

BILANGAN KETERHUBUNGAN TITIK PELANGI BEBERAPA KELAS GRAF

Addinda Nur Ameliyah

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
email: addinda.19011@mhs.unesa.ac.id

I Ketut Budayasa

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
Penulis Korespondensi: ketutbudayasa@unesa.ac.id

Abstrak

Graf G disebut terhubung titik pelangi jika setiap dua titik G dihubungkan oleh lintasan pelangi yaitu lintasan yang semua titik internalnya berwarna berbeda. Bilangan keterhubungan titik pelangi dari G , dilambangkan dengan $rvc(G)$, adalah minimum banyaknya warna yang digunakan untuk mewarnai semua titik G sedemikian hingga graf G terhubung titik pelangi. Bilangan keterhubungan titik pelangi dalam suatu graf tidak akan kurang dari diameter graf dikurangi satu. Bilangan keterhubungan titik pelangi yang dibahas dalam artikel ini untuk berbagai kelas graf antara lain graf komplet K_n , graf bipartit komplet $K_{m,n}$, graf roda W_n , graf roda dua lapis W_n^2 , graf multipartit komplet K_{n_1, n_2, \dots, n_t} , lintasan P_n , graf sisir GS_n , graf $U(n_1, n_2, \dots, n_k)$, graf $P_n \odot N_k$, graf $P_n \odot K_m$, graf $K_m \odot K_n$.

Kata Kunci: graf, pewarnaan titik, bilangan keterhubungan titik pelangi.

Abstract

A graph G is called a rainbow vertex connected if every two vertices G are connected by a rainbow path, that is, a path whose all the internal vertices are of a different color. The rainbow vertex connection number of graph G denoted by $rvc(G)$ is the minimum number of colors used to color all vertices by G such that the graph G is connected to rainbow vertex. The rainbow vertex connection number in a graph will not be less than the diameter of the graph minus one. The rainbow vertex connection number discussed in this article for various classes of graphs include complete graph K_n , complete bipartite graph $K_{m,n}$, wheel graph W_n , two-layer wheel graph W_n^2 , complete multipartite graph K_{n_1, n_2, \dots, n_t} , path P_n , comb graph GS_n , graph $U(n_1, n_2, \dots, n_k)$, graph $P_n \odot N_k$, graph $P_n \odot K_m$, graph $K_m \odot K_n$.

Keywords: graph, vertex coloring, rainbow vertex connection number.

PENDAHULUAN

Sebuah graf G berisi dua himpunan, yaitu himpunan berhingga tak kosong $V(G)$ dari objek-objek yang disebut titik dari G dan himpunan berhingga (bisa kosong) $E(G)$ yang elemennya disebut sisi sehingga setiap elemen e dalam $E(G)$ adalah pasangan tak berurutan dari titik-titik di $V(G)$ (Budayasa, 2007). Pewarnaan adalah salah satu dari banyak topik yang dibahas dalam teori graf. Akan menarik untuk menggabungkan keterhubungan dan pewarnaan pada graf.

Bilangan keterhubungan-titik pelangi dari G , dilambangkan dengan $rvc(G)$, adalah minimum banyaknya warna yang digunakan untuk mewarnai semua titik G sedemikian hingga graf G terhubung titik pelangi. Menemukan bilangan keterhubungan titik pelangi untuk berbagai kelas graf, seperti yang

dilakukan Bustan untuk graf lingkaran bintang (**SmCn**) (Bustan & Salman, 2019), Brella pada graf kuadratik dan graf garis dari graf kembang api (Glysentia et al., 2020), Cindy pada graf salju (Noor et al., 2021), Yupensius pada graf planter dan graf gurita (Joko et al., 2019) merupakan beberapa masalah pewarnaan pelangi yang telah dikaji. Sehubungan dengan hal tersebut, penelitian selanjutnya dilakukan pada objek graf lainnya.

Secara umum, sulit untuk mengetahui bilangan keterhubungan titik pelangi yang dimiliki graf. Oleh karena itu, bilangan keterhubungan titik pelangi akan dibahas dalam penelitian ini untuk berbagai kelas graf, antara lain graf komplet K_n , graf bipartit komplet $K_{m,n}$, graf roda W_n , graf roda dua lapis W_n^2 , graf multipartit komplet K_{n_1, n_2, \dots, n_t} , lintasan P_n , graf sisir GS_n , graf $U(n_1, n_2, \dots, n_k)$, graf $P_n \odot N_k$, graf $P_n \odot K_m$, graf $K_m \odot K_n$.

KAJIAN TEORI

Graf Roda Dua Lapis

Definisi 2.1 :

Graf roda dua lapis yang dilambangkan dengan W_n^2 adalah graf yang dibentuk dari dua siklus C_n , $C_n^1: u_1, u_2, \dots, u_n, u_1$ dan $C_n^2: v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$ dan sebuah titik w . Dengan menambahkan sisi baru yang menghubungkan antara titik w dengan u_i dan u_i dengan v_i untuk $1 \leq i \leq n$ (Li et al., 2014).

Graf multipartit Komplet

Definisi 2.2 :

Graf G disebut graf multipartit komplet jika himpunan titik G dapat dipartisi menjadi t himpunan bagian, dinamakan $A_1, A_2, \dots, A_t, t \geq 3$. Sedemikian hingga setiap sisi G menghubungkan sebuah titik dipartisi A_i dan sebuah titik dipartisi A_j , dengan $i \neq j, 1 \leq i, j \leq t$

Selanjutnya jika G graf multipartit sederhana dan setiap titik dipartisi A_i berhubungan langsung dengan setiap titik dipartisi $A_j, \forall i \neq j, 1 \leq i, j \leq t$ maka G disebut graf multipartit Komplet. Jika $|A_i| = n_i, \forall i, 1 \leq i \leq t$

Graf multipartit komplet tersebut dinotasikan dengan K_{n_1, n_2, \dots, n_t} (Chartrand & Zhang, 2003).

Operasi Korona

Definisi 2.3 :

Diberikan graf G_1 dan G_2 . Korona dari G_1 dan G_2 , dilambangkan dengan $G_1 \odot G_2$ adalah sebuah graf yang diperoleh dari mengambil sebuah salinan dari G_1 yang memiliki p_1 titik dan p_1 salinan dari G_2 , dan menghubungkan titik ke i dari G_1 dengan sebuah sisi ke setiap titik di salinan ke- i dari G_2 .

Graf Sisir

Definisi 2.4

Graf sisir GS_n didefinisikan sebagai graf hasil korona P_n dan K_1 dilambangkan $P_n \odot K_1$ yang memiliki $2n$ titik dan $2n - 1$ sisi (Fransiskus et al., 2020).

