MATH*unesa*
Jurnal Ilmiah Matematika
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115

Volume 11 *No* 02
Tahun 2023

MULTIHIMPUNAN FUZZY INTUISIONISTIK DAN SIFAT-SIFATNYA

Fadlila Septyani Putri
Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : fadlila.19018@mhs.unesa.ac.id

Dwi Nur Yunianti
Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
Penulis korespondensi: niyan_zalpha@yahoo.com

Abstrak

Himpunan fuzzy merupakan generalisasi dari himpunan crisp. Dalam perkembangannya, himpunan fuzzy digeneralisasi menjadi himpunan fuzzy intuisionistik. Dalam perkembangannya, himpunan fuzzy intuisionistik digeneralisasi menjadi multihimpunan fuzzy intuisionistik. Pada artikel ini, didefiniskan relasi dan operasi pada multihimpunan fuzzy intuisionistik, yaitu himpunan bagian, kesamaan himpunan, irisan, gabungan, komplemen, penjumlahan, dan perkalian. Selain itu, sifat-sifat terkait operasi pada multihimpunan fuzzy intuisionistik diberikan pada artikel ini dengan sifat-sifat operasi berlaku adalah komutatif, asosiatif, distributif, idempoten, involusi dan De Morgan.
Kata kunci: himpunan fuzzy, himpunan fuzzy intuisionistik, multihimpunan fuzzy intuisionistik.

Abstract

Fuzzy sets are a generalization of crisp sets. In its development, fuzzy sets are generalized into intuitionistic fuzzy sets. In its development, intuitionistic fuzzy sets are generalized into intuitionistic fuzzy multisets. In this article, relations and operations on intuitionistic fuzzy multisets are defined, namely part set, set similarity, intersection, combination, complement, addition, and multiplication. In addition, properties related to operations on intuitionistic fuzzy multisets are given in this article with the applicable operation properties being commutative, associative, distributive, idempotent, involution and De Morgan.
Keywords: *fuzzy sets, intuitionistic fuzzy sets, intuitionistic fuzzy multisets.*

PENDAHULUAN

Konsep himpunan fuzzy pertama kali diperkenalkan oleh Lotfi Asker Zadeh yang merupakan generalisasi dari himpunan crisp. Himpunan fuzzy adalah himpunan pasangan terurut elemen himpunan fuzzy dan derajat keanggotannya. Derajat keanggotaan tersebut mulai dari 0 sampai dengan 1, sedangkan himpunan crisp elemennya memiliki derajat keanggotaan 0 dan 1 (Zadeh, 1965).

Dalam perkembangannya, himpunan fuzzy digeneralisasi menjadi himpunan fuzzy intuisionistik oleh Atanassov. Himpunan fuzzy intuisionistik adalah himpunan tiga tupel terurut elemen himpunan fuzzy intuisionistik, derajat keanggotaan dan derajat ketak-anggotaannya. Hal ini berbeda dengan himpunan fuzzy yang elemennya hanya memiliki derajat keanggotaan. Pada himpunan fuzzy intuisionistik derajat keanggotaan dan derajat ketak-anggotaannya berturut-turut bernilai mulai dari 0 sampai dengan 1, serta dengan syarat jumlah kedua derajat tersebut mulai dari 0 sampai dengan 1 (Atanassov, 1986).

Berdasarkan perkembangan himpunan fuzzy intuisionistik, Shinoj dan John (2012) mengembangkan multihimpunan fuzzy intuisionistik. Multihimpunan fuzzy intuisionistik adalah himpunan tiga tupel terurut elemen multihimpunan fuzzy intuisionistik, derajat keanggotaan dan derajat ketak-anggotaannya, dengan kedua derajat tersebut dapat bernilai banyak. Multihimpunan fuzzy intuisionistik dapat digunakan untuk mengukur tingkat ketidakpastian suatu masalah yang memiliki objek yang sama dan berulang (Shinoj dan John, 2013). Sehingga aplikasi multihimpunan fuzzy intuisionistik sangat luas di berbagai bidang. Adapun permasalahan yang bisa diselesaikan dengan konsep multihimpunan fuzzy intuisionistik adalah diagnosis medik (Shinoj dan John, 2012), robotik (Shinoj dan John, 2013) dan distribusi binomial (Ejegwa dan Awolola, 2014). Oleh karena itu, penelitian tentang multihimpunan fuzzy intuisionistik sangat penting untuk dikembangkan agar dapat memperluas aplikasi multihimpunan fuzzy intuisionistik.

Operasi himpunan seperti gabungan, irisan dan komplemen memiliki banyak manfaat misalnya membangun himpunan baru dari himpunan yang diberikan (Sulaiman dkk, 2022). Pada himpunan fuzzy, himpunan fuzzy intuisionistik, maupun multihimpunan fuzzy intuisionistik telah dikembangkan operasi himpunan, diantaranya komplemen, irisan, gabungan dan sebagainya.

Berdasarkan hal tersebut, dalam usulan artikel ini akan mengkaji kembali artikel yang telah ditulis oleh Ejegwa dan Awolola (2013) tentang sifat-sifat operasi multihimpunan fuzzy intuisionistik. Namun pada artikel tersebut belum tercantum bukti tentang sifat-sifat operasi multihimpunan fuzzy intuisionistik. Sehingga dalam artikel ini, akan disajikan bukti tentang sifat-sifat operasi multihimpunan fuzzy intuisionistik.

KAJIAN TEORI

Dalam artikel ini, penulis menggunakan beberapa definisi serta teorema tentang himpunan crisp, himpunan fuzzy dan himpunan fuzzy intuisionistik yang dapat menunjang artikel ini.

HIMPUNAN CRISP

Berikut ini diberikan definisi, teorema dan contoh tentang himpunan crisp.

Definisi 2.1. Himpunan merupakan kumpulan objek berbeda yang dapat didefinisikan dengan jelas.

(Sulaiman dkk, 2022)

Contoh 2.1. $F = \{\text{bilangan bulat}\} = \{1,2,3,4, \dots\}$

Teorema 2.1. Jika $c, h, l \in \mathbb{R}$ maka berlaku

(i) $\min\{\min\{c,h\}, l\} = \min\{c, \min\{h,l\}\}$

(ii) $\max\{\max\{c,h\}, l\} = \max\{c, \max\{h,l\}\}$

Teorema 2.2. Jika $c, h, l \in \mathbb{R}$ dan $c \geq 0$ maka berlaku

(i) $\min\{c, \min\{h,l\}\} = \max\{\min\{c,h\}, \min\{c,l\}\}$

(ii) $\max\{c, \max\{h,l\}\} = \min\{\max\{c,h\}, \max\{c,l\}\}$

(Silambarasan, 2021)

Teorema 2.3. Jika $c, h \in \mathbb{R}$ maka berlaku

(i) $\min\{c,h\} = -\max\{-c,-h\}$

(ii) $\max\{c,h\} = -\min\{-c,-h\}$

Teorema 2.4. Jika $c, h, l \in \mathbb{R}$ dan $c \geq 0$ maka berlaku

(i) $c + \min\{h,l\} = \min\{c+h, c+l\}$

(ii) $c + \max\{h,l\} = \max\{c+h, c+l\}$

(Silambarasan, 2021)

Teorema 2.5. Jika $c, h, l \in \mathbb{R}$ dan $c \geq 0$ maka berlaku

(i) $c \cdot \min\{h,l\} = \min\{c \cdot h, c \cdot l\}$

(ii) $c \cdot \max\{h,l\} = \max\{c \cdot h, c \cdot l\}$

(Silambarasan, 2021)

Teorema 2.6. Jika $a, b, c \in \mathbb{R}$ dan $a \geq 0$ maka berlaku

(i) $\min\{c+h, c+l\} - \min\{c \cdot h, c \cdot l\}$
$= \min\{c+h-c\cdot h, c+l-c\cdot l\}$

(ii) $\max\{c+h, c+l\} - \max\{c \cdot h, c \cdot l\}$
$= \max\{c+h-c\cdot h, c+l-c\cdot l\}$

HIMPUNAN FUZZY

Berikut ini diberikan definisi serta contoh tentang himpunan fuzzy.

Definisi 2.2. Misalkan J himpunan tak kosong. Himpunan fuzzy O atas J didefinisikan sebagai

$$O = \{(j, \mu_O(j)) \mid j \in J\}$$

dengan μ_O merupakan fungsi keanggotaan himpunan fuzzy O dengan $\mu_O : J \to [0,1]$ dan $\mu_O(j)$ merupakan derajat keanggotaan j pada himpunan fuzzy O.

(Zadeh, 1965)

Contoh2.2. Himpunan fuzzy bilangan real yang lebih besar dari 0, dapat didefinisikan sebagai

$$O = \{(j, \mu_O(j)) \mid j \in J\}$$

dengan

$$\mu_O(j) = \begin{cases} 0, j \leq 0 \\ \dfrac{1}{1+\frac{1}{j^2}}, j > 0 \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi tersebut, dapat ditentukan derajat keanggotaan dari setiap bilangan real yang lebih besar dari 0. Dimana semakin besar derajat keanggotaannya maka bilangan real tersebut semakin besar dan semakin jauh dari 0. Misalnya bilangan 0.1 mempunyai derajat keanggotaan 0.0099, bilangan 5 mempunyai derajat keanggotaan 0.961 dan bilangan 0 mempunyai derajat keanggotaan 0.

HIMPUNAN FUZZY INTUISIONISTIK

Berikut ini diberikan definisi serta teorema tentang himpunan fuzzy intuisionistik.

Definisi 2.3. Misalkan J himpunan tak kosong. Himpunan fuzzy intuisionistik A atas J didefinisikan sebagai

$$O = \{(j, \mu_O(j), v_O(j)) \mid j \in J\}$$

dengan μ_O dan v_O berturut-turut merupakan fungsi keanggotaan dan fungsi ketakanggotaan himpunan fuzzy intuisionistik J dengan $\mu_O : J \to [0,1]$ dan v_O :

$J \to [0,1]$. Serta, $\mu_O(j)$ dan $v_O(j)$ adalah derajat keanggotaan dan derajat ketak-anggotaan j pada himpunan fuzzy intuisionistik O. Lebih lanjut

$$\pi_O(j) = 1 - \mu_O(j) - v_O(j)$$

menyatakan derajat keragu-raguan j pada himpunan fuzzy intuisionistik O.

(Atanassov, 1986)

Contoh 2.3. Seorang ingin mengklasifikasikan buah jeruk yang dia jual kepada pelanggannya. Salah satu indikator buah jeruk yang enak adalah buah jeruk yang memiliki rasa manis. Misalkan $J = \{\text{mandarin, sunkist, keprok, siam}\}$ himpunan jenis jeruk yang dijual, maka himpunan fuzzy intuisionistik o atas J adalah himpunan jenis jeruk yang manis yang didefinisikan sebagai berikut

$$o = \{(\text{mandarin}, 0.9, 0.1), (\text{sunkist}, 0.95, 0.05), (\text{keprok}, 0.7, 0.3), (\text{siam}, 0.75, 0.25)\}$$

Pada contoh di atas, jeruk Sunkist menjadi buah jeruk yang memiliki rasa paling manis di antara jeruk mandarin, jeruk keprok dan jeruk siam, tetapi memiliki rasa sedikit tidak manis yang ditunjukkan dengan derajat ketakanggotaan 0.05. Sedangkan jeruk keprok menjadi buah jeruk yang memiliki rasa paling tidak manis diantara jeruk mandarin, sunkist dan siam.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Shinoj dan John (2012) mengembangkan multihimpunan fuzzy intuisionistik dengan mengkombinasikan konsep himpunan fuzzy intuisionistik dan multihimpunan fuzzy dengan definisi sebagai berikut.

