

**ANALISIS DINAMIK MODEL PREDATOR-PREY DENGAN FUNGSI RESPON
MONOD-HALDANE**

Difitri Amalia

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia

email : difitri.19058@mhs.unesa.ac.id

Dian Savitri

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia

Penulis Korespondensi : diansavitri@unesa.ac.id

Abstrak

Setiap makhluk hidup tidak terlepas untuk berinteraksi dengan makhluk hidup lainnya. Interaksi terjadi ketika dua atau lebih spesies memiliki efek atau mempunyai pengaruh terhadap masing-masing spesies tersebut. Penelitian ini membahas model prey predator mengikuti lotka volterra dengan fungsi respon Monod-Haldane. Tahapan penelitian ini diawali dengan studi literatur, kemudian merekonstruksi model predator prey, dilanjutkan analisis dengan menentukan titik kesetimbangan, dan kestabilan lokal di sekitar titik kesetimbangan. Hasil analisis diperoleh tiga titik kesetimbangan yaitu $E_1(0, 0)$ kepunahan populasi prey dan predator, $E_2(k, 0)$ kepunahan populasi predator dan $E_3\left(\sqrt{\mu x^2 - \mu \beta x + a\mu}, \frac{-er(\beta e \sqrt{dx^2 - e\beta x + a\mu}) - \mu k(\sqrt{\mu x^2 - e\beta x + a\mu}) - a\mu}{\mu^2 k}\right)$ hidup berdampingan. Hasil analisis kestabilan pada titik E_1 stabil, E_2 stabil dengan syarat $\beta < \frac{\mu(k^2 + a)}{ek}$ artinya predator tidak mampu menangkap mangsa dengan laju yang cukup untuk kelangsungan hidup populasi predator dan tidak stabil $\beta > \frac{\mu(k^2 + a)}{ek}$ artinya predator memiliki kemampuan untuk menangkap mangsa dengan laju yang cukup tinggi, yang dapat mendukung pertumbuhan atau kelangsungan hidup populasi predator. dan E_3 tidak stabil. Hasil simulasi numerik diperoleh adanya terdapat dua titik kesetimbangan yang stabil yaitu E_2 titik kepunahan predator dan E_3 titik populasi hidup secara bersamaan, fenomena ini disebut bistabil atau kestabilan ganda saat parameter laju penangkapan predator $\beta = 0.7$. Saat β menurun solusi yang stabil hanya terjadi di titik kepunahan pada predator (E_2).

Kata kunci: Model Predator-Prey, Fungsi Respon, Monod Haldane, Bistabil

Abstract

Every living creature is inevitably involved in interacting with other living beings. Interactions occur when two or more species have effects or influence on each other. This study discusses the prey-predator model following the Lotka-Volterra dynamics with the Monod-Haldane response function. The research stages begin with a literature review, followed by reconstructing the predator-prey model, and then analyzing by determining the equilibrium points and local stability around them. The analysis results yield three equilibrium points $E_1(0,0)$, representing the extinction of both prey and predator populations $E_2(k, 0)$, representing the extinction of the predator population; and $E_3\left(\sqrt{\mu x^2 - \mu \beta x + a\mu}, \frac{-er(\beta e \sqrt{dx^2 - e\beta x + a\mu}) - \mu k(\sqrt{\mu x^2 - e\beta x + a\mu}) - a\mu}{\mu^2 k}\right)$ representing the coexistence of prey and predator populations living together. The stability analysis shows that E_1 is stable, E_2 is stable under the condition $\beta < \frac{\mu(k^2 + a)}{ek}$, indicating that the predator capture rate is not sufficient to sustain the predator population, and E_2 is unstable if $\beta > \frac{\mu(k^2 + a)}{ek}$, indicating that the predator has the ability to capture prey at a high enough rate to support the growth or survival of the predator population. E_3 is unstable. Numerical simulations reveal the existence of two stable equilibrium points: E_2 , representing predator extinction, and E_3 , representing the simultaneous survival of both populations. This phenomenon is known as bistability or multiple stability when the predator capture rate parameter $\beta = 0.7$. As β decreases, the stable solution only occurs at the predator extinction point (E_2).

Keywords: Stability analysis, Ebola virus, compartment diagram, the equilibrium point, linearizati

PENDAHULUAN

Setiap makhluk hidup tidak terlepas untuk berinteraksi dengan makhluk hidup lainnya. Interaksi terjadi ketika dua atau lebih spesies memiliki efek atau mempunyai pengaruh terhadap

masing-masing spesies tersebut. Interaksi tersebut Interaksi antara dua spesies dapat memiliki efek yang positif untuk keduanya, efek yang negatif untuk keduanya, atau efek negatif pada satu spesies dan efek positif pada spesies lainnya. (Afiyah, 2015). Predasi merupakan interaksi antara mangsa (prey)

dan pemangsa (predator). Dalam interaksi tersebut, predator memangsa mangsa untuk mempertahankan kelangsungan hidupnya, dan peran predator terhadap mangsa adalah sebagai pengatur populasi mangsa. (S. Saadah, 2019).

