

DINAMIKA MODEL INTERAKSI MANGSA PEMANGSA DENGAN FUNGSI RESPON HOLLING TIPE II, MAKANAN TAMBAHAN, DAN PERILAKU ANTI PEMANGSA

Nafa Lingga Aufaniyah

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : nafa.19010@mhs.unesa.ac.id

Abadi

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : abadi@unesa.ac.id

Abstrak

Penelitian ini membahas model interaksi mangsa pemangsa dengan adanya makanan tambahan dan kemampuan perilaku anti pemangsa pada mangsa menggunakan fungsi respon Holling tipe II. Penelitian ini dilakukan mulai dari studi literature, mengontruksi model, menentukan titik kesetimbangan, menganalisis titik kesetimbangan, simulasi numerik, dan menarik kesimpulan. Dari hasil analisis model diperoleh empat titik kesetimbangan yaitu kepunahan kedua populasi yang tidak stabil, kepunahan pemangsa, dan dua titik dengan eksistensi kedua populasi yang stabil dengan syarat. Berdasarkan hasil analisis yang dilakukan, terdapat perubahan solusi sistem dari titik limit point yang merupakan batas titik E_3 dan E_4 , kemudian dikontinuasi ke kanan menghasilkan dua solusi titik yaitu, titik E_3 stabil hingga titik bifurkasi Hopf ketika $A=0.239884$ dan E_4 tidak stabil hingga $A=0.147059$. setelah terjadi bifukasi hopf terdapat perubahan kestabilan menjadi tidak stabil yang bersamaan dengan limit cycle stabil. Hasil simulasi menunjukkan bahwa makanan tambahan mempengaruhi kestabilan mangsa dan pemangsa meskipun terdapat perilaku anti pemangsa pada mangsa.

Kata Kunci: Holling tipe II, makanan tambahan, perilaku anti pemangsa.

Abstract

This study discusses the interaction model of prey-predator in the presence of additional food and the ability of anti-predator behavior on prey using the type II Holling response function. This research is carried out starting from the study of the literature, constructing models, determining equilibrium points, analyzing equilibrium points, numerical simulation, and drawing conclusion. From the results of the model analysis, four equilibrium points were obtained, namely the extinction of the two unstable populations, the extinction of predators, and two points with the existence of both stable populations with conditions. Based on the results of the analysis carried out, there is a change in the system solution from the limit point which is the boundary point E_3 and E_4 , then it is continued to the right to produce two point solutions, namely, point E_3 is stable to the Hopf bifurcation point when $A = 0.239884$ and E_4 is unstable until $A = 0.147059$. after the hopf bifurcation there is a change in stability to become unstable which coincides with a stable limit cycle. The simulation results show that additional food affects the stability of prey and predators even though there is anti-predator behavior on prey.

Keywords: Holling Type II, Additional food, Anti predator behavior.

PENDAHULUAN

Dalam sistem ekologi, interaksi hubungan antara mangsa dan pemangsa disebut sistem mangsa pemangsa (prey predator), di mana mangsa merupakan hewan yang dimakan, dan pemangsa adalah hewan yang memakan hewan lain untuk mempertahankan hidupnya. Hubungan interaksi antara mangsa pemangsa sangat erat karena kelompok pemangsa tidak dapat hidup tanpa adanya mangsa. Sebaliknya, dalam predasi pemangsa juga

berfungsi sebagai pengontrol kelompok mangsa. Predasi berpengaruh positif terhadap kepadatan pemangsa dan berpengaruh negatif terhadap kepadatan mangsa (Ningrum et al., 2019).

Faktor yang mempengaruhi predasi selain adanya persaingan dan pemanenan adalah adanya sumber makanan tambahan sebagai salah satu strategi untuk mengontrol populasi mangsa (Kusnanto et al., 2017). Keberadaan sumber makanan non-mangsa seperti nektar, serbuk sari, polen bagi hewan generalis dapat menyebabkan koeksistensi mangsa pemangsa yang

stabil dengan biomassa mangsa yang rendah (Prasad & Prasad, 2019). Selain itu, adanya makanan tambahan bagi pemangsa merupakan salah satu cara untuk mengatasi kerugian akibat perilaku anti pemangsa pada mangsa. Dalam beberapa kasus, hama mengadopsi cara untuk mengatasi tekanan predasi yaitu pertahanan kelompok dan perilaku anti pemangsa. Penelitian Prasad & Prasad (2019) mengatakan bahwa suplemen makanan yang tepat dapat menyebabkan penurunan tingkat predasi dan meningkatkan respon numerik pemangsa.