Definisi 3.1. Misalkan T merupakan himpunan tak kosong. E disebut multihimpunan fuzzy intuisionistik atas T jika

$$E = \left\{\left(t, C_{M_E}(t), C_{N_E}(t)\right) \mid t \in T\right\}$$

untuk setiap $t \in T$, $C_{M_E}(t)$ menyatakan $\left(\mu_E^1(t), \mu_E^2(t), \dots, \mu_E^n(t)\right)$ dan $C_{N_E}(t)$ menyatakan $\left(v_E^1(t), v_E^2(t), \dots, v_E^n(t)\right)$ dengan $\mu_E^1(t) \geq \mu_E^2(t) \geq \cdots \geq \mu_E^n(t)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $0 \leq \mu_E^i(t) + v_E^i(t) \leq 1, i = 1,2,\dots,n$. $C_{M_E}(t)$ merupakan derajat keanggotaan dan $C_{N_E}(t)$ merupakan derajat ketak-anggotaan t pada multihimpunan fuzzy intuisionistik E.

Berikut ini diberikan salah satu contoh multihimpunan fuzzy intuisionistik.

Contoh 3.1. Misalkan

$$T = \{\text{demam}, \text{batuk}, \text{nyeri tenggorokan}, \text{pusing}, \text{badan sakit}\}$$

adalah himpunan gejala penyakit types. Untuk membuat diagnosis yang tepat untuk pasien, dilakukan pengambilan tiga sampel pada tiga waktu yang berbeda dalam sehari, yaitu pukul 07.00, 13.00 dan 19.00, maka multihimpunan fuzzy intuisionistik E atas T adalah himpunan gejala yang dirasakan pasien didefinisikan sebagai berikut

$$E = \left\{\begin{array}{c} (\text{demam}, (0.6, 0.7, 0.5), (0.4, 0.2, 0.1)), \\ (\text{batuk}, (0.4, 0.4, 0.3), (0.6, 0.4, 0.3)), \\ (\text{nyeri tenggorokan}, (0.2, 0.1, 0), (0.8, 0.7, 0.7)), \\ (\text{pusing}, (0.7, 0.6, 0.5), (0.4, 0.3, 0.2)), \\ (\text{badan sakit}, (0.4, 0.3, 0.2), (0.6, 0.4, 0.4)) \end{array}\right\}$$

Pada contoh di atas, gejala demam memiliki derajat keanggotaan $(0.6, 0.7, 0.5)$ dan derajat ketak-anggotaan $(0.4, 0.2, 0.1)$.

Dalam multihimpunan fuzzy intuisionistik dikembangkan panjang elemen dan kardinalitas himpunan. Berikut ini diberikan definisi tentang panjang elemen dan kardinalitas multihimpunan fuzzy intuisionistik beserta contohnya.

Definisi 3.2. Misalkan E multihimpunan fuzzy intuisionistik atas T. Panjang suatu elemen t dalam multihimpunan fuzzy intuisionistik E adalah sebagai berikut

$$L(t: E) = \left|C_{M_E}(t)\right| = \left|C_{N_E}(t)\right|$$

(Shinoj dan John, 2012)

Definisi 3.3. Misalkan E dan K multihimpunan fuzzy intuisionistik atas T. Panjang suatu elemen t dalam multihimpunan fuzzy intuisionistik E dan K adalah sebagai berikut

$$L(t: E, K) = \max\{L(t: E), L(t: K)\}$$

(Shinoj dan John, 2012)

Definisi 3.4. Misalkan E dan K multihimpunan fuzzy intuisionistik atas T. Kardinalitas multihimpunan fuzzy intuisionistik E dan K adalah sebagai berikut

$$\eta(E, K) = \max\{L(t: E, K) \mid t \in T\}$$

Contoh 3.2. Misalkan $T = \{a, b, c, d\}$ adalah himpunan semesta. Misalkan E dan K multihimpunan fuzzy intuisionistik atas T yang didefinisikan dengan

$$E = \left\{\begin{array}{c} (b, (0.3,0.2), (0.4,0.5)), \\ (c, (1,0.5,0.5), (0,0.5,0.2)), \\ (d, (0.5,0.4,0.3,0.2), (0.4,0.6,0.6,0.7)) \end{array}\right\}$$

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{array}{c} (a, (0.2,0.1), (0.7,0.8)), \\ (b, (0.4), (0.2)), \\ (c, (1,0.3,0.2), (0,0.4,0.5)) \end{array}\right\}$$

Maka

$$L(a: E) = 0, L(b: E) = 2, L(c: E) = 3, L(d: E) = 4$$

$L(a{:}K) = 2, L(b{:}K) = 1, L(c{:}K) = 3, L(d{:}K) = 0$
Sehingga diperoleh
$L(a{:}E,K) = 2, L(b{:}E,K) = 2, L(c{:}E,K) = 3,$
$L(d{:}E,K) = 4$
Jadi $\eta(E,K) = 4$.

Dalam multihimpunan fuzzy intuisionistik dikembangkan relasi himpunan, yaitu himpunan bagian dan kesamaan himpunan. Berikut ini diberikan definisi tentang relasi pada multihimpunan fuzzy intuisionistik beserta contohnya.

Definisi 3.5. Misalkan E dan K multihimpunan fuzzy intuisionistik atas T. E disebut himpunan bagian K ditulis $E \subseteq K$ jika $\mu_E^i(t) \leq \mu_K^i(t)$ dan $v_E^i(t) \geq v_K^i(t)$ untuk setiap $t \in T$ dan $i = 1,2,\dots,n$.

(Shinoj dan John, 2012)

Contoh 3.4. Misalkan $T = \{a,b,c,d\}$ adalah himpunan semesta. Misalkan E dan K multihimpunan fuzzy intuisionistik atas T yang didefinisikan dengan

$$T = \left\{\begin{matrix} (a,(0{,}0),(1{,}1)), \\ (b,(0.3{,}0.2),(0.4{,}0.5)), \\ (c,(1{,}0.5{,}0.5),(0{,}0.5{,}0.2)), \\ (d,(0.5{,}0.4{,}0.3{,}0.2),(0.4{,}0.6{,}0.6{,}0.7)) \end{matrix}\right\}$$

$$K = \left\{\begin{matrix} (a,(0.2{,}0.1),(0.7{,}0.8)), \\ (b,(0.4{,}0.3),(0.2{,}0.3)), \\ (c,(1{,}0.3{,}0.2),(0{,}0.4{,}0.1)), \\ (d,(0{,}0{,}0{,}0),(1{,}1{,}1{,}1)) \end{matrix}\right\}$$

Maka $E \subseteq K$ karena $\mu_E^i(t) \leq \mu_K^i(t)$ dan $v_E^i(t) \geq v_K^i(t)$ untuk setiap i.

Definisi 3.6. Misalkan E dan K multihimpunan fuzzy intuisionistik atas T. E disebut sama dengan K ditulis $E = K$ jika $\mu_E^i(t) = \mu_K^i(t)$ dan $v_E^i(t) = v_K^i(t)$ untuk setiap $t \in T$ dan $i = 1,2,\dots,n$.

(Ejegwa dan Awolola, 2013)

Contoh 3.4. Misalkan $T = \{a,b,c,d\}$ adalah himpunan semesta. Misalkan E dan K multihimpunan fuzzy intuisionistik atas T yang didefinisikan dengan

$$E = \left\{\begin{matrix} (a,(0{,}0),(1{,}1)), \\ (b,(0.3{,}0.2),(0.4{,}0.5)), \\ (c,(1{,}0.5{,}0.5),(0{,}0.5{,}0.2)), \\ (d,(0.5{,}0.4{,}0.3{,}0.2),(0.4{,}0.6{,}0.6{,}0.7)) \end{matrix}\right\}$$

$$K = \left\{\begin{matrix} (a,(0{,}0),(1{,}1)), \\ (b,(0.3{,}0.2),(0.4{,}0.5)), \\ (c,(1{,}0.5{,}0.5),(0{,}0.5{,}0.2)), \\ (d,(0.5{,}0.4{,}0.3{,}0.2),(0.4{,}0.6{,}0.6{,}0.7)) \end{matrix}\right\}$$

Maka $E = K$ karena $\mu_E^i(t) = \mu_K^i(t)$ dan $v_E^i(t) = v_K^i(t)$ untuk setiap i.

Teorema berikut ini menunjukkan syarat perlu dan cukup relasi kesamaan himpunan pada multihimpunan fuzzy intuisionistik.

Teorema 3.1. Misalkan E dan K multihimpunan fuzzy intuisionistik atas T. $E = K$ jika dan hanya jika $E \subseteq K$ dan $E \subseteq K$.

(Shinoj dan John, 2012)

Bukti. Karena E dan K multihimpunan fuzzy intuisionistik atas T, maka

a. Jika E sama dengan K maka akan diperoleh E himpunan bagian K dan K himpunan bagian E
   Karena $E = K$ maka $\mu_E^i(t) = \mu_K^i(t)$ dan $v_E^i(t) = v_K^i(t)$
   Untuk $\mu_E^i(t) = \mu_K^i(t)$ dapat dinyatakan
   $\mu_E^i(t) \leq \mu_K^i(t)$ dan $\mu_K^i(t) \leq \mu_E^i(t)$ (3.1)
   Untuk $v_E^i(t) = v_K^i(t)$ dapat dinyatakan
   $v_E^i(t) \geq v_K^i(t)$ dan $v_K^i(t) \geq v_E^i(t)$ (3.2)
   Berdasarkan Persamaan 3.1 dan Persamaan 3.2 diperoleh hasil bahwa E himpunan bagian L dan L himpunan bagian E.

b. Jika E himpunan bagian K dan K himpunan bagian E maka akan diperoleh E sama dengan K.
   Karena $E \subseteq K$ dan $K \subseteq E$ maka $\mu_E^i(t) \leq \mu_K^i(t)$, $\mu_K^i(t) \leq \mu_E^i(t)$, $v_E^i(t) \geq v_K^i(t)$ dan $v_K^i(t) \geq v_E^i(t)$
   Untuk $\mu_E^i(t) \leq \mu_K^i(t)$ dan $\mu_K^i(t) \leq \mu_E^i(t)$ diperoleh $\mu_E^i(t) = \mu_K^i(t)$ (3.3)
   Untuk $v_E^i(t) \geq v_K^i(t)$ dan $v_K^i(t) \geq v_E^i(t)$ diperoleh $v_E^i(t) = v_K^i(t)$ (3.4)
   Berdasarkan Persamaan 3.3 dan Persamaan 3.4 diperoleh hasil bahwa E sama dengan K.

Sehingga berdasarkan a dan b terbukti bahwa $E = K$ jika dan hanya jika $E \subseteq K$ dan $K \subseteq E$ ■

Dalam multihimpunan fuzzy intuisionistik dikembangkan operasi himpunan, yaitu irisan, gabungan, komplemen, penjumlahan dan perkalian. Berikut ini diberikan definisi tentang operasi pada multihimpunan fuzzy intuisionistik beserta contohnya.