Salah satu model yang menjadi fokus penelitian adalah interaksi antara spesies yang hidup dalam suatu ekosistem yang dikenal sebagai model Lotka-Volterra. Model Lotka-Volterra seringkali dipelajari dalam konteks interaksi antara predator (pemangsa) dan prey (mangsa). Penelitian mengenai model Lotka-Volterra menghasilkan model sederhana untuk pemangsaan atau interaksi antara dua spesies dalam suatu ekosistem, dan saat ini model Lotka-Volterra sedang dibahas dan dikembangkan lebih lanjut oleh sejumlah peneliti. (Murray, 2002).

Interaksi populasi dalam model predator prey berupa predasi atau disebut fungsi respon. Ada beberapa fungsi yang dikembangkan beberapa peneliti. Pada tahun 1965 Holling mengusulkan tiga jenis fungsi respon yang dikenal dengan fungsi respon Holling tipe I, Holling tipe II, dan Holling tipe III, dimana ketiga dari fungsi tersebut menunjukkan bahwa laju pemangsaan predator terhadap prey meningkat ketika kepadatan prey meningkat. Kemudian Monod dan Haldane melakukan suatu penelitian terkait fungsi respon yang dikenal sebagai fungsi respon Holling tipe IV. (S.G. Mortoja, 2018). Dalam populasi hewan yang hidup secara berkelompok, tingkat pertahanan kelompok juga meningkat seiring dengan peningkatan kepadatan populasi. Hal ini mengakibatkan hambatan terhadap upaya predator dalam memangsa mangsa mereka. Maka Andrews juga mengkaji fungsi respon Holling tipe IV (Agustini, 2019). Contoh dalam proses interaksi tersebut adalah ikan buntal sebagai pemangsa sedangkan kepiting sebagai mangsa.

Beberapa peneliti terdahulu telah membahas mengenai prey dan predator dengan fungsi respon Monod Haldane seperti yang dilakukan oleh Biao Tang juga membahas model predator prey dengan fungsi respon Monod Haldane dan perilaku anti-predator dengan menganalisis keberadaan dan kestabilan semua kemungkinan titik kesetimbangan serta munculnya bifurkasi saddle-node, bifurkasi Hopf dan bifurkasi homoclinic. Penelitian yang dilakukan (M.B. Gaib, 2020) menggunakan fungsi respon Monod Haldane serta perilaku anti predator untuk mengkaji model predator prey yang saling

berkompetisi. (Li-Yuan Zhang, 2015) membahas fungsi respon Monod Haldane dengan waktu tunda dan difusi.

Berdasarkan kajian (Tang, B., & Xiao, Y., 2015) tersebut yaitu interaksi antar populasi yang menggunakan fungsi respon Monod Haldane, menggambarkan peningkatan populasi mangsa ketika populasi pemangsa mulai menurun, disebabkan terdapat sifat bertahan atau defending dari mangsa. Perbedaan dengan model yang dibahas Biao Tang adalah pada skripsi ini tanpa mempertimbangkan perilaku anti predator.

KAJIAN PUSTAKA (GUNAKAN STYLE SECTION)

A. Titik Ekuilibrium

Titik setimbang atau titik kritis merupakan solusi dari sistem $\dot{x} = f(x)$ yang tetap stabil tanpa mengalami perubahan seiring berjalannya waktu. Definisi terperinci mengenai titik setimbang akan dijelaskan dalam Definisi (2.3) sebagai berikut

Definisi 2.3

Titik $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ disebut titik ekuilibrium atau titik kritis dari sistem $\dot{x} = f(x)$ jika $f(\bar{x}) = 0$. (Perko, 2001)

B. Nilai Eigen

Nilai eigen digunakan untuk mengevaluasi stabilitas titik ekuilibrium dalam sistem, sedangkan vektor eigen digunakan untuk menentukan transformasi dalam sistem tersebut. Persamaannya dinyatakan sebagai berikut

$$\det(\lambda I - A) = 0.$$

(Anton & Howard, 1997)

C. Matriks Jacobian

Matriks Jacobian adalah sebuah matriks yang terdiri dari turunan-turunan dari suatu bentuk yang tidak linear.