Salah satu contoh masalah yang sesuai dengan keadaan tersebut adalah pengendalian hama *Tetranychus Sp.* terhadap tanaman pertanian. Hal ini bertujuan untuk mengurangi kehancuran tanaman dari populasi *Tetranychus Sp.* (Ratnasari, 2016). Oleh karena itu, pengendalian hayati mulai dipertimbangkan untuk menjadi solusi terbaik bagi pengendalian hama yaitu dengan makanan tambahan pada pemangsa yang berada disekitar habitat/persembunyian mangsa. Pemangsa (*Phytoseiidae*) selain makan *Tetranychus Sp* juga memakan serbuk sari/nektar/polen (Hermawan, 2012). Adanya makanan tambahan pada pemangsa dapat menjaga populasi pemangsa ketika tidak mendapatkan mangsa utama akibat dari perilaku anti pemangsa tersebut. Namun ketika mangsa (*Tetranychus Sp*) dewasa sulit didapatkan, pemangsa masih bisa memangsa hama (*Tetranychus Sp*) kecil dan telurnya jadi pemangsa tetap bisa mengontrol mengurangi populasi hama tersebut.

Pada interaksi mangsa pemangsa di atas, dalam matematika dikenal dengan model Lotka-Volterra. Pada model Lotka-Volterra yang digunakan oleh Mortoja et al. (2018), waktu yang diperlukan pemangsa untuk berburu makanan dan mencerna makanannya tidak diperhatikan. Namun yang terjadi di alam, interaksi mangsa pemangsa memperhitungkan waktu untuk pemangsaan. Oleh karena itu, model Lotka-Volterra dimodifikasi untuk memperhitungkan waktu predasi dan batas konsumsi mangsa oleh pemangsa yang dikenal dengan fungsi respon. Dalam dinamika populasi, fungsi respon adalah jumlah mangsa yang dimangsa per satuan waktu oleh pemangsa sebagai fungsi dari kepadatan mangsa (Mortoja et al., 2018).

Banyak peneliti yang mengembangkan model Lotka-Volterra, diantaranya adalah Saadah, Abadi & Savitri (2020) yang telah melakukan penelitian

terhadap dua spesies makhluk hidup yang berjudul “Bifurkasi Pada Model Interaksi Mangsa Pemangsa Dengan Perilaku Anti Pemangsa”. Dalam penelitian tersebut mengatakan bahwa semakin tinggi perilaku anti pemangsa maka populasi pemangsa semakin cepat menuju kepunahan dan populasi mangsa akan tetap tumbuh sampai ambang batas daya tampung lingkungan. Jika sebaliknya, maka mangsa dan pemangsa dapat hidup berdampingan sampai waktu menuju tak hingga dengan populasi mangsa lebih besar dari populasi pemangsa. Kusnanto et al., (2017) juga telah melakukan penelitian mengenai pengaruh makanan tambahan untuk pemangsa khususnya pengaruh penambahan kuantitas makanan terhadap kestabilan sistem mangsa pemangsa. Penelitian tersebut mengatakan bahwa populasi pemangsa berhasil mengontrol populasi mangsa sampai pada tingkat kepunahan. Dalam sebuah penelitian yang dilakukan oleh Prasad & Prasad (2019) tentang “Qualitative Analysis of Additional Food Provided Predator-Prey System with Anti-Predator Behaviour in Prey” dengan fungsi respon Holling tipe IV, di mana hasil penelitian ini yaitu penggunaan makanan tambahan yang bergizi tinggi dalam mengatasi efek negatif yang disebabkan oleh adaptasi perilaku anti pemangsa pada pemangsa dapat mempertahankan populasi hama atau memusnahkan hama dari ekosistem. Dan tidak hanya pengaruh makanan tambahan yang berkualitas unggul yang bisa meningkatkan predasi pemangsa dan mangsa, namun juga waktu pelepasan sangat penting untuk keberhasilan program pengendalian hayati.