Definisi 3.7. Misalkan E dan K multihimpunan fuzzy intuisionistik atas T. Operasi pada multihimpunan fuzzy intuisionistik E dan K adalah

a. Irisan

$$E \cap K = \left\{\left(t, C_{M_{E\cap K}}(t), C_{N_{E\cap K}}(t)\right) \mid t \in T\right\}$$

   dengan

$$C_{M_{E\cap K}}(t) = \min\{\mu_E^i(t), \mu_K^i(t)\} \text{ dan}$$
$$C_{N_{E\cap K}}(t) = \max\{v_E^i(t), v_K^i(t)\}$$

b. Gabungan

$$E \cup K = \left\{\left(t, C_{M_{E\cup K}}(t), C_{N_{E\cup K}}(t)\right) \mid t \in T\right\}$$

dengan

$$C_{M_{E\cup K}}(t) = \max\{\mu_E^i(t), \mu_K^i(t)\} \text{ dan}$$
$$C_{N_{E\cap K}}(t) = \min\{v_E^i(t), v_K^i(t)\}$$

c. Komplemen

$$E^c = \left\{\left(t, C_{M_{E^c}}(t), C_{N_{E^c}}(t)\right) \mid t \in T\right\}$$

dengan

$$C_{M_{E^c}}(t) = C_{N_E}(t) \text{ dan } C_{N_{E^c}}(t) = C_{M_E}(t)$$

d. Penjumlahan

$$E \oplus K = \left\{\left(t, C_{M_{E\oplus K}}(t), C_{N_{E\oplus K}}(t)\right) \mid t \in T\right\}$$

dengan

$$C_{M_{E\oplus K}}(t) = \mu_E^i(t) + \mu_K^i(t) - \mu_E^i(t) \cdot \mu_K^i(t) \text{ dan}$$
$$C_{N_{E\oplus K}}(t) = v_E^i(t) \cdot v_K^i(t)$$

e. Perkalian

$$E \otimes K = \left\{\left(t, C_{M_{E\otimes K}}(t), C_{N_{E\otimes K}}(t)\right) \mid t \in T\right\}$$

dengan

$$, C_{M_{E\otimes K}}(t) = \mu_E^i(t) \cdot \mu_K^i(t) \text{ dan}$$
$$C_{N_{E\otimes K}}(t) = v_E^i(t) + v_K^i(t) - v_E^i(t) \cdot v_K^i(t)$$

(Shinoj dan John, 2012)

Contoh 3.5. Misalkan $T = \{a, b, c, d\}$ adalah himpunan semesta. Misalkan E dan K multihimpunan fuzzy intuisionistik atas T yang didefinisikan dengan

$$E = \left\{\begin{array}{c}(a, (0,0), (1,1)), \\ (b, (0.3,0.2), (0.4,0.5)), \\ (c, (1,0.5,0.5), (0,0.5,0.2)), \\ (d, (0.5,0.4,0.3,0.2), (0.4,0.6,0.6,0.7))\end{array}\right\}$$

$$K = \left\{\begin{array}{c}(a, (0.2,0.1), (0.7,0.8)), \\ (b, (0.4,0), (0.2,1)), \\ (c, (1,0.3,0.2), (0,0.4,0.5)), \\ (d, (0,0,0,0), (1,1,1,1))\end{array}\right\}$$

Maka

$$E \cap K = \left\{\begin{array}{c}(a, (0,0), (1,1)), \\ (b, (0.3,0), (0.4,1)), \\ (c, (1,0.3,0.2), (0,0.5,0.5)), \\ (d, (0,0,0,0), (1,1,1,1))\end{array}\right\}$$

$$E \cup K = \left\{\begin{array}{c}(a, (0.2,0.1), (0.7,0.8)), \\ (b, (0.4,0.2), (0.2,0.5)), \\ (c, (1,0.5,0.5), (0,0.4,0.2)), \\ (d, (0.5,0.4,0.3,0.2), (0.4,0.6,0.6,0.7))\end{array}\right\}$$

$$E^c = \left\{\begin{array}{c}(a, (1,1), (0,0)), \\ (b, (0.4,0.5), (0.3,0.2)), \\ (c, (0,0.5,0.2), (1,0.5,0.5)), \\ (d, (0.4,0.6,0.6,0.7), (0.5,0.4,0.3,0.2))\end{array}\right\}$$

$$K^c = \left\{\begin{array}{c}(a, (0.7,0.8), (0.2,0.1)), \\ (b, (0.2,1), (0.4,0)), \\ (c, (0,0.4,0.5), (1,0.3,0.2)), \\ (d, (1,1,1,1), (0,0,0,0))\end{array}\right\}$$

$$E \oplus K = \left\{\begin{array}{c}(a, (0.2,0.1), (0.7,0.8)), \\ (b, (0.58,0.2), (0.08,0.5)), \\ (c, (1,0.65,0.6), (0,0.2,0.1)), \\ (d, (0.5,0.4,0.3,0.2), (0.4,0.6,0.6,0.7))\end{array}\right\}$$

$$E \otimes K = \left\{\begin{array}{c}(a, (0,0), (1,1)), \\ (b, (0.12,0), (0.52,1)), \\ (c, (1,0.15,0.1), (0,0.7,0.6)), \\ (d, (0,0,0,0), (1,1,1,1))\end{array}\right\}$$

Teorema berikut ini menunjukkan bahwa dalam multihimpunan fuzzy intuisionistik berlaku sifat operasi komutatif, asosiatif, distributif dan idempoten terhadap operasi irisan dan gabungan.

Teorema 3.2. Misalkan G, L dan Q multihimpunan fuzzy intuisionistik atas Z. Maka berlaku sifat operasi berikut

a. Komutatif
   (i) $G \cap L = L \cap G$
   (ii) $G \cup L = L \cup G$
b. Asosiatif
   (i) $(G \cap L) \cap Q = G \cap (L \cap Q)$
   (ii) $(G \cup L) \cup Q = G \cup (L \cup Q)$
c. Distributif
   (i) $G \cap (L \cup C) = (G \cap L) \cup (G \cap Q)$
   (ii) $G \cup (L \cap C) = (G \cup L) \cap (G \cup Q)$
d. Idempoten
   (i) $G \cap G = G$
   (ii) $G \cup G = G$

(Ejegwa dan Awolola, 2013)

Bukti. Karena A, B dan C multihimpunan fuzzy intuisionistikatas X maka

a. Komutatif
   (i) $G \cap L = \left\{\left(z, C_{M_{G\cap L}}(z), C_{N_{G\cap L}}(z)\right) \mid z \in Z\right\}$
   dengan
   $C_{M_{G\cap L}}(z) = \min\{\mu_G^i(z), \mu_L^i(z)\}$ dan
   $C_{N_{G\cap L}}(z) = \max\{v_G^i(z), v_L^i(z)\}$
   Karena
   $C_{M_{G\cap L}}(z) = \min\{\mu_G^i(z), \mu_L^i(z)\}$
   maka diperoleh
   $\min\{\mu_G^i(z), \mu_L^i(z)\} = \min\{\mu_G^i(z), \mu_L^i(z)\}$

$= C_{M_{G\cap L}}(z)$
Sehingga
$$C_{M_{G\cap L}}(z) = C_{M_{G\cap L}}(z) \quad (3.5)$$
Dan karena
$C_{N_{G\cap L}}(z) = \max\{v_G^i(z), v_L^i(z)\}$
maka diperoleh
$\max\{v_G^i(z), v_L^i(z)\} = \max\{v_L^i(z), v_G^i(z)\}$
$= C_{N_{L\cap G}}(z)$
sehingga
$$C_{N_{G\cap L}}(z) = C_{N_{L\cap G}}(z) \quad (3.6)$$
Berdasarkan Persamaan 3.5 dan Persamaan 3.6 diperoleh
$$\left\{\left(z, C_{M_{G\cap L}}(z), C_{N_{G\cap L}}(z)\right) \mid z \in Z\right\} = \left\{\left(z, C_{M_{L\cap G}}(z), C_{N_{L\cap G}}(z)\right) \mid z \in Z\right\}$$
Jadi terbukti bahwa $G \cap L = L \cap G$.

(ii) $G \cup L = \left\{\left(z, C_{M_{G\cup L}}(z), C_{N_{G\cup L}}(z)\right) \mid z \in Z\right\}$
dengan
$C_{M_{G\cup L}}(z) = \max\{\mu_G^i(z), \mu_L^i(z)\}$ dan
$C_{N_{G\cup L}}(z) = \min\{v_G^i(z), v_L^i(z)\}$
Karena
$C_{M_{G\cup L}}(z) = \max\{\mu_G^i(z), \mu_L^i(z)\}$
$= \max\{\mu_L^i(z), \mu_G^i(z)\} = C_{M_{L\cup G}}(z)$
maka diperoleh
$$C_{M_{G\cup L}}(z) = C_{M_{L\cup G}}(z) \quad (3.7)$$
Dan karena
$C_{N_{G\cup L}}(z) = \min\{v_G^i(z), v_L^i(z)\}$
$= \min\{v_L^i(z), v_G^i(z)\} = C_{N_{L\cup G}}(z)$
maka diperoleh
$$C_{N_{G\cup L}}(z) = C_{N_{L\cup G}}(z) \quad (3.8)$$
Sehingga berdasarkan Persamaan 3.5 dan Persamaan 3.6 diperoleh
$$\left\{\left(z, C_{M_{G\cup L}}(z), C_{N_{G\cup L}}(z)\right) \mid z \in Z\right\} = \left\{\left(z, C_{M_{L\cup G}}(z), Q_{N_{L\cup G}}(z)\right) \mid z \in Z\right\}$$
Jadi terbukti bahwa $G \cup L = L \cup G$.

b. Asosiatif

(i) $(G \cap L) \cap Q = \left\{\left(z, C_{M_{(G\cap L)\cap Q}}(z), C_{N_{(G\cap L)\cap Q}}(z)\right) \mid z \in Z\right\}$
dengan
$C_{M_{(G\cap L)\cap Q}}(z) = \min\{C_{M_{G\cap L}}(z), \mu_Q^i(z)\}$ dan
$C_{N_{(G\cap L)\cap Q}}(z) = \max\{C_{N_{G\cap L}}(z), v_Q^i(z)\}$
Karena
$C_{M_{(G\cap L)\cap Q}}(z) = \min\{C_{M_{G\cap L}}(z), \mu_Q^i(z)\}$
$= \min\{\min\{\mu_G^i(z), \mu_L^i(z)\}, \mu_Q^i(z)\}$
Berdasarkan Teorema 2.1 berlaku
$\min\{\min\{\mu_G^i(z), \mu_L^i(z)\}, \mu_Q^i(z)\}$
$= \min\{\mu_G^i(z), \mu_L^i(z), \mu_Q^i(z)\}$
$= \min\left\{\mu_G^i(z), \min\{\mu_L^i(z), \mu_Q^i(z)\}\right\}$
$= \min\left\{\mu_G^i(z), C_{M_{L\cap Q}}(z)\right\} = C_{M_{G\cap(L\cap Q)}}(z)$
Maka diperoleh
$$C_{M_{(G\cap L)\cap Q}}(z) = C_{M_{G\cap(L\cap Q)}}(z) \quad (3.9)$$
Dan karena
$C_{N_{(G\cap L)\cap Q}}(z) = \max\{C_{N_{G\cap L}}(z), v_Q^i(z)\}$
$= \max\{\max\{v_G^i(z), v_L^i(z)\}, v_Q^i(z)\}$
Berdasarkan teorema 2.1 berlaku
$\max\{\max\{v_G^i(z), v_L^i(z)\}, v_Q^i(z)\}$
$= \max\{v_G^i(z), v_L^i(z), v_Q^i(z)\}$
$= \max\left\{v_G^i(z), \max\{v_L^i(z), v_Q^i(z)\}\right\}$
$= \max\left\{v_G^i(z), C_{N_{L\cap Q}}(z)\right\} = C_{N_{G\cap(L\cap Q)}}(z)$
Maka diperoleh
$$C_{N_{(G\cap L)\cap Q}}(z) = C_{N_{G\cap(L\cap Q)}}(z) \quad (3.10)$$
Sehingga berdasarkan Persamaan 3.9 dan Persamaan 3.10 diperoleh
$$\left\{\left(z, C_{M_{(G\cap L)\cap Q}}(z), C_{N_{(G\cap L)\cap Q}}(z)\right) \mid z \in Z\right\} = \left\{\left(z, C_{M_{G\cap(L\cap Q)}}(z), C_{N_{G\cap(L\cap Q)}}(z)\right) \mid z \in Z\right\}$$
Jadi terbukti bahwa $(G \cap L) \cap Q = G \cap (L \cap Q)$.