Bentuk matriks Jacobian berukuran 2×2 adalah:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Jika $P(x_1, y_1) = Q(x_2, y_2) = 0$ adalah suatu sistem bersifat otonomous, maka titik setimbangnya dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = P(x_1, y_1),$$

$$\frac{dy}{dt} = Q(x_2, y_2).$$

Hasil linierisasi matriks Jacobian dengan titik setimbang $P(x_2, y_2)$ dan $Q(x_2, y_2)$ dinamakan matriks A dapat ditulis:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_2) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_2) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_1, y_2) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_1, y_2) \end{pmatrix}$$

Dengan $\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_2)$ merupakan nilai turunan pertama fungsi f terhadap variabel x di titik (x_1, y_2) . (Zill & Cullen, 2009)

D. Analisis Kestabilan

Nilai Eigen	Kestabilan	Jenis
$\lambda_i, \lambda_j \in \mathbb{R}$		
$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	Tidak stabil	Node / Simpul
$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	Stabil Asimtotik	Node / Simpul
$\lambda_1 > 0 > \lambda_2$	Tidak Stabil	Saddle / Pelana
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Tidak Stabil	Node / Simpul
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Stabil Asimtotik	Node / Simpul
$\lambda_1, \lambda_2 = a + bi \in \mathbb{C}$		
$a > 0$	Tidak Stabil	Spiral
$a < 0$	Stabil Asimtotik	Spiral
$a = 0$	Stabil	Terpusat

Tabel 2.1 Kestabilan Titik kesetimbangan Sistem Dinamik

(Boyce dan Diprima, 2008)

E. Model Predator Prey Lotka-Volterra

Model yang terkenal dalam studi predator prey adalah model Lotka-Volterra. Model ini dikembangkan oleh Alfred J. Lotka pada tahun 1925 dan Vito Volterra pada tahun 1926, sehingga dikenal sebagai model persamaan Lotka-Volterra.

Diperoleh sistem persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - \alpha xy, \\ \frac{dy}{dt} &= -by + \beta xy. \end{aligned}$$

F. Fungsi Respon

Fungsi respons predator merupakan ukuran seberapa banyak predator memangsa makanan atau mangsa (Holling, 1959). Fungsi respons ini memiliki

keterkaitan yang erat dengan pertumbuhan populasi predator dan penurunan populasi mangsa ketika keduanya saling berinteraksi.

Persamaan fungsi respon tipe I adalah

$$p(x) = mx.$$

Persamaan fungsi respon tipe II adalah

$$p(x) = \frac{mx}{a+x}.$$

Persamaan fungsi respon tipe III adalah

$$p(x) = \frac{mx^2}{a^2+x^2}.$$

Persamaan fungsi respon Holling tipe IV adalah

$$p(x) = \frac{mx}{ax^2+bx+c}.$$

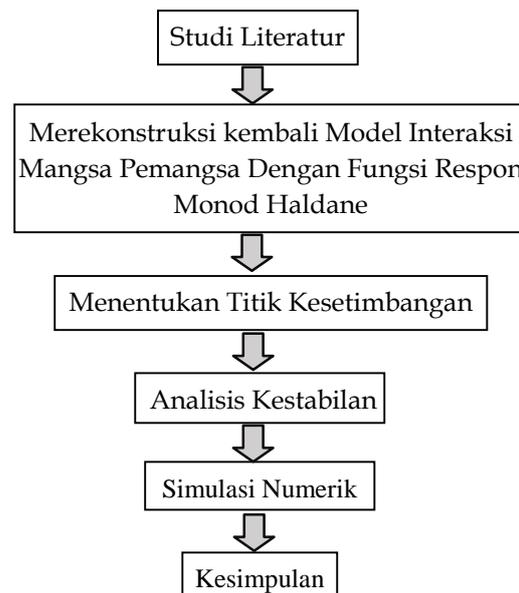
Dalam penelitian mereka, Sokol dan Howell menyederhanakan bentuk fungsi Monod-Haldane dengan hanya menggunakan dua parameter, yaitu

$$p(x) = \frac{mx}{a+x^2}.$$

Pada persamaan diatas, Kita dapat melihat bahwa jika fungsi respon Monod Haldane.

METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang dilakukan disusun dan disajikan dalam diagram alur berikut:



Gambar 3.1 Diagram Alir Penelitian

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Model Matematika Predator Prey

Pada subab ini merekontruksi model predator-prey dengan menggunakan fungsi respon Monod Haldane.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= xr \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{\beta xy}{a + x^2} \\ \dot{y} &= \frac{e\beta xy}{a + x^2} - \mu y \end{aligned} \quad (4.1)$$

Dengan

r : laju pertumbuhan intrinsik prey

k : daya dukung lingkungan

β : laju penangkapan predator

e : laju konversi mangsa menjadi predator

μ : laju kematian alami populasi predator

x : banyaknya populasi prey

y : banyaknya populasi predator

a : koefisien interaksi antara prey dan predator yang berpengaruh

B. Menentukan Titik Kestimbangan

Titik kesetimbangan pada model (4.1) diperoleh ketika $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$ sehingga diperoleh titik kesetimbangan sebagai berikut:

1. Titik kesetimbangan kepunahan populasi prey dan predator adalah $E_1(x_0, y_0) = E_1(0,0)$ eksis.
2. Titik kesetimbangan saat terjadinya kepunahan populasi predator adalah $E_2(k, 0)$ eksis.
3. Titik kesetimbangan saat kedua populasi yaitu predator prey saling berinteraksi atau hidup berdampingan, disebut juga sebagai titik kesetimbangan interior $E_3 = (x^*, y^*)$.