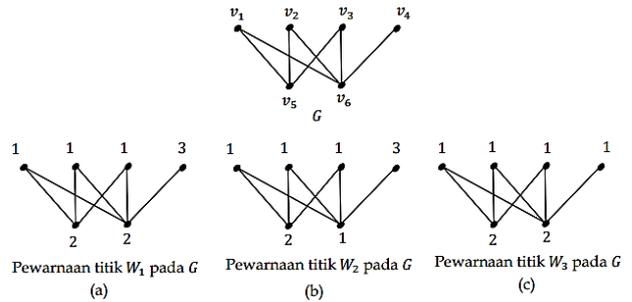
HASIL DAN PEMBAHASAN

Terhubung titik pelangi

Definisi 3.1 :

Misalkan graf G terhubung. Warnai semua titik G dengan sebarang warna, namakan pewarnaan w , graf G disebut terhubung titik pelangi jika setiap dua titik G dihubungkan oleh sebuah lintasan pelangi yaitu lintasan yang semua titik internalnya berwarna berbeda.

Contoh 3.1 :



Gambar 3.1 Graf komplet

- (a) Pada pewarnaan titik w_1 , graf G terhubung titik pelangi dengan menggunakan 3 warna
- (b) Pada pewarnaan titik w_2 , graf G tidak terhubung titik pelangi, karena tidak ada lintasan pelangi yang menghubungkan titik v_4 dan titik v_5
- (c) Pada pewarnaan titik w_3 graf G terhubung titik pelangi, dengan menggunakan 2 warna

Bilangan keterhubungan titik pelangi

Definisi 3.2 :

Misalkan G graf terhubung. Bilangan keterhubungan titik pelangi dari G , dilambangkan dengan $rvc(G)$, adalah minimum banyaknya warna yang digunakan untuk mewarnai semua titik G sedemikian hingga graf G terhubung titik pelangi.

Contoh 3.2 :

Terhadap pewarnaan titik w_3 (Gambar 3.1 (c)). Dengan menggunakan 2 warna, terbukti bahwa G terhubung titik. Ini berarti

$$rvc(G) \leq 2 \tag{1}$$

Andaikan semua titik G diwarnai dengan satu warna sama, maka tidak ada lintasan pelangi, yang menghubungkan titik v_4 dan titik v_5 . Akibatnya,

$$rvc(G) \geq 2 \tag{2}$$

Dari (1) dan (2) disimpulkan

$$rvc(G) = 2$$

Menetapkan bilangan keterhubungan titik pelangi suatu graf biasanua sulit dipecahkan. Tetapi dapat dibuktikan bahwa batas bawah dari $rvc(G)$ ditentukan oleh diameter graf G .

Berikut dibuktikan bahwa bilangan keterhubungan titik pelangi suatu graf tidak akan kurang dari diameter graf dikurangi satu

Lemma 3.1 :

Jika graf G terhubung dan nontrivial, maka

$$rvc(G) \geq \text{diam}(G) - 1$$

Bukti :

Misalkan G sebuah graf terhubung dengan $\text{diam}(G) = t$. Kemudian ada lintasan P panjang t yang menghubungkan titik u dan v di G . Karena panjang P adalah t , banyaknya titik internal P adalah $t - 1$

Pikirkan sebuah pewarnaan-titik w pada graf G sedemikian hingga terhadap pewarnaan w graf G terhubung-titik Pelangi. Ini berarti, semua titik internal P harus memiliki warna yang berbeda dalam pewarnaan w . Akibatnya,

$$rvc(G) \geq t - 1 = \text{diam}(G) - 1$$

Dengan demikian lemma terbukti ■

Menggunakan Definisi 3.2 dan Lemma 3.1, diperoleh sejumlah hasil berikut.

Teorema 3.2 :

Untuk graf lengkap K_n dengan $n \geq 2$, diperoleh

$$rvc(K_n) = 0$$

Bukti :

Karena $\forall u, v \in V(K_n), d(u, v) = 1$, maka

$$\text{diam}(K_n) = 1$$

Berdasarkan Lemma 3.1

$$rvc(K_n) \geq \text{diam}(K_n) - 1 = 1 - 1 = 0 \quad (1)$$

Berdasarkan definisi 3.2,

$$rvc(K_n) \leq 0 \quad (2)$$

Dari (1) dan (2) diperoleh

$$rvc(K_n) = 0$$

Teorema terbukti ■

Teorema 3.3 :

Untuk graf bipartit lengkap $K_{m,n}$, berlaku

$$rvc(K_{m,n}) = \begin{cases} 0, & m = n = 1 \\ 1, & m \geq 2 \text{ atau } n \geq 2 \end{cases}$$

Bukti :

Misalkan A dan B adalah bipartisi dari graf $K_{m,n}$ dengan $|A| = m$ dan $|B| = n$

Karena untuk $m = 1$ dan $n = 1$, $K_{1,1} = K_2$, berdasarkan Teorema 3.2,

$$rvc(K_{1,1}) = rvc(K_2) = 0$$

Untuk $m \geq 2$ atau $n \geq 2$ jelas bahwa

$$\text{diam}(K_{m,n}) = 2$$

Berdasarkan Lemma 3.1 diperoleh

$$rvc(K_{m,n}) \geq 2 - 1 = 1 \quad (1)$$

Konstruksi sebuah pewarnaan-titik w pada graf $K_{m,n}$ hanya menggunakan tepat satu warna katakan warna 1. Jelas terhadap pewarnaan w ini, graf $K_{m,n}$ terhubung-titik pelangi, berdasarkan Definisi 3.2,

$$rvc(K_{m,n}) \leq 1 \quad (2)$$

Dari (1) dan (2) disimpulkan

$$rvc(K_{m,n}) = 1$$

Dengan demikian, bukti teorema lengkap ■

Teorema 3.4 :

Untuk graf roda W_n berlaku

$$rvc(W_n) = \begin{cases} 0, & n = 3 \\ 1, & n \geq 4 \end{cases}$$

Bukti :

Untuk $n = 3, W_n = W_3 = K_4$. Sehingga, berdasarkan Teorema 3.2,

$$rvc(W_4) = rvc(K_4) = 0$$

Untuk $n \geq 4$, jelas bahwa

$$\text{diam}(W_n) = 2$$

Sehingga berdasarkan Lemma 3.1,

$$\begin{aligned} rvc(W_n) &\geq \text{diam}(W_n) - 1 \\ &= 2 - 1 \\ &= 1 \end{aligned} \quad (1)$$