Berdasarkan penelitian terdahulu, maka penulis tertarik untuk melakukan penelitian terhadap interaksi mangsa pemangsa dengan perilaku anti pemangsa dan makanan tambahan pada pemangsa yang menggunakan fungsi respon Holling II karena pemangsa memiliki karakter aktif dalam mencari mangsanya serta diasumsikan bahwa dengan pemberian makanan tambahan di sekitar mangsa yang memiliki perilaku anti pemangsa dapat meningkatkan laju predasi mangsa pemangsa untuk mengurangi hama dalam pertanian. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui peran penting perilaku anti pemangsa dan makanan tambahan dalam mengendalikan hama yang merugikan secara ekonomi dengan menggunakan pengendalian hayati.

KAJIAN TEORI

Sistem Persamaan Diferensial

Suatu persamaan yang memuat turunan-turunan dari fungsi yang tidak diketahui terhadap satu atau lebih variabel bebas. Secara garis besar persamaan diferensial dapat dikelompokkan menjadi dua, yaitu:

- Persamaan diferensial biasa (*ordinary differential equation*) adalah suatu persamaan yang hanya memuat satu variabel bebas dan turunannya dari fungsi yang tidak diketahui, yang biasa disimbolkan dengan $y(x)$ atau $y(t)$ jika variabel bebasnya adalah waktu (t).
Contoh : $y' = \cos x$.
- Persamaan diferensial parsial (*partial differential equation*) adalah persamaan yang memuat dua atau lebih variabel bebas dan turunannya dari fungsi yang tidak diketahui.

$$\text{Contoh : } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

(Kreyszig, 2011)

Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem yang memuat dua atau lebih persamaan diferensial dari fungsi yang tidak diketahui (Boyce & DiPrima, 2012). Secara umum, sistem ini berbentuk :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (1)$$

dengan $x \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathbb{R}^n$ merupakan fungsi t dan x merupakan variabel terikat pada suatu selang waktu t dengan variabel t muncul secara eksplisit di setiap persamaan diferensial.

Sistem Mangsa Pemangsa

Model mangsa pemangsa mempertimbangkan dua spesies yang dinotasikan x sebagai populasi mangsa pada waktu t dan y sebagai populasi pemangsa pada waktu t . Dalam mengontruksikan model interaksi dari dua spesies, dibuat asumsi sebagai berikut:

- Dengan tidak adanya pemangsa, mangsa tumbuh dengan laju sebanding dengan populasi saat ini, dengan demikian $\frac{dx}{dt} = ax$, $a > 0$.
- Dengan tidak adanya mangsa, maka pemangsa mati, dengan demikian $\frac{dy}{dt} = -cy$, $c > 0$.
- Jumlah pertemuan antara mangsa dan pemangsa sebanding dengan kepadatan populasi mereka. Setiap pertemuan tersebut,

cenderung mendorong pertumbuhan pemangsa dan menghambat pertumbuhan mangsa. Dengan demikian laju pertumbuhan pemangsa meningkat dinotasikan dengan γxy , sedangkan tingkat pertumbuhan mangsa menurun dinotasikan dengan $-\beta xy$, di mana γ dan β adalah konstanta positif.

Sebagai konsekuensi dari asumsi ini, kita diarahkan ke sistem persamaan:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} = -cy + \gamma xy \end{cases} \quad (2)$$

konstanta a, c, β , dan γ semuanya bernilai positif. a adalah laju pertumbuhan mangsa dan c adalah laju kematian pemangsa, sedangkan β dan γ adalah ukuran dari efek interaksi antara dua spesies (Boyce & DiPrima, 2012).

Model Pertumbuhan Logistik

Model pertumbuhan logistik secara umum berbentuk sebagai berikut

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right), \quad (3)$$

Variabel $x(t)$ mempresentasikan kepadatan populasi mangsa dan K adalah daya dukung lingkungan populasi mangsa (*carrying capacity*), dengan $K > 0$. Pertumbuhan populasi pada model logistik dibatasi oleh ketersediaan daya dukung lingkungan (Brauer & Chavez, 2011).