Diperoleh akar persamaannya

$$x^*_{1,2} = \frac{e\beta \pm \sqrt{e^2\beta^2 - 4a\mu^2}}{2\mu}$$

Dan

$$y^* = \frac{-er(e\beta x^* - \mu k x^* + a\mu)}{k\mu^2}$$

Jadi dapat diperoleh titik kestimbangan E_3 adalah

$$E_3 \left(\sqrt{\mu x^2 - \mu\beta x + a\mu}, \frac{-er(\beta e\sqrt{\mu x^2 - \mu\beta x + a\mu}) - \mu k(\sqrt{\mu x^2 - \mu\beta x + a\mu}) - a\mu}{\mu^2 k} \right) \det(\lambda I - A) = 0$$

C. Analisis Kestabilan Titik Kestimbangan

Untuk menganalisis stabilitas titik setimbang dalam model, dapat digunakan sistem yang telah dilinierkan. Pemetaan linear sistem persamaan tersebut menggunakan matriks Jacobian berukuran 2×2 , karena sesuai dengan sistem persamaannya.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{dx(t)}{dx} & \frac{dx(t)}{dy} \\ \frac{dy(t)}{dx} & \frac{dy(t)}{dy} \end{bmatrix}$$

Dari bagian sebelumnya diperoleh tiga jenis titik kesetimbangan, yaitu $E_1, E_2,$ dan

E_3 Berdasarkan analisis kestabilan titik kestimbangan model (4.1) dapat ditentukan dengan melakukan linearisasi. Matriks jacobian model (4.1) adalah

$$J = \begin{bmatrix} r \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{rx}{k} - \frac{\beta y}{a + x^2} - \frac{2\beta x^2 y}{(a + x^2)^2} & \frac{\beta x}{a + x^2} \\ \frac{e\beta y}{a + x^2} - \frac{2e\beta x^2 y}{(a + x^2)^2} & \frac{e\beta x}{a + x^2} - \mu \end{bmatrix}$$

1. Kestabilan Titik kestimbangan E_1

Matriks Jacobian di titik kesetimbangan E_1 adalah

$$\begin{aligned} E_1 &= (0,0) \\ J_1 &= J(E_1) \\ J_1 &= \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -\mu \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nilai eigen dari $J(E_1)$ dapat dicari dengan cara $\det(\lambda I - A) = 0$

$$\left[\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -\mu \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} \lambda - r & 0 \\ 0 & \lambda + \mu \end{bmatrix}$$

Sehingga nilai-nilai eigennya adalah

$$\lambda_1 = r \text{ dan } \lambda_2 = -\mu$$

diperoleh nilai eigen dari titik kestimbangan E_1 adalah $\lambda_1 = r > 0, \lambda_2 = -\mu < 0$, aka titik E_1 bersifat tidak stabil berjenis pelana.

2. Kestabilan Titik kestimbangan E_2

Matriks jacobian di titik kesetimbangan E_2 adalah

$$\begin{aligned} E_2 &= (k, 0) \\ J_2 &= J(E_2) \end{aligned}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} -r & -\frac{\beta \cdot k}{a + k^2} \\ 0 & \frac{e\beta \cdot k}{a + k^2} - \mu \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dari $J_2 \det(\lambda I - A) = 0$

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\left[\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{bmatrix}$$

Sehingga nilai-nilai eigen matriks J_2 adalah

$$\lambda_1 = -r \text{ dan } \lambda_2 = \frac{-e\beta k + \mu k^2 + a\mu}{a + k^2}$$

jadi nilai eigen dari titik kestimbangan E_2 adalah $-r, \frac{-e\beta k + \mu k^2 + a\mu}{a + k^2}$. Ada 2 kemungkinan E_2 , yaitu

stabil jika $\beta < \frac{\mu(k^2 + a)}{ek}$ dan tidak stabil jika

$$\beta > \frac{\mu(k^2 + a)}{ek}$$

3. Kestabilan Titik kesetimbangan E_3

Matriks Jacobian di titik kesetimbangan interior E_3 adalah

$$E_3 = \left(\begin{array}{c} \sqrt{\mu x^2 - \mu \beta x + a \mu}, \\ -er(\beta e \sqrt{dx^2 - e \beta x + a \mu}) - \mu k (\sqrt{\mu x^2 - e \beta x + a \mu}) - a \mu \end{array} \right) / \mu^2 k$$

$$J_3 = J(E_3)$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} r \left(1 - \frac{x^*}{k}\right) - \frac{rx^*}{k} - \frac{\beta y^*}{a+x^*2} - \frac{2\beta x^*2 y^*}{(a+x^*2)^2} - \frac{\beta x^*}{a+x^*2} & -\frac{\beta x^*}{a+x^*2} \\ \frac{e\beta y^*}{a+x^*2} - \frac{2e\beta x^*2 y^*}{(a+x^*2)^2} & \frac{e\beta x^*}{a+x^*2} - \mu \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dari $J_3 \det(\lambda I - A) = 0$