Kemudian, warnai semua titik graf W_n dengan warna yang sama, seperti warna 1. Lintasan pelangi menghubungkan setiap dua titik graf W_n . Sehingga terhadap pewarnaan titik tersebut graf W_n terhubung pelangi dengan memerlukan hanya 1 warna. Akibatnya, berdasarkan definisi 3.2

$$rvc(W_n) \leq 1 \quad (2)$$

Dari (1) dan (2), disimpulkan

$$rvc(W_n) = 1$$

Teorema terbukti ■

Teorema 3.5 :

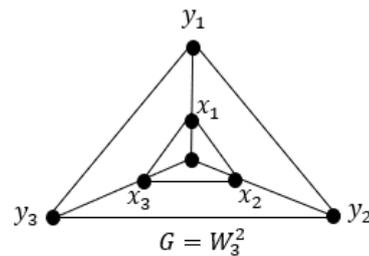
Jika W_n^2 adalah graf roda dua lapis dengan $n \geq 3$, maka

$$rvc(W_n^2) = \begin{cases} 1, & n = 3 \\ 2, & 4 \leq n \leq 6 \\ 3, & 7 \leq n \leq 10 \\ y, & n \geq 11 \end{cases}$$

Bukti :

Kasus 1 : $n = 3$

Dalam hal ini, graf roda dua lapis W_3^2 dapat dilihat seperti gambar 3.3



Gambar 3.3 Graf roda dua lapis W_3^2

Perhatikan bahwa $d_G(u, v) \leq 2, \forall u, v \in V(G)$ dan $d_G(y, z) = 2$. Sehingga, $\text{diam}(G) = 2$

Berdasarkan Lemma 3.1,

$$rvc(G) \geq \text{diam}(G) - 1 = 2 - 1 = 1 \quad (1)$$

Selanjutnya, warnai semua titik G dengan warna 1 ;

Dengan kata lain misalkan pewarnaan w didefinisikan sebagai berikut

$$w: V(G) \rightarrow \{1\}$$

Jelas bahwa terhadap pewarnaan w , graf G terhubung pelangi. Berdasarkan definisi 3.2,

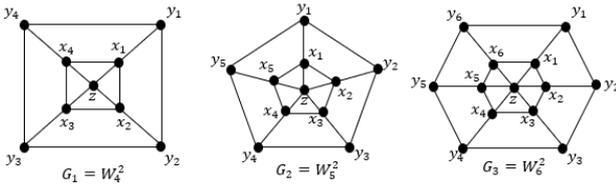
$$rvc(G) \leq 1 \tag{2}$$

Dari (1) dan (2), disimpulkan

$$rvc(G) = rvc(W_3^2) = 1$$

Kasus 2 : $4 \leq n \leq 6$

Dalam hal ini, graf roda dua lapis W_n^2 dapat dilihat seperti gambar berikut



Gambar 3.4 Graf roda dua lapis W_4^2, W_5^2, W_6^2

Perhatikan bahwa $\forall i, 1 \leq i \leq 3$,

$$d_{G_i}(u, v) \leq 3 \forall u, v \in V(G_i)$$

Dan $d_{G_i} = (x_1, y_3) = 3$. Sehingga, berdasarkan Definisi 2.6,

$$diam(G_i) = 3$$

Akibatnya berdasarkan Lemma 3.1,

$$rvc(G_i) \geq diam(G_i) - 1 = 3 - 1 = 2$$

Jadi $\forall i, 1 \leq i \leq 3$,

$$rvc(G_i) \geq 2 \tag{3}$$

Selanjutnya, konstruksi pewarnaan-titik w pada graf $G_i, w: V(G_i) \rightarrow \{1,2\}$ sedemikian hingga

$$w(v) = \begin{cases} 1, & v = z \vee v = y_i, i \text{ genap} \\ 2, & v = x_i, 1 \leq i \leq n \vee v = y_i, i \text{ ganjil} \end{cases}$$

Perhatikan terhadap warna w , graf G_i terhubung pelangi sehingga berdasarkan Definisi 3.2,

$$rvc(G_i) \leq 2 \tag{4}$$

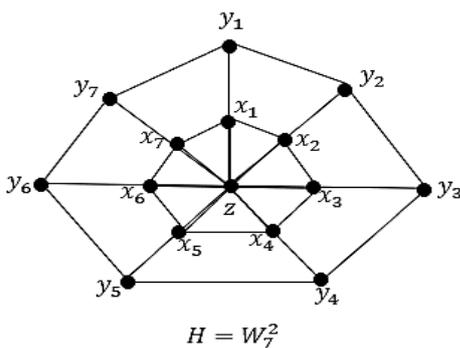
Dari (3) dan (4), disimpulkan

$$rvc(G_i) = 2, \forall i, 1 \leq i \leq 3$$

Atau $rvc(W_n^2) = 2$, untuk $4 \leq n \leq 6$

Kasus 3 : $n = 7$

Untuk $n = 7$, graf W_n^2 dapat dilihat seperti gambar berikut



Gambar 3.5 Graf roda dua lapis W_7^2

Perhatikan bahwa $d_H(u, v) \leq 3 \forall u, v \in V(H)$ dan $d_H(x_1, y_5) = 3$. Maka berdasarkan Definisi 2.6,

$$diam(H) = 3$$

berdasarkan Lemma 3.1,

$$rvc(H) \geq 3 - 1 = 2 \tag{5}$$

Klaim : Tidak ada pewarnaan titik dengan 2 warna, sedemikian hingga terhadap pewarnaan tersebut graf H terhubung pelangi

Bukti klaim : (Dengan kontradiksi)

Andaikan ada pewarnaan-titik dengan 2 warna, namakan w , sedemikian hingga terhadap w graf H terhubung pelangi. Pikirkan lintasan pelangi yang menghubungkan titik y_1 dan y_4 pada H maka y_2 dan y_3 harus mendapat warna yang berbeda. Tanpa menghilangkan keumuman, misal $w(y_2) = 1$ dan $w(y_3) = 2$

Demikian juga titik y_6 dan y_7 harus mendapat warna yang berbeda agar lintasan (y_1, y_7, y_6, y_5) pelangi. Jika $w(y_6) = 1$ dan $w(y_7) = 2$, maka tidak ada lintasan pelangi yang menghubungkan y_2 dan y_6 , apabila $w(y_1) = 2$ dan juga tidak ada lintasan pelangi menghubungkan y_3 dan y_7 apabila $w(y_1) = 1$.