(ii) $(G \cup L) \cup Q = \left\{\left(z, C_{M_{(G\cup L)\cup Q}}(z), C_{N_{(G\cup L)\cup Q}}(z)\right) \mid z \in Z\right\}$
dengan
$C_{M_{(G\cup L)\cup Q}}(z) = \max\{C_{M_{G\cup L}}(z), \mu_Q^i(z)\}$ dan
$C_{N_{(G\cup L)\cup Q}}(z) = \min\{C_{N_{G\cup L}}(z), v_Q^i(z)\}$
Karena
$C_{M_{(G\cup L)\cup Q}}(z) = \max\{C_{M_{G\cup L}}(z), \mu_Q^i(z)\}$
$= \max\{\max\{\mu_G^i(z), \mu_L^i(z)\}, \mu_Q^i(z)\}$
Berdasarkan teorema 2.1 berlaku
$\max\{\max\{\mu_G^i(z), \mu_L^i(z)\}, \mu_Q^i(z)\}$
$= \max\{\mu_G^i(z), \mu_L^i(z), \mu_Q^i(z)\}$
$= \max\left\{\mu_G^i(z), \max\{\mu_L^i(z), \mu_Q^i(z)\}\right\}$
$= \max\left\{\mu_G^i(z), C_{M_{L\cup Q}}(z)\right\} = C_{M_{G\cup(L\cup Q)}}(z)$
Maka diperoleh
$$C_{M_{(G\cup L)\cup Q}}(z) = C_{M_{G\cup(L\cup Q)}}(z) \quad (3.11)$$
Dan karena
$C_{N_{(G\cup L)\cup Q}}(z) = \min\{C_{N_{G\cup L}}(z), v_Q^i(z)\}$
$= \min\{\min\{v_G^i(z), v_L^i(z)\}, v_Q^i(z)\}$
berdasarkan Teorema 2.1 berlaku
$\min\{\min\{v_G^i(z), v_L^i(z)\}, v_Q^i(z)\}$
$= \min\{v_G^i(z), v_L^i(z), v_Q^i(z)\}$
$= \min\left\{v_G^i(z), \min\{v_L^i(z), v_Q^i(z)\}\right\}$
$= \min\left\{v_G^i(z), C_{N_{L\cup Q}}(z)\right\} = C_{N_{G\cup(L\cup Q)}}(z)$
Maka diperoleh
$$C_{N_{(G\cup L)\cup Q}}(z) = C_{N_{G\cup(L\cup Q)}}(z) \quad (3.12)$$
Sehingga berdasarkan Persamaan 3.11 dan Persamaan 3.12 diperoleh
$$= \left\{\left(z, C_{M_{(G\cup L)\cup Q}}(z), C_{N_{(G\cup L)\cup Q}}(z)\right) \mid z \in Z\right\} = \left\{\left(z, C_{M_{G\cup(L\cup Q)}}(z), C_{N_{G\cup(L\cup Q)}}(z)\right) \mid z \in Z\right\}$$
Jadi terbukti bahwa $(G \cup L) \cup Q = G \cup (L \cup Q)$.

c. Distributif

(i) $G \cap (L \cup Q) = \left\{\left(z, C_{M_{G\cap(L\cup Q)}}(z), C_{N_{G\cap(L\cup Q)}}(z)\right) \mid z \in Z\right\}$

dengan

$C_{M_{G\cap(L\cup Q)}}(z) = \min\left\{\mu_G^i(z), C_{M_{L\cup Q}}(z)\right\}$ dan

$C_{N_{G\cap(L\cup Q)}}(z) = \max\left\{v_G^i(z), C_{N_{L\cup Q}}(z)\right\}$

Karena

$C_{M_{G\cap(L\cup Q)}}(z) = \min\left\{\mu_G^i(z), C_{M_{L\cup Q}}(z)\right\}$

$= \min\left\{\mu_G^i(z), \max\{\mu_L^i(z), \mu_Q^i(z)\}\right\}$

Berdasarkan Teorema 2.2 berlaku

$\min\left\{\mu_G^i(z), \max\{\mu_L^i(z), \mu_Q^i(z)\}\right\}$

$= \max\left\{\min\{\mu_G^i(z), \mu_L^i(z)\}, \min\{\mu_G^i(Z), \mu_Q^i(z)\}\right\}$

$= \max\left\{C_{M_{G\cap L}}(z), C_{M_{G\cap Q}}(z)\right\}$

$= C_{M_{(G\cap L)\cup(G\cap Q)}}(z)$

Maka diperoleh

$$C_{M_{G\cap(L\cup Q)}}(z) = C_{M_{(G\cap L)\cup(G\cap Q)}}(z) \qquad (3.13)$$

Dan karena

$C_{N_{G\cap(L\cup Q)}}(z) = \max\left\{v_G^i(z), C_{N_{L\cup Q}}(z)\right\}$

$= \max\left\{v_G^i(z), \min\{v_L^i(z), v_Q^i(z)\}\right\}$

Berdasarkan Teorema 2.2 berlaku

$\max\left\{v_G^i(z), \min\{v_L^i(z), v_Q^i(z)\}\right\}$

$= \min\left\{\max\{v_G^i(z), v_L^i(z)\}, \max\{v_G^i(z), v_Q^i(z)\}\right\}$

$= \min\left\{C_{N_{G\cap L}}(z), C_{N_{G\cap Q}}(z)\right\}$

$= C_{N_{(G\cap L)\cup(G\cap Q)}}(z)$

Maka diperoleh

$$C_{N_{G\cap(L\cup Q)}}(z) = C_{N_{(G\cap L)\cup(G\cap Q)}}(z) \qquad (3.14)$$

Sehingga berdasarkan Persamaan 3.13 dan Persamaan 3.14 diperoleh

$\left\{\left(z, C_{M_{G\cap(L\cup Q)}}(z), C_{N_{G\cap(L\cup Q)}}(z)\right) \mid z \in Z\right\} = \left\{\left(z, C_{M_{(G\cap L)\cup(G\cap Q)}}(z), C_{N_{(G\cap L)\cup(G\cap Q)}}(z)\right) \mid z \in Z\right\}$

Jadi terbukti bahwa $G \cap (L \cup Q) = (G \cap L) \cup (G \cap Q)$.

(ii) $G \cup (L \cap Q) = \left\{\left(z, C_{M_{G\cup(L\cap Q)}}(z), C_{N_{G\cup(L\cap Q)}}(z)\right) \mid z \in Z\right\}$

dengan

$C_{M_{G\cup(L\cap Q)}}(z) = \max\left\{\mu_G^i(z), C_{M_{L\cap Q}}(z)\right\}$ dan

$C_{N_{G\cup(L\cap Q)}}(z) = \min\left\{v_G^i(z), C_{N_{L\cap Q}}(z)\right\}$

Karena

$C_{M_{G\cup(L\cap Q)}}(z)$

$= \max\left\{\mu_G^i(z), C_{M_{L\cap Q}}(z)\right\}$

$= \max\left\{\mu_G^i(z), \min\{\mu_L^i(z), \mu_Q^i(z)\}\right\}$

Berdasarkan teorema 2.2 berlaku

$\max\left\{\mu_G^i(z), \min\{\mu_L^i(z), \mu_Q^i(z)\}\right\}$

$= \min\left\{\max\{\mu_G^i(z), \mu_L^i(z)\}, \max\{\mu_G^i(z), \mu_Q^i(z)\}\right\}$

$= \min\left\{C_{M_{G\cup L}}(z), C_{M_{G\cup Q}}(z)\right\}$

$= C_{M_{(G\cup L)\cap(G\cup Q)}}(z)$

Maka diperoleh

$$C_{M_{G\cup(L\cap Q)}}(z) = C_{M_{(G\cup L)\cap(G\cup Q)}}(z) \qquad (3.15)$$

Dan karena

$C_{N_{G\cup(L\cap Q)}}(z) = \min\left\{v_G^i(z), C_{N_{L\cap Q}}(z)\right\}$

$= \min\left\{v_G^i(z), \max\{v_L^i(z), v_Q^i(z)\}\right\}$

Berdasarkan Teorema 2.2 berlaku

$\min\left\{v_G^i(z), \max\{v_L^i(z), v_Q^i(z)\}\right\}$

$= \max\left\{\min\{v_G^i(z), v_L^i(z)\}, \min\{v_G^i(z), v_Q^i(z)\}\right\}$

$= \max\left\{C_{N_{G\cup L}}(z), C_{N_{G\cup Q}}(z)\right\}$

$= C_{N_{(G\cup L)\cap(G\cup Q)}}(z)$

Maka diperoleh

$$v_{G\cap(L\cup Q)}(z) = v_{(G\cap L)\cup(G\cap Q)}(z) \qquad (3.16)$$

Sehingga berdasarkan Persamaan 3.15 dan Persamaan 3.16 diperoleh

$\left\{\left(z, C_{M_{G\cup(L\cap Q)}}(z), C_{N_{G\cup(L\cap Q)}}(z)\right) \mid z \in Z\right\} = \left\{\left(z, C_{M_{(G\cup L)\cap(G\cup Q)}}(z), v_{(G\cap L)\cup(G\cap Q)}(z)\right) \mid z \in Z\right\}$

Jadi terbukti bahwa $G \cup (L \cap Q) = (G \cup L) \cap (G \cup Q)$.

d. Idempoten

(i) $G \cap G = \left\{\left(x, C_{M_{G\cap G}}(z), C_{N_{G\cap G}}(z)\right) \mid z \in Z\right\}$

dengan

$C_{M_{G\cap G}}(z) = \min\{\mu_G^i(z), \mu_G^i(z)\}$ dan

$C_{N_{G\cap G}}(z) = \max\{v_G^i(z), v_G^i(z)\}$

Karena

$C_{M_{G\cap G}}(z) = \min\{\mu_G^i(z), \mu_G^i(z)\} = \mu_G^i(z)$

maka diperoleh

$$C_{M_{G\cap G}}(z) = \mu_G^i(z) \qquad (3.17)$$

Dan karena

$C_{N_{G\cap G}}(z) = \max\{v_G^i(z), v_G^i(z)\} = v_G^i(z)$

maka diperoleh

$$C_{N_{G\cap G}}(z) = v_G^i(z) \qquad (3.18)$$

Sehingga berdasarkan Persamaan 3.17 dan Persamaan 3.18 diperoleh

$\left\{\left(z, C_{M_{G\cap G}}(z), C_{N_{G\cap G}}(z)\right) \mid z \in Z\right\} = \left\{\left(z, \mu_G^i(z), v_G^i(z)\right) \mid z \in Z\right\}$

Jadi terbukti bahwa $G \cap G = G$.