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\begin{bmatrix} r \left(1 - \frac{x^*}{k}\right) - \frac{rx^*}{k} - \frac{\beta y^*}{a+x^*2} - \frac{2\beta x^*2 y^*}{(a+x^*2)^2} - \lambda & -\frac{\beta x^*}{a+x^*2} \\ \frac{e\beta y^*}{a+x^*2} - \frac{2e\beta x^*2 y^*}{(a+x^*2)^2} & \frac{e\beta x^*}{a+x^*2} - \mu - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\left(\lambda^2 - \left(r \left(1 - \frac{x^*}{k}\right) - \frac{rx^*}{k} - \frac{\beta y^*}{a+x^*2} - \frac{2\beta x^*2 y^*}{(a+x^*2)^2} - \frac{e\beta x^*}{a+x^*2} - \mu \right) \lambda + r \left(1 - \frac{x^*}{k}\right) \left(\frac{e\beta x^*}{a+x^*2} - \mu \right) - \frac{rx^*}{k} \left(\frac{e\beta x^*}{a+x^*2} - \mu \right) - \frac{\beta y^*}{a+x^*2} \left(\frac{e\beta x^*}{a+x^*2} - \mu \right) - \frac{2\beta x^*2 y^*}{(a+x^*2)^2} \left(\frac{e\beta x^*}{a+x^*2} - \mu \right) + \frac{\beta x^*}{a+x^*2} \left(\frac{e\beta y^*}{a+x^*2} - \frac{2e\beta x^*2 y^*}{(a+x^*2)^2} \right) \right) = 0$$

diperoleh

$$A = 1$$

$$B = \left(r \left(1 - \frac{x^*}{k}\right) - \frac{rx^*}{k} - \frac{\beta y^*}{a+x^*2} - \frac{2\beta x^*2 y^*}{(a+x^*2)^2} - \frac{\mu \beta x^*}{a+x^*2} - \mu = \text{trace}(A) \right)$$

$$C = r \left(1 - \frac{x^*}{k}\right) \left(\frac{e\beta x^*}{a+x^*2} - \mu \right) - \frac{rx^*}{k} \left(\frac{e\beta x^*}{a+x^*2} - \mu \right) - \frac{\beta y^*}{a+x^*2} \left(\frac{e\beta x^*}{a+x^*2} - \mu \right) - \frac{2\beta x^*2 y^*}{(a+x^*2)^2} \left(\frac{e\beta x^*}{a+x^*2} - \mu \right) + \frac{\beta x^*}{a+x^*2} \left(\frac{e\beta y^*}{a+x^*2} - \frac{2e\beta x^*2 y^*}{(a+x^*2)^2} \right) = \det(A)$$

Dapat disederhanakan menjadi

$$\lambda^2 - (\text{trace}(A))\lambda + \det(A)$$

$$\lambda^2 - (B)\lambda + C$$

Diperoleh nilai eigennya adalah :

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{trace}(A) \pm \sqrt{D}}{2}$$

Dengan $D = (B)^2 - 4C$.

Pada keterangan diatas $\text{trace}(A) = B$ dan $\det(A) = C$ jadi untuk $\text{trace}(A) > 0$ dan $\det(A) > 0$ dengan $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, Oleh karena itu titik kesetimbangan interior E_3 bersifat tidak stabil.

D. Simulasi Numerik

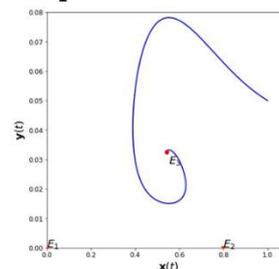
Penggunaan simulasi numerik bertujuan untuk menguji Kesesuaian dengan hasil analisis yang dilakukan yang telah dilakukan.

Untuk mendapatkan solusinya, parameter-parameter yang diberikan dipilih dengan nilai-nilai sebagai berikut.