Sekarang, misalkan $w(y_6) = 2$ dan $w(y_7) = 1$. Maka tidak ada lintasan pelangi menghubungkan titik y_2 dan titik y_6 , apabila $w(y_1) = 1$. Sehingga $w(y_1) = 2$. Dengan argument yang sama, y_4 dan y_5 harus mendapat warna yang berbeda. Akibatnya, tidak ada lintasan pelangi menghubungkan y_4 dan y_7 jika $w(y_4) = 1$ dan $w(y_5) = 2$, dan tidak ada lintasan pelangi menghubungkan y_2 dan y_5 jika $w(y_4) = 2$ dan $w(y_5) = 1$, kontradiksi.

Dari klaim di atas dan (5) disimpulkan bahwa

$$rvc(H) \geq 3 \tag{6}$$

Kemudian, mengkonstruksikan pewarnaan titik pada H sebagai berikut :

$$w: V(H) \rightarrow \{1,2,3\}$$

Sedemikian hingga

$$w(v) = \begin{cases} 1, & v = x_i, i \text{ ganjil atau } v = y_6 \\ 2, & v = x_i, i \text{ genap atau } v = y_i, i \text{ genap}, 1 \leq i \leq 5, \\ & \text{atau } v = y_7 \\ 3, & v = z, \text{ atau } v = y_i, i \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq 5 \end{cases}$$

Perhatikan terhadap pewarnaan w , graf H terhubung pelangi sehingga berdasarkan Definisi 3.2,

$$rvc(H) \leq 3 \tag{7}$$

Dari (6) dan (7), disimpulkan

$$rvc(H) = 3$$

Kasus 4 : $8 \leq n \leq 9$

Seperti sebelumnya, karena $diam(W_n^2) = 4$, maka berdasarkan Lemma 3.1,

$$rvc(W_n^2) \geq 3 \tag{8}$$

Definisikan sebuah pewarnaan-titik-3 w pada graf W_n^2 sebagai berikut

$$w: V(W_n^2) \rightarrow \{1,2,3\}$$

Sedemikian hingga,

$$w(v) = \begin{cases} 1, v = x_i, i \text{ ganjil atau } v = y_i, i \equiv 2(\text{mod } 3) \\ 2, v = x_i, i \text{ genap atau } v = y_i, i \equiv 0(\text{mod } 3) \\ 3, v = z, \text{ atau } v = y_i, i \equiv 1(\text{mod } 3) \end{cases}$$

Terhadap pewarnaan w , graf W_n^2 terhubung pelangi, sehingga berdasarkan Definisi 3.2,

$$rvc(W_n^2) \leq 3 \tag{9}$$

Dari (8) dan (9), diperoleh

$$rvc(W_n^2) = 3$$

Kasus 5 : $n = 10$

Karena $diam(W_n^2) = 4$, maka berdasarkan lemma 3.1,

$$rvc(W_n^2) \geq 3 \tag{10}$$

Definisikan sebuah pewarnaan-titik-3 w pada graf W_n^2 sebagai berikut :

$$w = V(W_n^2) \rightarrow \{1,2,3\}$$

Sedemikian hingga,

$$w(v) = \begin{cases} 1, v = x_i, 1 \leq i \leq 5; \text{ atau } v = y_2; v = y_5; v = y_9 \\ 2, v = x_i, 6 \leq i \leq 10; v = y_1; v = y_3; v = y_6; v = y_8 \\ 3, v = z; v = y_4; v = y_7; v = y_{10} \end{cases}$$

Perhatikan, bahwa terhadap pewarnaan-titik w , graf $W_{10}^2 = W_n^2$ terhubung pelangi, sehingga berdasarkan Definisi 3.2,

$$rvc(W_n^2) \leq 3 \tag{11}$$

Dari (10) dan (11), diperoleh

$$rvc(W_n^2) = rvc(W_{10}^2) = 3$$

Kasus 6 : $n \geq 11$

Misalkan $G = W_n^2$, untuk $n \geq 11$.

Perhatikan bahwa

$$d_G(u, v) \leq 4, \forall u, v \in V(G)$$

dan

$$d_G(y_1, y_5) = 4.$$

Sehingga berdasarkan Definisi 2.6,

$$diam(G) = diam(W_n^2) = 4$$

Berdasarkan Lemma 3.1,

$$rvc(G) \geq 3 \tag{12}$$

Klaim :

Tidak ada pewarnaan titik dengan 3 warna, sedemikian hingga terhadap pewarnaan tersebut graf G terhubung pelangi.

Bukti Klaim : (Dengan kontradiksi)

Andaikan ada pewarnaan-titik dengan 3 warna, namakan w , sedemikian hingga terhadap w graf G terhubung pelangi.

Tanpa menghilangkan keumuman, misal $w(x_1) = 1$. Perhatikan $\forall i, 6 \leq i \leq n - 4$, hanya $P_i = (y_1, x_1, z, x_i y_i)$

Lintasan dari y_1 ke y_i panjang 4 di graf G , sehingga titik-titik internal P_i yaitu x_1, z dan x_i harus berwarna berbeda. Tanpa menghilangkan keumuman, misal $w(z) = 3$ dan $w(x_i) = 2$. Karena $w(x_6) = 2$, maka $w(x_n) = 1$. Ini berakibat $w(x_5) = 2$ dan $w(x_{n-1}) = 1$. Karena $w(x_{n-1}) = 1$, memaksa $w(x_4) = 2$; dan memaksa $w(x_{n-2}) = 1$, dan ini mengakibatkan $w(x_3) = 2$, dan berakibat $w(x_{n-3}) = 1$, dan ini berakibat $w(x_2) = 2$. Akibatnya, tidak ada lintasan pelangi dari y_2 ke y_7 pada G , kontradiksi. Klaim terbukti.