(ii) $G \cup G = \left\{\left(z, C_{M_{G\cup G}}(z), C_{N_{G\cup G}}(z)\right) \mid z \in Z\right\}$

dengan

$C_{M_{G\cup G}}(z) = \max\{\mu_G^i(z), \mu_G^i(z)\}$ dan

$C_{N_{G\cup G}}(z) = \min\{v_G^i(z), v_G^i(z)\}$

Karena

$C_{M_{G\cup G}}(z) = \max\{\mu_G^i(z), \mu_G^i(z)\} = \mu_G^i(z)$

maka diperoleh

$$C_{M_{G\cup G}}(z) = \mu_G^i(z) \qquad (3.19)$$

Dan karena

$C_{N_{G\cup G}}(z) = \min\{v_G^i(z), v_G^i(z)\} = v_G^i(z)$
maka diperoleh
$$C_{N_{G\cup G}}(z) = v_G^i(z) \quad (3.20)$$
Sehingga berdasarkan Persamaan 3.19 dan Persamaan 3.20 diperoleh
$$\left\{\left(z, C_{M_{G\cup G}}(z), C_{N_{G\cup G}}(z)\right) \mid z \in Z\right\} = \left\{\left(z, \mu_G^i(z), v_G^i(z)\right) \mid z \in Z\right\}$$
Jadi terbukti bahwa $G \cup G = G$. ■

Teorema berikut ini menunjukkan bahwa dalam multihimpunan fuzzy intuisionistik berlaku sifat operasi involusi.

Teorema 3.3. Misalkan G multihimpunan fuzzy intuisionistik atas Z. Maka berlaku sifat operasi $(G^c)^c = G$

(Ejegwa dan Awolola, 2013)

Bukti. Karena G multihimpunan fuzzy intuisionistikatas Z maka
$$(G^c)^c = \left\{\left(z, C_{M_{(G^c)^c}}(z), C_{N_{(G^c)^c}}(z)\right) \mid z \in Z\right\}$$
dengan
$C_{M_{(G^c)^c}}(z) = C_{N_{G^c}}(x)$ dan $C_{N_{(G^c)^c}}(z) = C_{M_{G^c}}(z)$
Karena
$C_{M_{(G^c)^c}}(z) = C_{N_{G^c}}(x) = C_{M_G}(z)$
maka diperoleh
$$C_{M_{(G^c)^c}}(z) = C_{M_G}(z) \quad (3.21)$$
Dan karena
$C_{N_{(G^c)^c}}(z) = C_{M_{G^c}}(z) = C_{N_G}(z)$
maka diperoleh
$$C_{N_{(G^c)^c}}(z) = C_{N_G}(z) \quad (3.22)$$
Sehingga berdasarkan Persamaan 3.21 dan Persamaan 3.22 diperoleh
$$\left\{\left(z, C_{M_{(G^c)^c}}(z), C_{N_{(G^c)^c}}(z)\right) \mid z \in Z\right\} = \left\{\left(z, C_{M_G}(z), C_{N_G}(z)\right) \mid z \in Z\right\}$$
Jadi terbukti bahwa $(G^c)^c = G$. ■

Teorema berikut ini menunjukkan bahwa dalam multihimpunan fuzzy intuisionistik berlaku sifat operasi De Morgan terhadap operasi irisan dan gabungan.

Teorema 3.4. Misalkan G dan L multihimpunan fuzzy intuisionistik atas Z. Maka berlaku sifat operasi berikut

a. $(G \cap L)^c = G^c \cup L^c$
b. $(G \cup L)^c = G^c \cap L^c$

(Ejegwa dan Awolola, 2013)

Bukti. Karena G dan L multihimpunan fuzzy intuisionistikatas Z, maka

a. $(G \cap L)^c = \left\{\left(z, C_{M_{(G\cap L)^c}}(z), C_{N_{(G\cap L)^c}}(z)\right) \mid z \in Z\right\}$

dengan
$C_{M_{(G\cap L)^c}}(z) = C_{N_{G\cap L}}(z)$ dan
$C_{N_{(G\cap L)^c}}(z) = C_{M_{G\cap L}}(z)$
Karena
$C_{M_{(G\cap L)^c}}(z) = C_{N_{G\cap L}}(z) = \max\{v_G^i(z), v_L^i(z)\}$
$= \max\{v_{G^c}^i(z), v_{L^c}^i(z)\} = C_{M_{G^c\cup L^c}}(z)$
maka diperoleh
$$C_{M_{(G\cap L)^c}}(z) = C_{M_{G^c\cup L^c}}(z) \quad (3.23)$$
Dan karena
$C_{N_{(G\cap L)^c}}(z) = C_{M_{G\cap L}}(z) = \min\{\mu_G^i(z), \mu_L^i(z)\}$
$= \min\{\mu_{G^c}^i(z), \mu_{L^c}^i(z)\} = C_{N_{G^c\cup L^c}}(z)$
maka diperoleh
$$C_{N_{(G\cap L)^c}}(z) = C_{N_{G^c\cup L^c}}(z) \quad (3.24)$$
Sehingga berdasarkan Persamaan 3.23 dan Persamaan 3.24 diperoleh
$$\left\{\left(z, C_{M_{(G\cap L)^c}}(z), C_{N_{(G\cap L)^c}}(z)\right) \mid z \in Z\right\} = \left\{\left(z, C_{M_{G^c\cup L^c}}(z), C_{N_{G^c\cup L^c}}(z)\right) \mid z \in Z\right\}$$
Jadi terbukti bahwa $(G \cap L)^c = G^c \cup L^c$.

b. $(G \cup L)^c = \left\{\left(z, C_{M_{(G\cup L)^c}}(z), C_{N_{(G\cup L)^c}}(z)\right) \mid z \in Z\right\}$

dengan
$C_{M_{(G\cup L)^c}}(z) = C_{N_{G\cup L}}(z)$ dan
$C_{N_{(G\cup L)^c}}(z) = C_{M_{G\cup L}}(z)$
Karena
$C_{M_{(G\cup L)^c}}(z) = C_{N_{G\cup L}}(z) = \min\{\mu_G^i(z), \mu_L^i(z)\}$
$= \min\{\mu_{G^c}^i(z), \mu_{L^c}^i(z)\} = C_{M_{G^c\cap L^c}}(z)$
maka diperoleh
$$C_{M_{(G\cup L)^c}}(z) = C_{M_{G^c\cap L^c}}(z) \quad (3.25)$$
Dan karena
$C_{N_{(G\cup L)^c}}(z) = C_{M_{G\cup L}}(z) = \max\{v_G^i(z), v_L^i(z)\}$
$= \max\{v_{G^c}^i(z), v_{L^c}^i(z)\} = C_{N_{G^c\cap L^c}}(z)$
maka diperoleh
$$C_{N_{(G\cup L)^c}}(z) = C_{N_{G^c\cap L^c}}(z) \quad (3.26)$$
Sehingga berdasarkan Persamaan 3.25 dan Persamaan 3.26 diperoleh
$$\left\{\left(z, C_{M_{(G\cup L)^c}}(z), C_{N_{(G\cup L)^c}}(z)\right) \mid z \in Z\right\} = \left\{\left(z, C_{M_{G^c\cap L^c}}(z), C_{N_{G^c\cap L^c}}(z)\right) \mid z \in Z\right\}$$
Jadi terbukti bahwa $(G \cup L)^c = G^c \cap L^c$. ■

Teorema berikut ini menunjukkan bahwa dalam multihimpunan fuzzy intuisionistik berlaku sifat operasi komutatif dan asosiatif terhadap operasi penjumlahan dan perkalian.

Teorema 3.5. Misalkan G, L dan Q multihimpunan fuzzy intuisionistik atas Z. Maka berlaku sifat operasi berikut

a. Komutatif
(i) $G \oplus L = L \oplus G$
(ii) $G \otimes L = L \otimes G$

b. Asosiatif
   (i) $(G \oplus L) \oplus Q = G \oplus (L \oplus Q)$
   (ii) $(G \otimes L) \otimes Q = G \otimes (L \otimes Q)$

(Ejegwa dan Awolola, 2013)

Bukti. Karena G, L dan Q multihimpunan fuzzy intuisionistik atas Z, maka

a. Komutatif
   (i) $G \oplus L = \left\{\left(z, C_{M_{G\oplus L}}(z), C_{N_{G\oplus L}}(z)\right) | z \in Z\right\}$
   dengan
   $C_{M_{G\oplus L}}(z) = \mu_G^i(z) + \mu_L^i(z) - \mu_G^i(z) \cdot \mu_L^i(z)$
   dan $C_{N_{G\oplus L}}(z) = v_G^i(z) \cdot v_L^i(z)$
   Karena
   $C_{M_{G\oplus L}}(z) = \mu_G^i(z) + \mu_L^i(z) - \mu_G^i(z) \cdot \mu_L^i(z)$
   $= \mu_L^i(z) + \mu_L^i(z) - \mu_L^i(z) \cdot \mu_L^i(z)$
   $= C_{M_{L\oplus G}}(z)$
   maka diperoleh
   $$C_{M_{G\oplus L}}(z) = C_{M_{L\oplus G}}(z) \quad (3.27)$$
   Dan karena
   $C_{N_{G\oplus L}}(z) = v_G^i(z) \cdot v_L^i(z) = v_L^i(z) \cdot v_L^i(z)$
   $= C_{N_{L\oplus G}}(z)$
   maka diperoleh
   $$C_{N_{G\oplus L}}(z) = C_{N_{L\oplus G}}(z) \quad (3.28)$$
   Sehingga berdasarkan Persamaan 3.27 dan Persamaan 3.28 diperoleh
   $\left\{\left(z, C_{M_{G\oplus L}}(z), C_{N_{G\oplus L}}(z)\right) | z \in Z\right\}$
   $= \left\{\left(z, C_{M_{L\oplus G}}(z), C_{N_{L\oplus G}}(z)\right) | z \in Z\right\}$
   Jadi terbukti bahwa $A \oplus B = B \oplus A$.