Fungsi Respon

Fungsi respon menggambarkan hubungan antara tingkat konsumsi individu dan kepadatan makanan. Dalam dinamika populasi, Holling (1959) mengusulkan bahwa ada tiga jenis fungsi respon yang berbeda, yaitu Holling tipe I, Holling tipe II, dan Holling tipe III dari kepadatan pemangsa ke mangsa yang mengacu pada perubahan kepadatan mangsa yang diserang per satuan waktu tiap pemangsa (Mortoja et al., 2018).

Fungsi respon Holling tipe I menggambarkan hubungan linear pemangsa dalam memakan mangsa dengan kepadatan mangsa dan akan konstan saat pemangsa tidak memakan mangsa. Peningkatan linear menyebabkan fungsi respon Holling tipe I diasumsikan bahwa waktu pemangsa untuk menangkap dan mencerna makanannya dapat diabaikan. Jika $c(x)$ merupakan fungsi respon maka

persamaan fungsi respon Holling tipe I seperti berikut (Perez, 2012):

$$c(x) = mx,$$

dengan c menunjukkan fungsi respon Holling tipe I dan m sebagai laju penangkapan mangsa oleh pemangsa.

Fungsi respon Holling tipe II menggambarkan situasi di mana jumlah mangsa yang dikonsumsi per pemangsa yang semula meningkat dengan cepat seiring dengan meningkatnya kepadatan mangsa tetapi kemudian menurun dan akan konstan jika pemangsa mencapai titik kejenuhan dalam memangsa. Fungsi respon Holling tipe II diasumsikan bahwa pemangsa akan membutuhkan waktu untuk menangani mangsanya dan pemangsa memiliki karakter aktif dalam mencari mangsanya. Jika x merupakan fungsi respon maka persamaan fungsi respon Holling tipe II diberikan seperti berikut (Perez, 2012):

$$c(x) = \frac{mx}{A+x}, \tag{4}$$

dengan A merupakan tingkat kejenuhan dan m laju pemangsaan mangsa oleh pemangsa.

Fungsi respon Holling tipe III menyerupai Holling tipe II dalam memiliki batas atas konsumsi mangsa, tetapi berbeda dalam respon pemangsa terhadap mangsa yang menurun pada kepadatan mangsa rendah, pemangsa belum mempunyai pengalaman yang cukup untuk menangkap mangsa, sehingga pemangsa membutuhkan waktu untuk menangkap mangsanya. Fungsi respon Holling tipe III diasumsikan bahwa pemangsa akan mencari mangsa yang lain ketika mangsa yang dimakan mulai berkurang. Jika $c(x)$ merupakan fungsi respon maka persamaan fungsi respon Holling tipe III diberikan seperti berikut (Perez, 2012):

$$c(x) = \frac{mx^2}{A+x^2}, \tag{5}$$

dengan A merupakan tingkat kejenuhan dan m laju pemangsaan mangsa oleh pemangsa. (Rodriguez-Perez, 2012)(Rodriguez-Perez, 2012)

Fungsi respon Holling tipe IV atau yang disebut dengan fungsi respon Beddington-DeAngelis yang diusulkan oleh Beddington-DeAngelis pada tahun 1975 yang menjelaskan bahwa pemangsaan tidak hanya bergantung pada populasi mangsa tetapi juga pada populasi pemangsa serta adanya batasan proteksi lingkungan. Jika $c(x, y)$ merupakan fungsi respon maka persamaan fungsi respon Beddington-DeAngelis diberikan seperti berikut (Haque, 2011):

$$c(x, y) = \frac{mx}{Ax+By+C}, \tag{6}$$

dengan m rata-rata pemangsaan mangsa oleh pemangsa, A waktu penanganan mangsa oleh pemangsa, B dampak gangguan timbal balik oleh pemangsa, dan C tingkat kejenuhan pemangsa saat memangsa.

Titik Kesetimbangan

Suatu sistem yang tidak berubah sepanjang waktu dapat disebut setimbang. Kesetimbangan pada populasi dapat diartikan sebagai jumlah populasi tersebut tidak berubah sepanjang waktu.