Dari Klaim di atas dan (12), disimpulkan

$$rvc(G) \geq 4 \tag{13}$$

Selanjutnya, definisikan pewarnaan-titik w pada graf G dengan 4 warna sebagai berikut:

$$w(v) = \begin{cases} 1, v = x_i, i \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq n \\ 2, v = x_i, i \text{ genap}, 1 \leq i \leq n \\ 3, v = z \\ 4, v = y_i, \forall i, 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Perhatikan titik pewarnaan w , graf G terhubung pelangi. Sehingga berdasarkan Definisi 3.2,

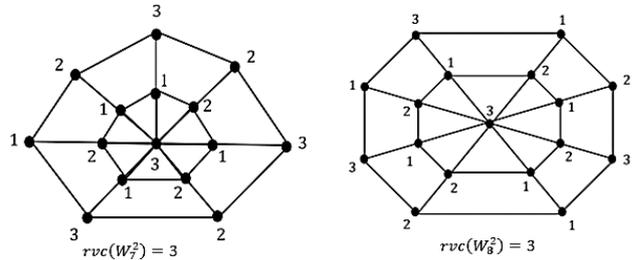
$$rvc(G) \leq 4 \tag{14}$$

Dari (13) dan (14) disimpulkan

$$rvc(G) = rvc(W_n^2) = 4, \text{ untuk } n \geq 11.$$

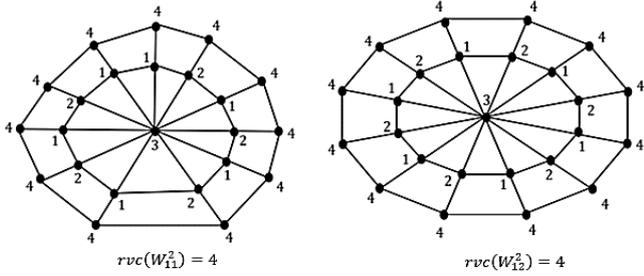
Dengan demikian bukti teorema lengkap ■

Sebuah pewarnaan-titik-3 pada graf W_7^2 dan W_8^2 dapat dilihat pada gambar berikut



Gambar 3.6 Pewarnaan titik pelangi W_7^2, W_8^2

Sebuah pewarnaan-titik-4 pada graf W_{11}^2 dan W_{12}^2 dapat dilihat pada gambar berikut



Gambar 3.7 Pewarnaan titik pelangi W_{11}^2, W_{12}^2

Berikut ditunjukkan bahwa bilangan keterhubungan-titik-pelangi graf multipartit lengkap adalah 1 jika ada salah satu partisi memuat paling sedikit dua titik

Teorema 3.6 :

Jika K_{n_1, n_2, \dots, n_t} graf multipartit lengkap dengan $t \geq 3$, maka

$$rvc(K_{n_1, n_2, \dots, n_t}) = \begin{cases} 0, & \text{jika } n_i = 1, \forall i, 1 \leq i \leq t \\ 1, & \text{jika } n_i \geq 2, \text{ untuk suatu } i, 1 \leq i \leq t \end{cases}$$

Bukti :

Jika $\forall i, 1 \leq i \leq t, n_i = 1$, maka graf K_{n_1, n_2, \dots, n_t} adalah graf lengkap dengan t titik; atau

$$K_{n_1, n_2, \dots, n_t} = K_t$$

Berdasarkan Teorema 3.2,

$$rvc(K_{n_1, n_2, \dots, n_t}) = rvc(K_t) = 0$$

Misalkan $n_i \geq 2$ untuk suatu $i, 1 \leq i \leq t$

Misalkan A_1, A_2, \dots, A_t dengan $|A_i| = n_i, \forall i, 1 \leq i \leq t$ adalah multipartisi dari graf $K_{n_1, n_2, \dots, n_t} = G$

Misalkan $u, v \in V(G)$ dan $u \neq v$

Jika u dan v terletak pada partisi berbeda dari G , maka

$$d_G(u, v) = 1$$

Jika u dan v terletak pada partisi yang sama dari G , maka

$$d_G(u, v) = 2$$

Sehingga

$$diam(G) = 2$$

Berdasarkan, Lemma 3.1,

$$rvc(G) \geq 2 - 1 = 1 \tag{1}$$

Selanjutnya, digunakan tepat satu warna untuk mendefinisikan pewarnaan titik w pada G . Jelas terhadap pewarnaan w , graf G terhubung-titik pelangi.

Berdasarkan, Definisi 3.2,

$$rvc(G) \leq 1 \tag{2}$$

Dari (1) dan (2), diperoleh

$$rvc(G) = 1$$

Dengan demikian, teorema terbukti ■

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa bilangan keterhubungan titik pelangi lintasan P_n dengan n titik adalah banyak titik dikurangi dua.

Teorema 3.7 :

Jika P_n adalah lintasan dengan n titik, maka

$$rvc(P_n) = n - 2$$

Bukti :

Karena lintasan dengan n titik mempunyai panjang $n - 1$, maka

$$diam(P_n) = n - 1$$

Berdasarkan, Lemma 3.1,

$$rvc(P_n) \geq n - 2 \tag{1}$$

Misalkan $P_n = (v_1, v_2, \dots, v_n)$

Titik-titik v_2, v_3, \dots, v_{n-1} adalah titik-titik internal dari P_n

Warnai semua titik internal P_n dengan $n - 2$ warnai berbeda dan v_1 dan v_n diwarnai dengan warna yang sama dengan warna salah satu warna titik internal.

Jelas terhadap pewarnaan-titik tersebut lintasan P_n terhubung pelangi dengan menggunakan $n - 2$ warna berbeda, sehingga berdasarkan Definisi 3.2,

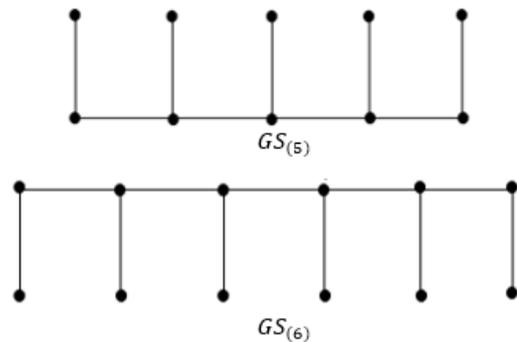
$$rvc(P_n) \leq n - 2 \tag{2}$$

Dari (1) dan (2), disimpulkan

$$rvc(P_n) = n - 2$$

Dengan demikian, bukti teorema lengkap ■

Misalkan P_n adalah lintasan dengan n titik dan K_1 adalah graf lengkap dengan 1 titik, Graf Corona $P_n \odot K_1$ dinamakan graf sisir, dilambangkan dengan $GS_{(n)}$. Sebagai contoh, graf sisir $GS_{(5)}$ dan $GS_{(6)}$ dapat dilihat pada gambar berikut



Gambar 3.8 Graf sisir $GS_{(5)}, GS_{(6)}$

Perhatikan bahwa sisir $GS_{(n)}$ mempunyai $2n$ titik dan $2n - 1$ sisi

Teorema 3.8 :

Untuk bilangan positif n ,

$$rvc(GS_{(n)}) = n$$

Bukti :

Misalkan, $P_n = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ adalah lintasan pembentuk $GS_{(n)}$ dan u_i titik pendants pada graf $GS_{(n)}$

yang berhubungan langsung dengan titik v_i , untuk $1 \leq i \leq n$.