   (ii) $G \otimes L = \left\{\left(z, C_{M_{G\otimes L}}(z), C_{N_{G\otimes L}}(z)\right) | z \in Z\right\}$
   dengan
   $C_{M_{G\otimes L}}(z) = \mu_G^i(z) \cdot \mu_L^i(z)$ dan
   $C_{N_{G\otimes L}}(z) = v_G^i(z) + v_L^i(z) - v_G^i(z) \cdot v_L^i(z)$
   Karena
   $C_{M_{G\otimes L}}(z) = \mu_G^i(z) \cdot \mu_L^i(z) = \mu_L^i(z) \cdot \mu_G^i(z)$
   $= C_{M_{G\otimes L}}(z)$
   maka diperoleh
   $$C_{M_{G\otimes L}}(z) = C_{M_{G\otimes L}}(z) \quad (3.29)$$
   Dan karena
   $C_{N_{L\oplus G}}(z) = v_G^i(z) + v_L^i(z) - v_G^i(z) \cdot v_L^i(z)$
   $= v_L^i(z) + v_G^i(z) - v_L^i(z) \cdot v_G^i(z)$
   $= C_{N_{G\otimes L}}(z)$
   maka diperoleh
   $$C_{N_{G\otimes L}}(z) = C_{N_{L\otimes G}}(z) \quad (3.30)$$
   Sehingga berdasarkan Persamaan 3.29 dan Persamaan 3.30 diperoleh
   $\left\{\left(z, C_{M_{G\otimes L}}(z), C_{N_{G\otimes L}}(z)\right) | z \in Z\right\} = \left\{\left(z, C_{M_{L\oplus G}}(z), C_{N_{L\oplus G}}(z)\right) | z \in Z\right\}$
   Jadi terbukti bahwa $G \otimes L = L \otimes G$.

b. Asosiatif
   (i) $(G\oplus L)\oplus Q = \left\{\left(z, C_{M_{(G\oplus L)\oplus Q}}(z), C_{N_{(G\oplus L)\oplus Q}}(z)\right) | z \in Z\right\}$
   dengan
   $C_{M_{(G\oplus L)\oplus Q}}(z) = C_{M_{G\oplus L}}(z) + \mu_Q^i(z) - C_{M_{G\oplus L}}(z).\mu_Q^i(z)$
   dan $C_{N_{(G\oplus L)\oplus Q}}(z) = C_{N_{G\oplus L}}(x).v_Q^i(z)$
   Karena
   $C_{M_{(G\oplus L)\oplus Q}}(z) = C_{M_{G\oplus L}}(z) + \mu_Q^i(z) - C_{M_{G\oplus L}}(z).\mu_Q^i(z)$
   $= \left(\mu_G^i(z) + \mu_L^i(z) - \mu_G^i(z) \cdot \mu_L^i(z)\right) + \mu_Q^i(z)$
   $\quad - \left(\mu_G^i(z) + \mu_L^i(z) - \mu_G^i(z) \cdot \mu_L^i(z)\right) \cdot \mu_Q^i(z)$
   $= \mu_G^i(z) + \mu_L^i(z) + \mu_Q^i(z) - \mu_G^i(z) \cdot \mu_L^i(z)$
   $\quad -\mu_G^i(z) \cdot \mu_Q^i(z) - \mu_L^i(z) \cdot \mu_Q^i(z)$
   $\quad +\mu_G^i(z) \cdot \mu_L^i(z) \cdot \mu_Q^i(z)$
   $= \mu_G^i(z) + \mu_L^i(z) + \mu_Q^i(z) - \mu_L^i(z) \cdot \mu_Q^i(z)$
   $\quad -\mu_G^i(z) \cdot \mu_L^i(z) - \mu_G^i(z) \cdot \mu_Q^i(z)$
   $\quad +\mu_G^i(z) \cdot \mu_L^i(z) \cdot \mu_Q^i(z)$
   $= \mu_G^i(z) + \left(\mu_L^i(z) + \mu_Q^i(z) - \mu_L^i(z) \cdot \mu_Q^i(z)\right)$
   $\quad -\mu_G^i(z) \cdot \left(\mu_L^i(z) + \mu_Q^i(z) - \mu_L^i(z) \cdot \mu_Q^i(z)\right)$
   $= \mu_G^i(z) + C_{M_{L\oplus Q}}(z) - \mu_G^i(z) \cdot C_{M_{L\oplus Q}}(z)$
   $= C_{M_{G\oplus(L\oplus Q)}}(z)$
   maka diperoleh
   $$C_{M_{(G\oplus L)\oplus Q}}(z) = C_{M_{G\oplus(L\oplus Q)}}(z) \quad (3.31)$$
   Dan karena
   $C_{N_{(G\oplus L)\oplus Q}}(z) = C_{N_{G\oplus L}}(x).v_Q^i(z)$
   $= v_G^i(z) \cdot v_L^i(z) \cdot v_Q^i(z) = v_G^i(z) \cdot C_{N_{L\oplus Q}}(z)$
   $= C_{N_{G\oplus(L\oplus Q)}}(z)$
   maka diperoleh
   $$C_{N_{(G\oplus L)\oplus Q}}(z) = C_{N_{G\oplus(L\oplus Q)}}(z) \quad (3.32)$$
   Sehingga berdasarkan Persamaan 3.31 dan Persamaan 3.32 diperoleh
   $\left\{\left(z, C_{M_{(G\oplus L)\oplus Q}}(z), C_{N_{(G\oplus L)\oplus Q}}(z)\right) | z \in Z\right\} = \left\{\left(z, C_{M_{G\oplus(L\oplus Q)}}(z), C_{N_{G\oplus(L\oplus Q)}}(z)\right) | z \in Z\right\}$
   Jadi terbukti bahwa $(G\oplus L)\oplus Q = G\oplus(L\oplus Q)$.

   (ii) $(G\otimes L)\otimes Q = \left\{\left(z, C_{M_{(G\otimes L)\otimes Q}}(z), C_{N_{(G\otimes L)\otimes Q}}(z)\right) | z \in Z\right\}$
   dengan
   $C_{M_{(G\otimes L)\otimes Q}}(z) = C_{M_{G\otimes L}}(x) \cdot \mu_Q^i(z)$ dan
   $C_{N_{(G\otimes L)\otimes Q}}(z) = C_{N_{G\otimes L}}(x) + v_Q^i(z) - C_{N_{G\otimes L}}(x) \cdot v_Q^i(z)$
   Karena
   $C_{M_{(G\otimes L)\otimes Q}}(z) = C_{M_{G\otimes L}}(z) \cdot \mu_Q^i(z)$
   $= \mu_G^i(z) \cdot \mu_L^i(z) \cdot \mu_Q^i(z) = \mu_G^i(z) \cdot C_{M_{L\otimes Q}}(z)$
   $= C_{M_{G\otimes(L\otimes Q)}}(z)$
   maka diperoleh
   $$C_{M_{(G\otimes L)\otimes Q}}(z) = C_{M_{G\otimes(L\otimes Q)}}(z) \quad (3.33)$$
   Dan karena
   $C_{N_{(G\otimes L)\otimes Q}}(z)$

$= C_{N_{G\otimes L}}(x) + v_Q^i(z) - C_{N_{G\otimes L}}(x) \cdot v_Q^i(z)$
$= \left(v_G^i(z) + v_L^i(z) - v_G^i(z) \cdot v_L^i(z)\right) + v_Q^i(z)$
$\quad - \left(v_G^i(z) + v_L^i(z) - v_G^i(z) \cdot v_L^i(z)\right) \cdot v_Q^i(z)$
$= v_G^i(z) + v_L^i(z) + v_Q^i(z) - v_G^i(z) \cdot v_L^i(z)$
$\quad - v_G^i(z) \cdot v_Q^i(z) - v_L^i(z) \cdot v_Q^i(z) + v_G^i(z)$
$\quad \cdot v_L^i(z) \cdot v_Q^i(z)$
$= v_G^i(z) + v_L^i(z) + v_Q^i(z) - v_L^i(z) \cdot v_Q^i(z)$
$\quad - v_G^i(z) \cdot v_L^i(z) - v_G^i(z) \cdot v_Q^i(z) + v_G^i(z)$
$\quad \cdot v_L^i(z) \cdot v_Q^i(z)$
$= v_G^i(z) + \left(v_L^i(z) + v_Q^i(z) - v_L^i(z) \cdot v_Q^i(z)\right)$
$\quad - v_G^i(z) \cdot \left(v_L^i(z) + v_Q^i(z) - v_L^i(z) \cdot v_Q^i(z)\right)$
$= v_G^i(z) + C_{N_{L\otimes Q}}(z) - v_G^i(z) \cdot C_{N_{L\otimes Q}}(z)$
$= C_{N_{G\otimes(L\otimes Q)}}(z)$

maka diperoleh

$$C_{N_{(G\otimes L)\otimes Q}}(z) = C_{N_{G\otimes(L\otimes Q)}}(z) \tag{3.34}$$

Sehingga berdasarkan Persamaan 3.33 dan Persamaan 3.34 diperoleh

$$\left\{\left(z, C_{M_{(G\otimes L)\otimes Q}}(z), C_{N_{(G\otimes L)\otimes Q}}(z)\right) | z \in Z\right\} = \left\{\left(z, C_{M_{G\otimes(L\otimes Q)}}(z), C_{N_{G\otimes(L\otimes Q)}}(z)\right) | z \in Z\right\}$$

Jadi terbukti bahwa $(G\otimes L)\otimes Q = G\otimes(L\otimes Q)$. ■

Teorema berikut ini menunjukkan bahwa dalam multihimpunan fuzzy intuisionistik berlaku sifat operasi De Morgan terhadap operasi penjumlahan dan perkalian.

Teorema 3.6. Misalkan G dan L multihimpunan fuzzy intuisionistik atas Z. Maka berlaku sifat operasi berikut.

a. $(G\oplus L)^c = G^c \otimes L^c$
b. $(G\otimes L)^c = G^c \oplus L^c$

(Ejegwa dan Awolola, 2013)

Bukti. G dan L multihimpunan fuzzy intuisionistik atas Z, maka

a. $(G\oplus L)^c = \left\{\left(z, C_{M_{(G\oplus L)^c}}(z), C_{N_{(G\oplus L)^c}}(z)\right) | z \in Z\right\}$

dengan

$C_{M_{(G\oplus L)^c}}(z) = C_{N_{G\oplus L}}(z)$ dan

$C_{N_{(G\oplus L)^c}}(z) = C_{M_{G\oplus L}}(z)$

Karena

$C_{M_{(G\oplus L)^c}}(z) = C_{N_{G\oplus L}}(z) = v_G^i(z) \cdot v_L^i(z)$
$= \mu_{G^c}^i(x) \cdot \mu_{L^c}^i(x) = C_{M_{G^c\otimes L^c}}(z)$

maka diperoleh

$$C_{M_{(G\oplus L)^c}}(z) = C_{M_{G^c\otimes L^c}}(z) \tag{3.35}$$

Dan karena

$C_{N_{(G\oplus L)^c}}(z) = C_{M_{G\oplus L}}(z)$
$= \mu_G^i(z) + \mu_L^i(z) - \mu_G^i(z) \cdot \mu_L^i(z)$
$= v_{G^c}^i(z) + v_{L^c}^i(z) - v_{G^c}^i(z) \cdot v_{L^c}^i(z)$
$= C_{N_{(G\oplus L)^c}}(z)$

maka diperoleh

$$C_{N_{(G\oplus L)^c}}(z) = C_{N_{(G\oplus L)^c}}(z) \tag{3.36}$$

Sehingga berdasarkan Persamaan 3.35 dan Persamaan 3.36 diperoleh

$$\left\{\left(z, C_{M_{(G\oplus L)^c}}(z), C_{N_{(G\oplus L)^c}}(z)\right) | z \in Z\right\} = \left\{\left(z, C_{M_{G^c\otimes L^c}}(z), C_{N_{(G\oplus L)^c}}(z)\right) | z \in Z\right\}$$