Diberikan sistem persamaan diferensial sebagai berikut :

$$\dot{x} = f(x), x^* \in \mathbb{R}^n, \tag{7}$$

solusi titik kesetimbangan adalah solusi yang tetap konstan meskipun waktu berubah. Nilai kesetimbangan dari sistem persamaan (7) diperoleh $\dot{x} = 0$. Titik x^* disebut titik kesetimbangan, jika $f(x^*) = 0$. Titik x^* disebut juga solusi stasioner, titik kritis, titik ekuilibrium, atau titik tetap (Logan, 2015).

Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan

Analisis kestabilan sistem persamaan diferensial nonlinear dilakukan melalui pelinearan untuk menganalisis karakteristik dari suatu sistem dinamik. Menurut Boyce & DiPrima (2012) proses mengubah sistem persamaan non linear menjadi sistem linear merupakan bentuk linearisasi yaitu dengan matriks Jacobian sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y), \frac{dy}{dt} = G(x, y), \tag{8}$$

$$J = \begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Setelah dilakukan linierisasi kemudian mencari nilai eigen, diberikan bentuk persamaan (8) jika A berukuran $n \times n$, maka vektor tak nol $x \in \mathbb{R}^n$ disebut vektor eigen dari A jika Ax adalah kelipatan scalar dari x , yakni (Anton & Rorres, 2010)

$$Ax = \lambda x \tag{9}$$

Teorema 2.1 (Anton & Rorres, 2010) Misalkan A merupakan matriks $n \times n$ dengan komponen A merupakan bilangan real. Pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen satu sama lain:

- a. λ adalah nilai eigen dari A .
- b. Sistem persamaan $(A - \lambda I)x = 0$ mempunyai solusi tak trivial.
- c. Jika $\lambda \in \mathbb{R}$, maka ada vektor tak nol x di dalam \mathbb{R}^n sehingga $Ax = \lambda x$

d. λ adalah penyelesaian dari persamaan karakteristik $det(A - \lambda I) = 0$ dengan I merupakan matriks identitas. Sehingga persamaan mempunyai solusi tak nol jika dan hanya jika

$$det(A - \lambda I) = |A - \lambda I| = 0,$$

di mana agar sistem persamaan linier $(A - \lambda I)x = 0$ menghasilkan solusi tak trivial maka vektor eigen tidak sama dengan nol, yaitu dengan syarat matriks $|A - \lambda I|$ tidak mempunyai invers dengan cara harus ada pemecah tak nol.

Analisis kestabilan lokal solusi sistem untuk masing-masing titik kesetimbangan berdasarkan nilai eigen yang diperoleh disimbolkan dengan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Selanjutnya, diberikan kriteria stabilitas sistem linear untuk memudahkan menganalisa kestabilan model di sekitar titik kesetimbangan dengan melihat nilai eigen, yaitu sebagai berikut:

Tabel 1. Kriteria stabilitas sistem linear $x' = Ax$ dengan $det(A - \lambda I) = 0$ dan $det A \neq 0$

Nilai Eigen	Jenis Titik	Kestabilan Titik Kesetimbangan
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Node	- Tidak stabil
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$		- Asimtotik stabil
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Saddle Point	- Tidak stabil
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Proper Node atau Improper Node	- Tidak stabil
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$		- Asimtotik stabil
$\lambda_1, \lambda_2 = r \pm i\mu$	Spiral Point	
$r > 0$		- Tidak stabil
$r < 0$		- Asimtotik stabil
$\lambda_1 = i\mu, \lambda_2 = -i\mu$	Center	- Stabil

(Boyce & DiPrima, 2012)

Selain itu, terdapat pula metode untuk menyelidiki kestabilan sistem apabila nilai eigen dari persamaan karakteristik sistem sulit ditentukan, yaitu dengan menunjukkan tanda bagian real negatif dari nilai eigen tanpa menghitung akar-akar persamaan karakteristik secara langsung yang disebut dengan Kriteria Routh-Hurwitz.