Maka

$$\hat{P} = (u_1, v_1, v_2, \dots, v_n, u_n)$$

Adalah lintasan terpanjang di graf $GS_{(n)}$ dengan panjang $n + 1$

Perhatikan bahwa,

$$\forall x, y \in V(GS_{(n)}), d(x, y) \leq n + 1$$

dan $d(u_1, u_n) = n + 1$

Maka $diam(GS_{(n)}) = n + 1$

Berdasarkan Lemma 3.1,

$$rvc(GS_{(n)}) \geq (n + 1) - 1 = n \tag{1}$$

Definisikan pewarnaan-titik w pada graf $GS_{(n)}$ sebagai berikut

$$w: V(GS_{(n)}) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

Sedemikian hingga, $\forall x \in V(GS_{(n)})$

$$w(x) = \begin{cases} i, & \text{jika } x = v_i, 1 \leq i \leq n \\ 1, & \text{jika } x = u_i, 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Jelas pada pewarnaan titik w $GS_{(n)}$ terhubung pelangi dengan menggunakan n warna, sehingga, berdasarkan Definisi 3.2,

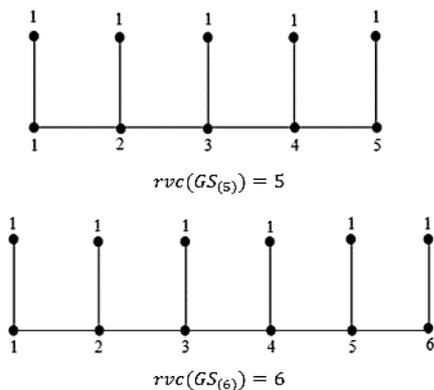
$$rvc(GS_{(n)}) \leq n \tag{2}$$

Dari (1) dan (2), disimpulkan

$$rvc(GS_{(n)}) = n$$

Dengan demikian, teorema terbukti ■

Sebagai ilustrasi, sebuah pewarnaan-titik pelangi pada graf sisir $GS_{(5)}$ dan $GS_{(6)}$ dapat dilihat pada gambar berikut



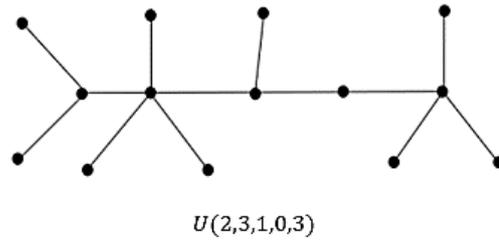
Gambar 3.9 Pewarnaan titik pelangi $GS_{(5)}$, $GS_{(6)}$

Definisi 3.3 :

Graf *carterpillar* (ulat) adalah graf yang dibentuk dari lintasan $P_n = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ dengan menambah sebanyak $n_i \geq 0$ sisi-sisi *pendant* pada setiap titik v_i dari P_n . Graf ulat tersebut dilambangkan dengan $U(n_1, n_2, \dots, n_n)$.

Contoh 3.3 :

Graf ulat $U(2,3,1,0,3)$ dapat dilihat pada gambar berikut



Gambar 3.9 Graf ulat $U(2,3,1,0,3)$

Perhatikan graf sisir $GS_{(n)}$ adalah graf ulat khusus yaitu $GS_{(n)} = U(1, 1, \dots, 1) = P_n \circ K_1$

Jika $n_1 = n_2 = \dots = n_n = n$, maka

$$U(n, n, \dots, n) = P_n \circ N_n$$

Dengan N_n adalah graf kosong (nol) dengan n titik.

Teorema 3.9 :

Jika $k \geq 1$ dan $n_i \geq 1, \forall i, 1 \leq i \leq k$, maka

$$rvc(U(n_1, n_2, \dots, n_k)) = k$$

Bukti :

Misalkan $G = U(n_1, n_2, \dots, n_k)$ dan lintasan P_k dalam G adalah

$$P_k = (v_1, v_2, \dots, v_k)$$

Misalkan, $\forall i, 1 \leq i \leq k$, himpunan titik-titik "pendant" G pada v_i adalah

$$A_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in_i}\}$$

Maka lintasan terpendek yang menghubungkan titik x_{1j_1} dan titik x_{kj_2} , untuk suatu j_1 dan j_2 dengan $1 \leq j_1 \leq n_1; 1 \leq j_2 \leq n_k$, pada G adalah

$$\hat{P} = (x_{1j_1}, v_1, v_2, \dots, v_k, x_{kj_2})$$

dengan panjang $k + 1$. sehingga

$$d_G(x_{1j_1}, x_{kj_2}) = k + 1$$

Perhatikan bahwa $\forall u, v \in V(G), d_G(u, v) \leq k + 1$.

Maka

$$diam(G) = k + 1$$

Berdasarkan Lemma 3.1,

$$rvc(G) \geq (k + 1) - 1 = k \tag{1}$$

Selanjutnya, definisikan pewarnaan-titik w pada G sebagai berikut

$$w: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$$

dengan

$$w(u) = \begin{cases} i, & \text{jika } u = v_i, 1 \leq i \leq k \\ k, & \text{jika } u \text{ titik "pendant" pada } G \end{cases}$$

Jelas bahwa terhadap pewarnaan-titik w dengan k warna, graf G terhubung pelangi. Sehingga berdasarkan Definisi 3.2,

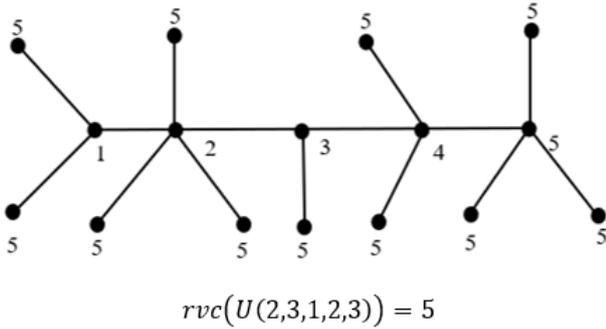
$$rvc(G) \leq k \tag{2}$$

Dari (1) dan (2), disimpulkan

$$rvc(G) = k$$

Teorema terbukti ■

Sebagai ilustrasi, sebuah pewarnaan-titik w dengan 5 warna pada graf ulat $U(2,3,1,2,3)$ pada gambar berikut.



Gambar 3.10 Pewarnaan titik pelangi pada graf $U(2,3,1,2,3)$

Akibat langsung dari Teorema 3.9 adalah hasil berikut.

