci. Math Romanic.