Jadi terbukti bahwa $(G\oplus L)^c = G^c \otimes L^c$.

b. $(G\otimes L)^c = \left\{\left(z, C_{M_{(G\otimes L)^c}}(z), C_{N_{(G\otimes L)^c}}(z)\right) | z \in Z\right\}$

dengan

$C_{M_{(G\otimes L)^c}}(z) = C_{N_{G\otimes L}}(z)$ dan

$C_{N_{(G\otimes L)^c}}(z) = C_{M_{G\otimes L}}(z)$

Karena

$C_{M_{(G\otimes L)^c}}(z) = C_{N_{G\otimes L}}(z)$
$= v_G^i(z) + v_L^i(z) - v_G^i(z) \cdot v_L^i(z)$
$= \mu_{G^c}^i(z) + \mu_{L^c}^i(z) - \mu_{G^c}^i(z) \cdot \mu_{L^c}^i(z)$
$= C_{M_{G^c\otimes L^c}}(z)$

maka diperoleh

$$C_{M_{(G\otimes L)^c}}(z) = C_{M_{G^c\otimes L^c}}(z) \tag{3.37}$$

Dan karena

$C_{N_{(G\otimes L)^c}}(z) = C_{M_{G\otimes L}}(z) = \mu_G^i(z) \cdot \mu_L^i(z)$
$= v_{G^c}^i(z) \cdot v_{L^c}^i(z) = C_{N_{G^c\otimes L^c}}(z)$

maka diperoleh

$$C_{N_{(G\otimes L)^c}}(z) = C_{N_{G^c\otimes L^c}}(z) \tag{3.38}$$

Sehingga berdasarkan Persamaan 3.37 dan Persamaan 3.38 diperoleh

$$\left\{\left(z, C_{M_{(G\oplus L)^c}}(z), C_{N_{(G\oplus L)^c}}(z)\right) | z \in Z\right\} = \left\{\left(z, C_{M_{G^c\otimes L^c}}(z), C_{N_{G^c\otimes L^c}}(z)\right) | z \in Z\right\}$$

Jadi terbukti bahwa $(G\otimes L)^c = G^c \oplus L^c$. ■

Teorema berikut ini menunjukkan bahwa dalam multihimpunan fuzzy intuisionistik berlaku sifat operasi distributif terhadap operasi penjumlahan dan perkalian.

Teorema 3.7. Misalkan G, L dan Q multihimpunan fuzzy intuisionistik atas Z. Maka berlaku sifat operasi berikut.

a. $G\oplus(L \cup Q) = (G\oplus L) \cup (G\oplus Q)$
b. $G\oplus(L \cap Q) = (G\oplus L) \cap (G\oplus Q)$
c. $G\otimes(L \cup Q) = (G\otimes L) \cup (G\otimes Q)$
d. $G\otimes(L \cap Q) = (G\otimes L) \cap (G\otimes Q)$

(Ejegwa dan Awolola, 2013)

Bukti. Karena G, L dan Q multihimpunan fuzzy intuisionistik atas Z, maka

a. $G\oplus(L \cup Q) = \left\{\left(z, C_{M_{G\oplus(L\cup Q)}}(z), C_{N_{G\oplus(L\cup Q)}}(z)\right) | z \in Z\right\}$

dengan

$C_{M_{G\oplus(L\cup Q)}}(z) = \mu_G^i(z) + C_{M_{L\cup Q}}(z) - \mu_A^i(z) \cdot C_{M_{L\cup Q}}(z)$

dan $C_{N_{G\oplus(L\cup Q)}}(z) = v_G^i(z) \cdot C_{N_{L\cup Q}}(z)$

Karena

$C_{M_{G\oplus(L\cup Q)}}(z)$

$= \mu_G^i(z) + C_{M_{L\cup Q}}(z) - \mu_G^i(z) \cdot C_{M_{L\cup Q}}(z)$

$= \mu_G^i(z) + \max\{\mu_L^i(z), \mu_Q^i(z)\} - \mu_G^i(z) \cdot \max\{\mu_L^i(z), \mu_Q^i(z)\}$

Berdasarkan Teorema 2.4 berlaku

$\mu_G^i(z) + \max\{\mu_L^i(z), \mu_Q^i(z)\} - \mu_G^i(z) \cdot \max\{\mu_L^i(z), \mu_Q^i(z)\}$

$= \max\{\mu_G^i(z) + \mu_L^i(z), \mu_G^i(z) + \mu_Q^i(z)\}$

$-\max\{\mu_G^i(z) \cdot \mu_L^i(z), \mu_G^i(z) \cdot \mu_Q^i(z)\}$

Dan berdasarkan Teorema 2.6 berlaku

$\max\{\mu_G^i(z) + \mu_L^i(z), \mu_G^i(z) + \mu_Q^i(z)\}$

$-\max\{\mu_G^i(z) \cdot \mu_L^i(z), \mu_G^i(z) \cdot \mu_Q^i(z)\}$

$= \max\{\mu_G^i(z) + \mu_L^i(z) - \mu_G^i(z) \cdot \mu_L^i(z), \mu_G^i(z) + \mu_Q^i(z) - \mu_G^i(z) \cdot \mu_Q^i(z)\}$

$= \max\left\{C_{M_{G\oplus L}}(z), C_{M_{G\oplus Q}}(z)\right\} = C_{M_{(G\oplus L)\cup(G\oplus Q)}}(z)$

maka diperoleh

$C_{M_{G\oplus(L\cup Q)}}(z) = C_{M_{(G\oplus L)\cup(G\oplus Q)}}(z)$ (3.39)

Dan karena

$C_{N_{G\oplus(L\cup Q)}}(z) = v_G^i(z) \cdot C_{N_{L\cup Q}}(z)$

$= v_G^i(z) \cdot \min\{v_L^i(x), v_Q^i(x)\}$

Berdasarkan Teorema 2.5 berlaku

$v_G^i(z) \cdot \min\{v_L^i(x), v_Q^i(x)\}$

$= \min\{v_G^i(z) \cdot v_L^i(x), v_G^i(z) \cdot v_Q^i(x)\}$

$= \min\left\{C_{N_{G\oplus L}}(z), C_{N_{G\oplus Q}}(z)\right\} = C_{N_{(G\oplus L)\cup(G\oplus Q)}}(z)$

maka diperoleh

$C_{N_{A\oplus(B\cup C)}}(x) = C_{N_{(A\oplus B)\cup(A\oplus C)}}(x)$ (3.40)

Sehingga berdasarkan Persamaan 3.39 dan Persamaan 3.40 diperoleh

$\left\{\left(z, C_{M_{G\oplus(L\cup Q)}}(z), C_{N_{G\oplus(L\cup Q)}}(z)\right) | z \in Z\right\} = \left\{\left(z, C_{M_{(G\oplus L)\cup(G\oplus Q)}}(z), C_{N_{(A\oplus B)\cup(A\oplus C)}}(x)\right) | z \in Z\right\}$

Jadi terbukti bahwa $G\oplus(L \cup Q) = (G\oplus L) \cup (G\oplus Q)$.

b. $G\oplus(L \cap Q) = \left\{\left(z, C_{M_{G\oplus(L\cap Q)}}(z), C_{N_{G\oplus(L\cap Q)}}(z)\right) | z \in Z\right\}$

dengan

$C_{M_{G\oplus(L\cap Q)}}(z) = \mu_G^i(z) + C_{M_{L\cap Q}}(z) - \mu_A^i(z) \cdot C_{M_{L\cap Q}}(z)$

dan $C_{N_{G\oplus(L\cap Q)}}(z) = v_G^i(z) \cdot C_{N_{L\cap Q}}(z)$

Karena

$C_{M_{G\oplus(L\cap Q)}}(z)$

$= \mu_G^i(z) + C_{M_{L\cap Q}}(z) - \mu_A^i(z) \cdot C_{M_{L\cap Q}}(z)$

$= \mu_G^i(z) + \min\{\mu_L^i(z), \mu_Q^i(z)\} - \mu_G^i(z) \cdot \min\{\mu_L^i(z), \mu_Q^i(z)\}$

Berdasarkan Teorema 2.4 berlaku

$\mu_G^i(z) + \min\{\mu_L^i(z), \mu_Q^i(z)\} - \mu_G^i(z) \cdot \min\{\mu_L^i(z), \mu_Q^i(z)\}$

$= \min\{\mu_G^i(z) + \mu_L^i(z), \mu_G^i(z) + \mu_Q^i(z)\}$

$-\min\{\mu_G^i(z) \cdot \mu_L^i(z), \mu_G^i(z) \cdot \mu_Q^i(z)\}$

Dan berdasarkan Teorema 2.6 berlaku

$\min\{\mu_G^i(z) + \mu_L^i(z), \mu_G^i(z) + \mu_Q^i(z)\}$

$-\min\{\mu_G^i(z) \cdot \mu_L^i(z), \mu_G^i(z) \cdot \mu_Q^i(z)\}$

$= \min\{\mu_G^i(z) + \mu_L^i(z) - \mu_G^i(z) \cdot \mu_L^i(z), \mu_G^i(z) + \mu_Q^i(z) - \mu_G^i(z) \cdot \mu_Q^i(z)\}$

$= \min\left\{C_{M_{G\oplus L}}(z), C_{M_{G\oplus Q}}(z)\right\} = C_{M_{(G\oplus L)\cap(G\oplus Q)}}(z)$

maka diperoleh

$C_{M_{G\oplus(L\cap Q)}}(z) = C_{M_{(G\oplus L)\cap(G\oplus Q)}}(z)$ (3.41)

Dan karena

$C_{N_{G\oplus(L\cap Q)}}(z) = v_G^i(z) \cdot C_{N_{L\cap Q}}(z)$

$= v_G^i(z) \cdot \max\{v_L^i(x), v_Q^i(x)\}$

Berdasarkan Teorema 2.5 berlaku

$v_G^i(z) \cdot \max\{v_L^i(x), v_Q^i(x)\}$

$= \max\{v_G^i(z) \cdot v_L^i(x), v_G^i(z) \cdot v_Q^i(x)\}$

$= \max\left\{C_{N_{G\oplus L}}(z), C_{N_{G\oplus Q}}(z)\right\} = C_{N_{(G\oplus L)\cap(G\oplus Q)}}(z)$

Maka diperoleh

$C_{N_{G\oplus(L\cap Q)}}(z) = C_{N_{(G\oplus L)\cap(G\oplus Q)}}(z)$ (3.42)

Sehingga berdasarkan Persamaan 3.41 dan Persamaan 3.42 diperoleh

$\left\{\left(z, C_{M_{G\oplus(L\cap Q)}}(z), C_{N_{G\oplus(L\cap Q)}}(z)\right) | z \in Z\right\} = \left\{\left(z, C_{M_{(G\oplus L)\cap(G\oplus Q)}}(z), C_{N_{(G\oplus L)\cap(G\oplus Q)}}(z)\right) | z \in Z\right\}$