Akibat 3.10 :

Jika P_n adalah lintasan dengan n titik dan N_k adalah graf kosong dengan k titik dan $k \geq 1$, maka

$$rvc(P_n \odot N_k) = n$$

Bukti :

Perhatikan bahwa

$$P_n \odot N_k = \underbrace{U(k, k, \dots, k)}_{\text{sebanyak } n \text{ buah } k}$$

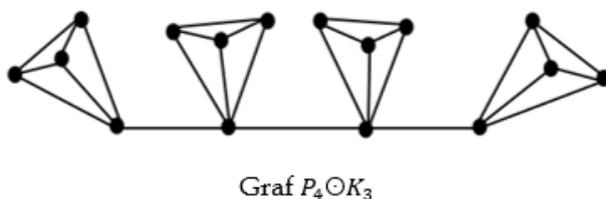
Berdasarkan Teorema 3.9,

$$rvc(P_n \odot N_k) = rvc(U(k, k, \dots, k)) = n$$

Terbukti ■

Selanjutnya membahas bilangan keterhubungan titik pelangi graf corona P_n dan K_m ($P_n \odot K_m$)

Contoh graf corona $P_4 \odot K_3$ dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 3.11 Graf $P_4 \odot K_3$

Teorema 3.11 :

Jika $n \geq 1$ dan $m \geq 1$, maka

$$rvc(P_n \odot K_m) = n$$

Bukti :

Misalkan $G = P_n \odot K_m$ dan $P_n = (v_1, v_2, \dots, v_n)$

Misalkan himpunan titik-titik pada K_m yang berhubungan langsung dengan titik v_i adalah

$$A_i = \{x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \dots, x_{im}\}$$

untuk setiap $i, 1 \leq i \leq n$

Maka lintasan $\hat{P} = (x_{1j_1}, v_1, v_2, \dots, v_n, x_{nj_2})$ dengan $1 \leq j_1, j_2 \leq m$ merupakan lintasan terpendek dari

titik x_{1j_1} ke titik x_{nj_2} pada graf G dengan Panjang $n + 1$. Sehingga

$$d_G(x_{1j_1}, x_{nj_2}) = n + 1$$

Perhatikan bahwa $\forall u, v \in V(G), d(u, v) \leq n + 1$ ini berakibat

$$diam(G) = n + 1$$

Sehingga, berdasarkan Lemma 3.1,

$$rvc(G) \geq n \tag{1}$$

Definisikan pewarnaan-titik w pada graf G sebagai berikut :

$$w: V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

dengan

$$w(u) = \begin{cases} i, & \text{jika } u = v_i, 1 \leq i \leq n \\ 1, & \text{jika } u \text{ yang lain di } G \end{cases}$$

Jelas pada pewarnaan titik w graf G terhubung pelangi dengan menggunakan n warna. Sehingga berdasarkan Definisi 3.2,

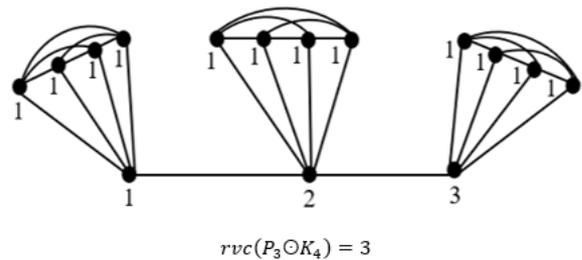
$$rvc(G) \leq n \tag{2}$$

Dari (1) dan (2), diperoleh

$$rvc(P_n \odot K_m) = n$$

Dengan demikian, bukti teorema lengkap ■

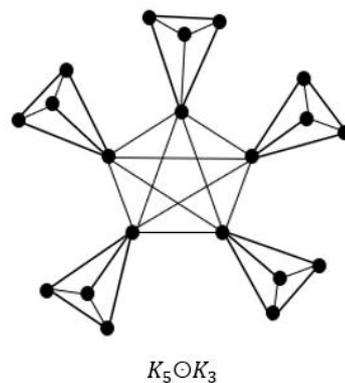
Berikut ilustrasi pewarnaan titik pelangi pada graf $P_3 \odot K_4$ dengan 3 warna dilihat pada gambar berikut



Gambar 3.12 Pewarnaan titik pelangi $P_3 \odot K_4$

Selanjutnya dibahas $K_n \odot K_m$.

Contoh graf $K_5 \odot K_3$ dapat dilihat pada gambar berikut



Gambar 3.13 Graf $K_5 \odot K_3$

Teorema 3.12 :

Jika $m \geq 1$ dan $n \geq 1$, maka

$$rvc(K_m \odot K_n) = \begin{cases} 0, & m = 1 \text{ dan } n \geq 1 \\ m, & m \geq 2 \text{ dan } n \geq 1 \end{cases}$$

Bukti :

Misalkan $G = K_m \odot K_n$ dan $V(K_m) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$

Untuk setiap $i, 1 \leq i \leq m$, misalkan himpunan titik-titik pada K_n yang berhubungan langsung dengan titik v_i adalah $A_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}\}$

Untuk $m = 1$ dan $n \geq 1$, maka $G = K_1 \odot K_n = K_{n+1}$ sehingga, berdasarkan Teorema 3.2,

$$rvc(G) = rvc(K_{n+1}) = 0$$

Misalkan $m \geq 2$ dan $n \geq 1$.

Perhatikan lintasan

$$P = (x_{ik_1}, v_i, v_j, x_{jk_2}), i \neq j, 1 \leq i, j \leq m, 1 \leq k_1, k_2 \leq n$$

adalah lintasan terpendek pada G dari titik x_{ik_1} ke titik x_{jk_2} dengan Panjang 3.

Untuk setiap $u, v \in V(G), d(u, v) \leq 3$. Maka $diam(G) = 3$.

Definisikan pewarnaan-titik w pada graf G sebagai berikut :

$$w: V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, m\}$$

dengan

$$w(u) = \begin{cases} i, & \text{jika } u = v_i, 1 \leq i \leq m \\ 1, & \text{jika } u \text{ titik yang lain di } G \end{cases}$$

Jelas terhadap pewarnaan-titik w graf G terhubung pelangi dengan menggunakan m warna. Sehingga berdasarkan Definisi 3.2,

$$rvc(G) \leq m \tag{1}$$

Klaim : $rvc(G) = m$

Bukti Klaim :

Andaikan $rvc(G) = m - 1$.

Maka ada pewarnaan-titik, namakan w_1 , dengan $m - 1$ warna, sedemikian hingga terhadap w_1 graf G terhubung pelangi.