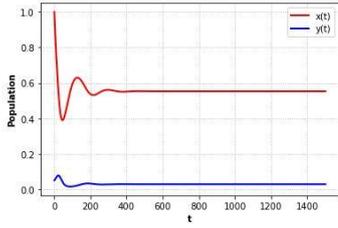
Parameter	Keterangan	Simulasi 1
r	Laju pertumbuhan intrinsik	0.05
k	Daya dukung lingkungan	0.8
a	Koefisien interaksi antara mangsa dan pemangsa yang berpengaruh	0.8
β	Laju penangkapan predator	0.6
e	Laju konversi mangsa menjadi predator	0.8
μ	Laju kematian alami populasi predator	0.24

Tabel 4 1Parameter yang digunakan pada simulasi numerik

1. Dinamika Populasi Predator-Prey simulasi 1



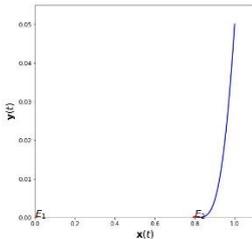
Gambar 4. 1 Potret Fase, menuju ke Titik Kesetimbangan E_3



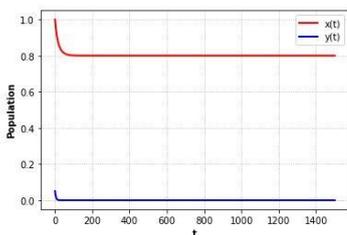
Gambar 4. 2 Grafik Time Series Nilai Awal [1, 0.05] stabil di E3

Pada gambar simulasi pertama digunakan nilai-nilai parameter yaitu $r = 0.05, k = 0.8, a = 0.8, \beta = 0.6, e = 0.8, \text{ dan } \mu = 0.24$. Ada satu titik kesetimbangan yang tidak eksis yaitu $E_4(1.447213596, -0.1951367322)$, Serta nilai awal mendekati titik kesetimbangan menunjukkan yaitu $x(0) = 1$ dan $y(0) = 0.05$. Dan menunjukkan stabil pada titik kesetimbangan E_3 yaitu $(0.5527864045, 0.02847006555)$ Hal ini menunjukkan bahwa kestabilan ekosistem terjadi ketika populasi ikan buntal (predator) dan kepiting (prey) Mereka hidup dalam ketergantungan satu sama lain dan saling memengaruhi, serta berperan penting dalam menjaga keseimbangan populasi dan keberlanjutan ekosistem secara keseluruhan.

2. Dinamika Populasi Predator-Prey simulasi dengan asumsi $\beta = 0.05$



Gambar 4. 3Potret Fase, menuju ke Titik Kesetimbangan E2

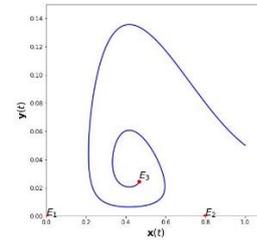


Gambar 4. 4Grafik Time Series Nilai Awal [1, 0.05] stabil di E2

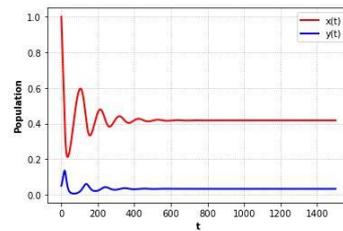
Pada gambar simulasi kedua digunakan nilai-nilai parameter yaitu $r = 0.06, k = 0.8, a = 0.8, \beta = 0.05, e = 0.8, \text{ dan } \mu = 0.24$. Ada satu titik kesetimbangan yang tidak eksis yaitu E_3 dan E_4 , Serta nilai awal $x(0) = 1$ dan $y(0) = 0.05$. Dan menunjukkan stabil pada titik kesetimbangan E2

yaitu $(0.8000000000, 0)$. Hal ini sesuai dengan perhitungan secara analitik yang memenuhi syarat yaitu stabil jika $\beta < \frac{\mu(k^2+a)}{ek}$ dan tidak stabil jika $\beta > \frac{\mu(k^2+a)}{ek}$. Hal ini menunjukkan bahwa kestabilan ekosistem terjadi ketika populasi ikan buntal (predator) mengalami kepunahan.

3. Dinamika Populasi Predator-Prey simulasi 1 dengan asumsi $\beta = 0.7$



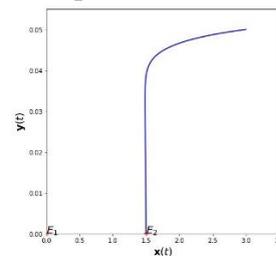
Gambar 4. 5Potret Fase, menuju ke Titik Kesetimbangan E3



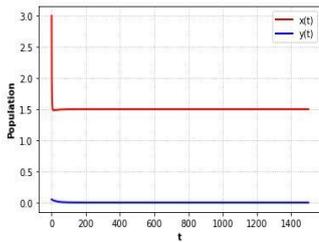
Gambar 4. 6Grafik Time Series Nilai Awal [1, 0.05] stabil di E3

Pada gambar simulasi ketiga digunakan nilai-nilai parameter yaitu $r = 0.06, k = 0.8, a = 0.8, \beta = 0.7, e = 0.8, \text{ dan } \mu = 0.24$. ada satu titik kesetimbangan yang tidak eksis yaitu $E_4(1.915740168, -0.4453058871)$, Serta nilai awal $x(0) = 1$ dan $y(0) = 0.05$. Dan stabil pada titik kesetimbangan E_3 yaitu $(0.4175931649, 0.03326885012)$ Hal ini menunjukkan bahwa kestabilan ekosistem terjadi ketika populasi ikan buntal (predator) dan kepiting (prey) mengalami hidup berdampingan.