Jadi terbukti bahwa $G\oplus(L \cap Q) = (G\oplus L) \cap (G\oplus Q)$.

c. $G\otimes(L \cup Q) = \left\{\left(z, C_{M_{G\otimes(L\cup Q)}}(z), C_{N_{G\otimes(L\cup Q)}}(z)\right) | z \in Z\right\}$

dengan

$C_{M_{G\otimes(L\cup Q)}}(z) = \mu_G^i(z) \cdot C_{M_{L\cup Q}}(z)$ dan

$C_{N_{G\otimes(L\cup Q)}}(z) = v_G^i(z) + C_{N_{L\cup Q}}(z) - v_G^i(z) \cdot C_{N_{L\cup Q}}(z)$

Karena

$C_{M_{G\otimes(L\cup Q)}}(z) = \mu_G^i(z) \cdot C_{M_{L\cup Q}}(z)$

$= \mu_A^i(x) \cdot \max\{\mu_L^i(z), \mu_Q^i(z)\}$

Berdasarkan Teorema 2.5 berlaku

$\mu_G^i(z) \cdot \max\{\mu_L^i(z), \mu_Q^i(z)\}$

$= \max\{\mu_G^i(z) \cdot \mu_L^i(z), \mu_G^i(z) \cdot \mu_Q^i(z)\}$

$= \max\left\{C_{M_{G\otimes L}}(z), C_{M_{G\otimes Q}}(z)\right\} = C_{M_{(G\otimes L)\cup(G\otimes Q)}}(z)$

maka diperoleh

$C_{M_{G\otimes(L\cup Q)}}(z) = C_{M_{(G\otimes L)\cup(G\otimes Q)}}(z)$ (3.43)

Dan karena

$C_{N_{G\otimes(L\cup Q)}}(z)$

$= v_G^i(z) + C_{N_{L\cup Q}}(z) - v_G^i(z) \cdot C_{N_{L\cup Q}}(z)$

$= v_G^i(z) + \min\{v_L^i(z), v_Q^i(z)\} - v_G^i(z) \cdot \min\{v_L^i(z), v_Q^i(z)\}$

Berdasarkan Teorema 2.4 berlaku

$v_G^i(z) + \min\{v_L^i(z), v_C^i(z)\} - v_G^i(z) \cdot \min\{v_L^i(z), v_Q^i(z)\}$

$= \min\{v_G^i(z) + v_L^i(z), v_G^i(z) + v_Q^i(z)\}$

$-\min\{v_G^i(z) \cdot v_L^i(z), v_G^i(z) \cdot. v_Q^i(z)\}$

Dan berdasarkan Teorema 2.6 berlaku

$\min\{v_G^i(z) + v_L^i(z), v_G^i(z) + v_Q^i(z)\}$

$-\min\{v_G^i(z) \cdot v_L^i(z), v_G^i(z) \cdot v_Q^i(z)\}$

$= \min\{v_G^i(z) + v_L^i(z) - v_G^i(z) \cdot v_L^i(z), v_G^i(z) + v_Q^i(z) - v_G^i(z) \cdot v_Q^i(z)\}$

$= \min\left\{C_{N_{G\otimes L}}(z), C_{N_{G\otimes Q}}(z)\right\} = C_{N_{(G\otimes L)\cup(G\otimes CQ)}}(z)$

maka diperoleh

$C_{N_{G\otimes(L\cup Q)}}(z) = C_{N_{(G\otimes L)\cup(G\otimes Q)}}(z)$ (3.44)

Sehingga berdasarkan Persamaan 3.43 dan Persamaan 3.44 diperoleh

$\left\{\left(z, C_{M_{G\otimes(L\cup Q)}}(z), C_{N_{G\otimes(L\cup Q)}}(z)\right) | z \in Z\right\} = \left\{\left(z, C_{M_{(G\otimes L)\cup(G\otimes CQ)}}(z), C_{N_{(G\otimes L)\cup(G\otimes CQ)}}(z)\right) | z \in Z\right\}$

Jadi terbukti bahwa $G\otimes(L \cup Q) = (G\otimes L) \cup (G\otimes Q)$.

d. $G\otimes(L \cap Q) = \left\{\left(z, C_{M_{G\otimes(L\cap Q)}}(z), C_{N_{G\otimes(L\cap Q)}}(z)\right) | z \in Z\right\}$

dengan

$C_{M_{G\otimes(L\cap Q)}}(z) = \mu_G^i(z) \cdot C_{M_{L\cap Q}}(z)$ dan

$C_{N_{G\otimes(L\cap Q)}}(z) = v_G^i(z) + C_{N_{L\cap Q}}(z) - v_G^i(z) \cdot C_{N_{L\cap Q}}(z)$

Karena

$C_{M_{G\otimes(L\cap Q)}}(z) = \mu_G^i(z) \cdot C_{M_{L\cap Q}}(z)$

$= \mu_G^i(z) \cdot \min\{\mu_L^i(z), \mu_Q^i(z)\}$

Berdasarkan Teorema 2.5 berlaku

$\mu_G^i(z). \max\{\mu_L^i(z), \mu_Q^i(z)\}$

$= \min\{\mu_G^i(z) \cdot \mu_L^i(z), \mu_G^i(z) \cdot \mu_Q^i(z)\}$

$= \min\left\{C_{M_{G\otimes L}}(z), C_{M_{G\otimes Q}}(z)\right\} = C_{M_{(G\otimes L)\cap(G\otimes Q)}}(z)$

maka diperoleh

$C_{M_{G\otimes(L\cap Q)}}(z) = C_{M_{(G\otimes L)\cap(G\otimes Q)}}(z)$ (3.45)

Dan Karena

$C_{N_{G\otimes(L\cap Q)}}(z)$

$= v_G^i(z) + C_{N_{L\cap Q}}(z) - v_G^i(z) \cdot C_{N_{L\cap Q}}(z)$

$= v_G^i(z) + \max\{v_L^i(z), v_Q^i(z)\} - v_G^i(z) \cdot \max\{v_L^i(z), v_Q^i(z)\}$

Berdasarkan Teorema 2.4 berlaku

$v_G^i(z) + \max\{v_L^i(z), v_Q^i(z)\} - v_G^i(z) \cdot \max\{v_L^i(z), v_Q^i(z)\}$

$= \max\{v_G^i(z) + v_L^i(z), v_G^i(z) + v_Q^i(z)\}$

$-\max\{v_G^i(z) \cdot v_L^i(z), v_G^i(z) \cdot. v_Q^i(z)\}$

Dan berdasarkan Teorema 2.6 berlaku

$\max\{v_G^i(z) + v_L^i(z), v_G^i(z) + v_Q^i(z)\}$

$-\max\{v_G^i(z) \cdot v_L^i(z), v_G^i(z) \cdot. v_Q^i(z)\}$

$= \max\{v_G^i(z) + v_L^i(z) - v_G^i(z) \cdot v_L^i(z), v_G^i(z) + v_Q^i(z) - v_G^i(z) \cdot v_Q^i(z)\}$

$= \max\left\{C_{N_{G\otimes L}}(z), C_{N_{G\otimes Q}}(z)\right\} = C_{N_{(G\otimes L)\cap(G\otimes CQ)}}(z)$

maka diperoleh

$C_{N_{G\otimes(L\cap Q)}}(z) = C_{N_{(G\otimes L)\cap(G\otimes Q)}}(z)$ (3.46)

Sehingga berdasarkan Persamaan 3.45 dan Persamaan 3.46 diperoleh

$\left\{\left(z, C_{M_{G\otimes(L\cap Q)}}(z), C_{N_{G\otimes(L\cap Q)}}(z)\right) | z \in Z\right\} = \left\{\left(z, C_{M_{(G\otimes L)\cap(G\otimes Q)}}(z), C_{N_{(G\otimes L)\cap(G\otimes CQ)}}(z)\right) | z \in Z\right\}$

Jadi terbukti bahwa $G\otimes(L \cap Q) = (G\otimes L) \cap (G\otimes Q)$. ■

PENUTUP

SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa untuk operasi irisan, gabungan, penjumlahan dan perkalian masing-masing berlaku sifat operasi komutatif dan assosiatif. Sedangkan, sifat operasi idempoten hanya berlaku untuk operasi irisan dan gabungan. Sifat operasi distributif berlaku pada operasi irisan gabungan, operasi irisan penjumlahan, operasi irisan perkalian, operasi gabungan penjumlahan dan operasi gabungan perkalian. Sedangkan sifat operasi De Morgan berlaku pada operasi irisan gabungan dan operasi penjumlahan perkalian

SARAN

Adapun saran terkait artikel ini adalah menambahkan relasi dan operasi himpunan multi fuzzy intuisionistik yang masih belum dikaji pada artikel ini. Serta, menambahkan sifat-sifat operasi multihimpunan fuzzy intuisionistik yang masih belum dikaji pada artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

Atanassov, Krassimir T. (1986). Intuitionistic Fuzzy Sets. In *Fuzzy Sets and Systems* (Vol. 20).

Davvaz, Bijan., Mukhlash, Imam., dan Soleha. (2021). Himpunan Fuzzy dan Rough Sets. *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*, *18*(1), 79-94. https://doi.org/10.12962/limits.v18i1.7705

Ejegwa, P. A., dan Awolola, J. A. (2013). Some Algebraic Structures of Intuitionistic Fuzzy Multisets (IFMSs). In *International Journal of Science and Technology* (Vol. 2, Issue 5). https://www.researchgate.net/publication/342883162

Ejegwa, P. A., dan Awolola, J. A. (2014). Intuitionistic Fuzzy Multiset (IFMS) in Binomial Distributions. *Article in International Journal of Scientific & Technology Research*, *3*. www.ijstr.org

Shinoj, T. K., dan John, S Jacob. (2012). *Intuitionistic Fuzzy Multisets and Its Application in Medical Diagnosis*. https://www.researchgate.net/publication/265089040

Shinoj, T. K., dan John, S Jacob. (2013). Intuitionistic Fuzzy Multisets. In *Certified International Journal of Engineering Science and Innovative Technology (IJESIT)* (Vol. 9001, Issue 6).

Shinoj, T. K., dan John, S Jacob. (2013). Accuracy in Collaborative Robotics: An Intuitionistic Fuzzy Multiset Approch Accuracy in Collaborative Robotics: An Intuitionistic Fuzzy Multiset Approach. *Type: Double Blind Peer Reviewed International Research Journal Publisher: Global Journals Inc*, *13*. https://www.researchgate.net/publication/265088809

Silambarasan, I. (2021). SOME Algebraic Properties of Picture Fuzzy Sets. *Bulletin Bull. Int. Math. Virtual Inst*, *11*(3), 429–442. https://doi.org/10.7251/BIMVI2103429S

Sulaiman, R., Sofro, A'yunin, Yunianti., Dwi Nur., dan Artiono, Rudianto. (2022). *Himpunan Fuzzy Teori dan Aplikasi*. Zifatama Jawara. Sidoarjo.

Yager, R. R. (1986). On the Theory of Bags. *Int. J. General Systems* (Vol. 13).

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy S e t s. In *INFORMATION AND CONTROL* (Vol. 8).