Akibatnya, ada dua titik berbeda pada K_m dalam G , namakan v_i, v_j dengan $v_i \neq v_j$, mendapat warna yang sama, namakan warna t .

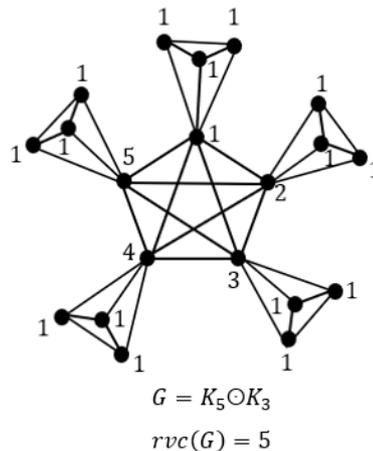
Perhatikan setiap lintasan dari titik x_{ik_1} ke x_{jk_2} pada G , selalu melalui titik-titik v_i dan v_j sebagai titik-titik internal sehingga lintasan tersebut bukan lintasan pelangi terhadap w_1 . Kontradiksi klaim terbukti.

Dari (1) dan Klaim, diperoleh untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 1$,

$$rvc(G) = rvc(K_m \odot K_n) = m$$

Dengan demikian, bukti teorema lengkap ■

Sebagai ilustrasi, pewarnaan titik pelangi graf $G = K_5 \odot K_3$ dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 3.14 Pewarnaan titik pelangi pada graf $G = K_5 \odot K_3$

PENUTUP

SIMPULAN

Dari penjelasan dalam artikel ini, dapat disimpulkan sebagai berikut :

1. Jika graf G terhubung dan nontrivial, maka $rvc(G) \geq diam(G) - 1$
2. Untuk graf K_n dengan $n \geq 2$, diperoleh $rvc(K_n) = 0$
3. Untuk graf bipartit komplet $K_{m,n}$, berlaku $rvc(K_{m,n}) = \begin{cases} 0, & m = n = 1 \\ 1, & m \geq 2 \text{ atau } n \geq 2 \end{cases}$
4. Untuk graf roda W_n berlaku $rvc(W_n) = \begin{cases} 0, & n = 4 \\ 1, & n \geq 5 \end{cases}$
5. Jika W_n^2 adalah graf roda dua lapis dengan $n \geq 3$, maka $rvc(W_n^2) = \begin{cases} 1, & n = 3 \\ 2, & 4 \leq n \leq 6 \\ 3, & 7 \leq n \leq 10 \\ y, & n \geq 11 \end{cases}$
6. Jika K_{n_1, n_2, \dots, n_t} graf multipartit komplet dengan $t \geq 3$, maka $rvc(K_{n_1, n_2, \dots, n_t}) = \begin{cases} 0, & \text{jika } n_i = 1, \forall i, 1 \leq i \leq t \\ 1, & \text{jika } n_i \geq 2, \text{ untuk suatu } i, 1 \leq i \leq t \end{cases}$
7. Jika P_n adalah lintasan dengan n titik, maka $rvc(P_n) = n - 2$
8. Untuk bilangan positif n , graf sisir GS_n berlaku $rvc(GS_n) = n$
9. Jika $U(n_1, n_2, \dots, n_k), k \geq 1$ dan $n_i \geq 1, \forall i, 1 \leq i \leq k$ graf ulat, maka $rvc(U(n_1, n_2, \dots, n_k)) = k$
10. Jika P_n adalah lintasan dengan n titik dan N_k adalah graf kosong dengan k titik dan $k \geq 1$, maka

$$rvc(P_n \odot N_k) = n$$

11. Bilangan keterhubungan titik pelangi graf $P_n \odot K_m$, untuk $n \geq 1$ dan $m \geq 1$ diperoleh

$$rvc(P_n \odot K_m) = n$$

12. Bilangan keterhubungan titik pelangi korona dari dua graf komplet adalah sebagai berikut

$$rvc(K_m \odot K_n) = \begin{cases} 0, m = 1 \text{ dan } n \geq 1 \\ m, m \geq 2 \text{ dan } n \geq 1 \end{cases}$$

Salju ($S_{n,m}$). *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA)*, 4(1), 29–44. <https://doi.org/10.14710/jfma.v4i1.9035>

SARAN

Pada artikel ini dijelaskan mengenai bilangan keterhubungan titik pelangi beberapa kelas graf. Penelitian mengenai bilangan keterhubungan titik pelangi pada graf roda k lapis W_n^k dengan $k \geq 3$, dan graf-graf lainnya dapat dipelajari sebagai saran untuk penelitian selanjutnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Budayasa, K. (2007). *Teori Graph dan Aplikasinya* (4th ed.). Unesa University Press.
- Bustan, A. W., & Salman, A. N. M. (2019). The rainbow vertex connection number of star wheel graphs. *AIP Conference Proceedings*, 2202, 77–81. <https://doi.org/10.1063/1.5141660>
- Chartrand, G., & Zhang, P. (2003). *A First Course In Graph Theory*. In *New York*. Dover Publications, INC.
- Fransiskus, F., Khairiah, A., & Noviani, E. (2020). Dimensi Partisi Pada Graf. *Bimaster: Buletin Ilmiah Matematika, Statistika Dan Terapannya*, 9(1), 189–194. <https://doi.org/10.26418/bbimst.v9i1.38818>
- Glysentia, B., Yundari, Fransiskus, F., & Vilgalita. (2020). Bilangan Terhubung Titik Pelangi Pada Graf Kuadratik Dan Graf Garis Dari Graf Kembang Api. *Bimaster: Buletin Ilmiah Matematika, Statistika Dan Terapannya*, 9(2), 343–350. <https://doi.org/10.26418/bbimst.v9i2.40221>
- Ihwan, M. D., Rahmawati, A., & Sumargono, S. (2014). Kajian bilangan clique graf gear G_n dan graf barbel B_n . *Gamatika*, 5(1), 39–50.
- Joko, Y., Helmi, & Fran, F. (2019). Bilangan Terhubung Pelangi Pada Graf Planter Dan Graf Gurita. *Bimaster: Buletin Ilmiah Matematika, Statistika Dan Terapannya*, 8(1), 29–34. <https://doi.org/10.26418/bbimst.v8i1.30508>
- Li, X., Mao, Y., & Shi, Y. (2014). The strong rainbow vertex-connection of graphs. *Utilitas Mathematica*, 93(January), 213–223.
- Noor, C. A. P., Yahya, L., Nasib, S. K., & Yahya, N. I. (2021). Bilangan Terhubung Pelangi pada Graf