Diberikan persamaan karakteristik dengan derajat n sebagai berikut:

$$P(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + a_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \tag{10}$$

Kriteria kestabilan Routh menekankan pada koefisien-koefisien persamaan karakteristik yang dituangkan dalam bentuk runtun (array). Berdasarkan persamaan karakteristik (10), dibentuk dalam tabel berikut:

Tabel 2. Bentuk tabel Routh-Hurwitz

λ^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...
λ^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...
λ^{n-2}	b_1	b_2	b_3	...
...	...			
λ^0	P			

dengan $n = 1, 2, 3, \dots, k$ didefinisikan sebagai berikut :

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}, b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1},$$

$$b_n = \frac{a_1 a_{2n} - a_0 a_{2n+1}}{a_1}, c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1},$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}, c_n = \frac{b_1 a_{2n+1} - a_1 b_{n+1}}{b_1}.$$

Tabel Routh Hurwitz tersebut dilanjutkan mendatar dan menurun hingga diperoleh elemen-elemen pada kolom pertama bernilai nol. Suatu sistem dapat dikatakan stabil jika bagian real dari nilai eigennya bernilai negatif yang ditunjukkan dengan tidak terjadi perubahan pada setiap elemen kolom pertama pada tabel Routh-Hurwitz (Olsder & Waode, 1998).

Bifurkasi

Bifurkasi adalah perubahan kestabilan atau struktur topologi sistem karena parameter melewati nilai bifurkasi. Bifurkasi terdiri dari dua macam yaitu bifurkasi lokal dan bifurkasi global. Bifurkasi lokal terjadi jika perubahan perilaku dinamik dari sistem terjadi disekitar titik kesetimbangan. Bifurkasi global terjadi secara tiba-tiba dalam skala yang besar pada sistem dinamik (Lynch, 2010). Bifurkasi lokal terdiri dari 4 jenis, antara lain:

Bifurkasi *saddle node* diwakili persamaan berikut,

$$\dot{u} = \mu - u, \dot{\mu} = 0.$$

Jika $\mu = 0$, tidak ada solusi titik kesetimbangan. Pada titik $\mu = 0$ ada dua solusi kesetimbangan bercabang, stabil dan tidak stabil.

Bifurkasi transkritikal diwakili persamaan berikut,

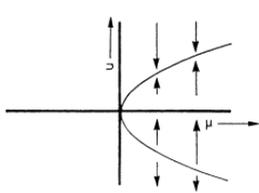
$$\dot{u} = \mu u - u^2, \dot{\mu} = 0.$$

Selain titik (0,0) selalu ada dua solusi kesetimbangan dengan pertukaran stabilitas ketika melewati $\mu = 0$. Bifurkasi *Pitchfork* diwakili persamaan berikut,

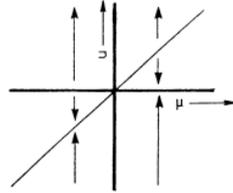
$$\dot{u} = \mu u - \mu^3, \dot{\mu} = 0.$$

Jika $\mu \leq 0$, ada satu solusi titik kesetimbangan, $u = 0$, yang stabil. Jika $\mu > 0$, ada tiga solusi kesetimbangan, dimana $u = 0$ tidak stabil, dan dua solusi yang bercabang di $\mu = 0$ bersifat stabil.

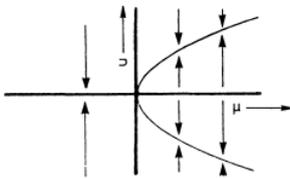
Bifurkasi *Hopf* ditandai dengan munculnya nilai eigen imajiner murni pada pelinieran sistem.



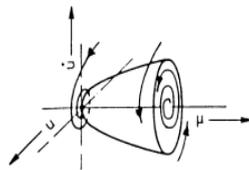
Gambar 1. *Saddle node*



Gambar 2. *Transkritikal*



Gambar 3. *Pitchfork*



Gambar 4. *Hopf*

Makanan Tambahan

Makanan tambahan merupakan bentuk makanan alternatif yang tersedia di alam sebagai makanan pendukung bagi hewan. Dalam ekosistem, pemangsa dan mangsa tidak hanya bergantung pada mangsa utama, namun juga perlu adanya makanan tambahan sebagai bentuk makanan alternatif ketika mangsa sulit ditemukan atau mengalami penurunan, agar populasi pemangsa sebagai pengendali hayati tetap terjaga.