4. Dinamika Populasi Predator-Prey simulasi 2



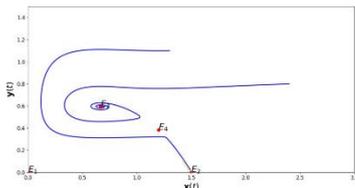
Gambar 4. 7Potret Fase, menuju ke Titik Kesetimbangan E2



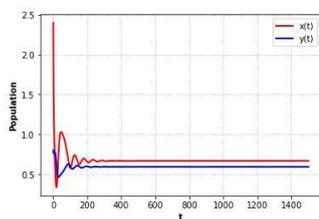
Gambar 4. 8 Grafik Time Series Nilai Awal [3, 0.05] stabil di E2

Pada gambar simulasi keempat digunakan nilai-nilai parameter yaitu $r = 0.6, k = 1.5, a = 0.8, \beta = 0.6, e = 0.4, \text{ dan } \mu = 0.15$. Ada dua titik kesetimbangan yang tidak eksis yaitu E3 dan E4, Serta nilai awal $x(0) = 3$ dan $y(0) = 0.05$. Dan stabil pada titik kesetimbangan E2 yaitu (1.500000000, 0). Hal ini sesuai dengan perhitungan secara analitik yang memenuhi syarat yaitu stabil jika $\beta < \frac{\mu(k^2+a)}{ek}$ dan tidak stabil jika $\beta > \frac{\mu(k^2+a)}{ek}$. Hal ini menunjukkan bahwa kestabilan ekosistem terjadi ketika populasi ikan buntal (predator) mengalami kepunahan.

5. Dinamika Populasi Predator-Prey simulasi 2 dengan $\beta = 0.7$



Gambar 4. 9 Potret Fase, menuju ke Titik Kesetimbangan E2 dan E3



Gambar 4. 10 Grafik Time Series Nilai Awal [2, 4.8] stabil di E2 dan E3

Pada gambar simulasi kelima digunakan nilai-nilai parameter yaitu $r = 0.06, k = 0.8, a = 0.8, \beta = 0.7, e = 0.8, \text{ dan } \mu = 0.24$. Serta nilai awal $x(0) = 2.4$ dan $y(0) = 0.8$. Maka semua titik eksis adalah E1, E2, E3, E4 Dan stabil pada titik kesetimbangan E2 yaitu (0.6666666667, 0.5925925926) dan E3 (1.500000000, 0). Hal ini menunjukkan bahwa

kestabilan ekosistem terjadi ketika populasi ikan buntal (predator) mengalami kepunahan dan menunjukkan bahwa kestabilan ekosistem terjadi ketika populasi ikan buntal (predator) dan kepiting (prey) mengalami hidup berdampingan.

Setelah melakukan simulasi 1 sampai simulasi 3 dengan memvariasikan laju penangkapan predator (β) diperoleh, dengan β sebesar 0.05 maka hanya ada dua titik kesetimbangan yang eksis yaitu E1 dan E2 akan stabil ketika terjadinya kepunahan pada predator. Ketika laju penangkapan predator meningkat menjadi 0.6 maka hanya ada tiga titik kesetimbangan yang eksis yakni E1, E2 dan E3 semakin meningkat laju penangkapan pemangsa maka akan stabil pada saat kedua populasi hidup secara berdampingan. begitu pula saat laju penangkapan predator meningkat ke 0.7 juga akan eksis pada titik kesetimbangan E1, E2 dan E3 dan juga akan stabil pada saat populasi hidup secara berdampingan.

Pada simulasi 4 dan simulasi 5 dengan merubah nilai parameter yang ada pada simulasi 1 sampai simulasi 3, variasi yang diubah yaitu laju penangkapan predator (β) diperoleh simulasi 4 dengan β sebesar 0.6 maka hanya akan eksis pada saat titik kesetimbangan E1, E2 dan E3 stabil pada saat populasi predator punah, pada saat laju penangkapan predator meningkat 0.7 maka semua titik kesetimbangan eksis, dan terdapat dua titik kesetimbangan yang stabil yaitu E2 titik kepunahan predator dan E3 titik populasi hidup secara berdampingan. Fenomena ini disebut bistabil atau kestabilan ganda.