Sumber makanan tambahan bisa berupa spesies non-hama yang bersifat generalis yaitu hewan yang memakan non-mangsa yang berasal dari tumbuhan seperti serbuk sari, nektar, polen, embun madu, dll (Prasad & Prasad, 2019). Di samping tersedianya sumber makanan tersebut, Hal lain yang perlu dipertimbangkan kuantitas dan kualitas dari makanan tambahan yang menjadi peran penting dalam pengendalian hama. Oleh karena itu dalam proses predasi diperlukan pengendalian hama dengan mediasi makanan.

Perilaku Anti Pemangsa

Setiap hewan memiliki bentuk pertahanan diri untuk keberlangsungan hidupnya. Dalam kenyataannya di alam, tidak semua mangsa ketika bertemu pemangsa itu tertangkap dan termangsa. Perilaku mangsa yang berhasil meloloskan diri dan melawan pemangsa dikenal sebagai perilaku anti pemangsa (Mortoja et al., 2018).

Bentuk mekanisme pertahanan diri hewan bermacam-macam yaitu kamuflase (warna pelindung), thanatosis (bermain mati), tipu daya, fitur fisik, fitur kimia, dan panggilan peringatan. Perubahan perilaku pemangsa dan mangsa dapat memengaruhi perubahan sumber daya per kapita karena mengurangi keberhasilan predasi. Jadi perubahan adaptasi sangat penting bagi pemangsa untuk mencari dan menangkap mangsa dengan lebih mudah (Barbosa & Castellanos, 2005).

METODE

Model interaksi mangsa pemangsa yang dikaji adalah model mangsa pemangsa dengan fungsi respon Holling tipe II, makanan tambahan, dan perilaku anti pemangsa. Berikut ini adalah tahapan dalam rancangan penelitian:

1. Konstruksi Model
2. Analisis Titik Kesetimbangan
Analisis titik kesetimbangan dengan mengenkalkan ruas kanan masing-masing persamaan.
3. Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan
Dilakukan berdasarkan kriteria nilai eigen dari matriks Jacobian. Setelah siste linier, kemudian mensubstitusikan titik kesetimbangan pada matriks Jacobian. Kemudian diperoleh matriks baru dan mencari nilai eigen sistem. Dan apabila kestabilan sistem apabila nilai eigen dari persamaan karakteristik sistem sulit ditentukan maka digunakan kriteria Routh Hurwitz.
4. Simulasi Numerik
Simulasi numerik sistem mangsa pemangsa menggunakan *Software Matlab R2023a*. Simulasi numerik dilakukan untuk melihat kesesuaian hasil perhitungan analisis kestabilan lokal masing-masing solusi sistem. Hasil simulasi numerik ditampilkan dalam potret fase. Kontinuasi numerik melalui

diagram bifurkasi mengilustrasikan perilaku solusi sistem ketika nilai parameter makanan tambahan diubah-ubah.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Konstruksi Model Matematika Interaksi Mangsa Pemangsa Dengan Fungsi Respon Holling Tipe II, Makanan Tambahan, Dan Perilaku Anti Pemangsa

Sifat pemangsa yang aktif bergerak menjadi alasan kemungkinan mendapatkan target mangsa lebih dari satu atau beralih ke sumber makanan lainnya (Aini & Savitri, 2021). Hal ini karena populasi mangsa yang memiliki perilaku anti pemangsa sehingga pemangsa membutuhkan makanan tambahan sebagai sumber makanan jika tidak mendapatkan mangsa utama.

Asumsi yang digunakan yaitu populasi mangsa tumbuh mengikuti model pertumbuhan logistic, mangsa memiliki perilaku anti pemangsa, dan adanya makanan tambahan bagi pemangsa ketika tidak mendapatkan mangsa utama.

Hasil konstruksi model baru mangsa pemangsa dengan fungsi respon Holling tipe II, makanan tambahan, dan perilaku anti pemangsa yaitu sebagai berikut :

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{cxy}{a + \alpha\mu z + x} \tag{11a}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{b(x + \mu z)y}{a + \alpha\mu z + x} - my - \delta xy \tag{11b}$$

kemudian dilakukan *scalling* untuk mempermudah proses perhitungan. Bentuk *scalling* sistem persamaan (11) sebagai berikut:

$$\frac{dX}{dT} = X \left(1 - \frac{X}{\gamma}\right) - \frac{XY}{1 + \alpha A + X} \tag{12a}$$

$$\frac{dY}{dT} = \frac{\beta(X+A)Y}{(1 + \alpha A + X)} - \epsilon Y - \mu XY \tag{12b}$$

dengan $x = aX$, $t = \frac{T}{r}$, $y = \frac{arY}{c}$, $A = \frac{\mu z}{a}$, $k = ay$, $b = \beta r$, $m = \epsilon r$, $\delta = \frac{\mu r}{a}$. Semua parameter diberikan syarat kondisi awal bernilai positif.