PENUTUP

SIMPULAN

Hasil analisis kestabilan lokal model predator-prey dengan fungsi respon Monod Haldane yaitu :

1. Rekontruksi model berdasarkan (Tang, B., & Xiao, Y., 2015) adalah sebagai berikut.

$$\dot{x} = xr \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{\beta xy}{a + x^2}$$

$$\dot{y} = \frac{e\beta xy}{a + x^2} - \mu y$$

2. Analisis Kestabilan lokal menghasilkan tiga titik kestimbangan dengan kestabilannya sebagai berikut:

- a. Titik kesetimbangan $E_1(0,0)$ maka titik kestabilan bersifat tidak stabil.
 - b. Titik kesetimbangan $E_2(K,0)$ dengan titik kestabilan Ada 2 kemungkinan dengan syarat λ_2 stabil jika $-e\beta k + \mu k^2 + a\mu < 0$ dan tidak stabil jika $-e\beta k + \mu k^2 + a\mu > 0$.
 - c. Titik kesetimbangan $E_3\left(\sqrt{\mu x^2 - \mu\beta x + a\mu}, \frac{-e\beta(\beta e\sqrt{dx^2 - e\beta x + a\mu}) - \mu k(\sqrt{\mu x^2 - e\beta x + a\mu}) - a\mu}{\mu^2 k}\right)$
 Jika $\text{trace}(A) > 0$ dan $\det(A) > 0$ dengan $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ Maka, titik setimbang interior E_3 memiliki sifat ketidak stabilan.
3. Hasil simulasi numerik mengkonfirmasi kesesuaian dengan hasil analisis yang telah dilakukan. Simulasi ini menunjukkan bahwa semua titik setimbang ada, dan terdapat dua titik setimbang yang stabil yaitu E_2 dan E_3 . Fenomena ini disebut bistabil atau sistem yang memiliki kestabilan ganda.

SARAN

Saran untuk penelitian selanjutnya adalah melanjutkan analisis bifurkasi dan mempertimbangkan penggunaan fungsi respon yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

- Afiyah, S. N., 2015. Analisis dinamik model predator-prey leslie-gower dengan fungsi respon holling tipe ii. *Jurnal Ilmiah Teknologi Informasi Asia*, 9(2), 27-29.
- Agarwal, M., dan Pathak, R., 2012. Title of the publication.
- Agustini, G. L., 2019. Bifurkasi Transkritikal pada Model Predator-prey dengan Pemanenan dan Fungsi Respon Holling Tipe IV. Disertasi, Universitas Brawijaya.
- Anton, H., 1997. *Elementary Linear Algebra*. New York: John Wiley.
- Baek, H., 2009. Title of the publication.
- Boyce, W. E., dan DiPrima, R. C., 2008. *Elementary differential equations and boundary value problems* by.
- Finizio, N., dan Ladas, G., 1988. *Persamaan diferensial biasa dengan penerapan modern*. Jakarta: Erlangga.
- Gaib, M. B., dan Ja'a, W. A., 2020. Analisis kestabilan model interaksi predator-prey dengan fungsi respon monod-haldane dan perilaku anti pemangsa. *Euler: Jurnal Ilmiah Matematika, Sains dan Teknologi*, 8(2), 51-59.
- Holling, C. S., 1959. Some characteristics of simple types of predation and parasitism. *The Canadian Entomologist*, 91(7), 385-398.
- Mortoja, S. G., Panja, P., dan Mondal, S. K., 2018. Dynamics of a predator-prey model with stage-structure on both species and anti-predator behavior. *Informatics in medicine unlocked*, 10, 50-57.
- Murray, J. D., 2002. *Mathematical biology: I. an introduction*. interdisciplinary applied mathematics. *Mathematical Biology*, Springer, 17.
- Perko, 2001. *Linear systems. Differential Equations and Dynamical Systems*, (hal. 1-63).
- Rana, S. M. S., 2015. Bifurcation and complex dynamics of a discrete-time predator-prey system with simplified monod-haldane functional response. *Advances in Difference Equations*, 2015(1), 1-17.
- Ross, S. L., 1989. *Introduction To Ordinary Differential Equations*. Singapore: Jhon Wiley & Son, Inc. 31
- Ruan, S., dan Xiao, D., 2000. Global analysis in a predator-prey system with nonmonotonic functional response. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 61(4), 1445- 1472. URL <https://doi.org/10.1137/s0036139999361896>
- Ruan, S., dan Xiao, D., 2001. Global analysis in a predator-prey system with nonmonotonic functional response. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 61(4), 1445- 1472.
- Saadah, S., et al., 2019. Model interaksi mangsa pemangsa dengan fungsi respon rasio dependent holling tipe ii dan perilaku anti pemangsa. *Mathunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 7(2).
- Scheinerman, E. R., 2000. *Dynamical Systems*. Department of Mathematical Sciences, The Johns Hopkins University.
- Tang, B., dan Xiao, Y., 2015. Bifurcation analysis of a predator-prey model with antipredator behaviour. *Chaos, Solitons and Fractals*, 70(1), 58-68. URL <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2014.11.008>
- Zhang, L.-Y., 2015. Hopf bifurcation analysis in a monod-haldane predator-prey model with delays and diffusion. *Applied mathematical modelling*, 39(3-4), 1369- 1382.
- Zill, D. G., dan Cullen, M. R., 2009. *Differential Equations with Boundary Value Problems*. Canada: Nelson Education Ltd