Parameter β merepresentasikan laju pertumbuhan maksimum pemangsa, parameter α merepresentasikan koefisien normalisasi yang berkaitan dengan kepadatan mangsa dan pemangsa dengan lingkungan, parameter ϵ merepresentasikan laju kematian pemangsa, parameter A merepresentasikan adanya penambahan makanan pada pemangsa, parameter γ merepresentasikan daya dukung lingkungan (*carrying capacity*), parameter μ merepresentasikan adanya perilaku anti pemangsa pada mangsa saat terjadi interaksi.

Analisis Titik Kesetimbangan

Setelah penyederhanaan model, dilakukan penentuan titik kesetimbangan dengan mengenkolkan ruas kanan pada persamaan (12),

$$X^* \left(1 - \frac{X^*}{\gamma}\right) - \frac{X^*Y^*}{1 + \alpha A + X^*} = 0, \tag{13}$$

$$\frac{\beta(X^*+A)Y^*}{(1 + \alpha A + X^*)} - \epsilon Y^* - \mu X^*Y^* = 0, \tag{14}$$

Dari persamaan (13) diperoleh,

$$X^* = 0, \tag{13a}$$

atau

$$Y^* = \frac{(\gamma - X^*)(1 + \alpha A + X^*)}{\gamma}, \tag{13b}$$

Sedangkan dari persamaan (14) diperoleh,

$$Y^* = 0, \tag{14a}$$

atau

$$\beta(X^* + A) Y^* = Y^*(\epsilon + \mu X^*)(1 + \alpha A + X^*) \tag{14b}$$

Maka, titik kesetimbangan dari model interaksi mangsa pemangsa dengan fungsi respon Holling tipe II pada persamaan (12) yaitu,

1. Titik kesetimbangan $E_1(0,0)$ diperoleh dari persamaan (13a) dan (14a) yang menggambarkan keadaan populasi mangsa dan pemangsa mengalami kepunahan karena tidak adanya sumber makanan baik mangsa utama atau makanan tambahan.
2. Titik kesetimbangan $E_2(\gamma, 0)$ diperoleh dari persamaan (14a) dan (13) yang menggambarkan keadaan hanya populasi mangsa saja yang bertahan hidup, sedangkan populasi pemangsa mengalami kepunahan akibat dari perilaku anti pemangsa dan kurangnya kemampuan dalam mendeteksi makanan tambahan.
3. Titik Kesetimbangan $E_3(X^*, Y^*)$ menggambarkan kondisi ketika populasi mangsa dan populasi pemangsa hidup berdampingan atau keduanya tidak mengalami kepunahan saat $X \neq 0$ dan $Y \neq 0$. Penentuan titik kesetimbangan diperoleh dari substitusi persamaan 4.6b ke persamaan 4.5b, tetapi dilakukan dengan penentuan nilai X dari persamaan 4.6b terlebih dahulu dan diperoleh,

$$0 = \mu X^2 + (A\alpha\mu - \beta + \epsilon + \mu)X + A\alpha\epsilon - \beta A + \epsilon. \tag{15}$$
 sehingga akar-akar yang dihasilkan adalah

$$X_1^* = -\frac{(p - \sqrt{q})}{2\mu}, X_2^* = -\frac{(p + \sqrt{q})}{2\mu}$$

Dengan $p = A\alpha\mu - \beta + \varepsilon + \mu$ dan $q = \varepsilon^2 + (-2A\alpha\mu - 2\beta - 2\mu)\varepsilon + A^2\mu^2\alpha^2 + 2A\mu(\mu - \beta)\alpha + 4A\mu\beta + (\mu - \beta)^2$.

Kemudian mensubstitusikan $X_{1,2}^*$ ke persamaan (13b) diperoleh,

$$Y_1^* = \frac{(2\gamma\mu + p - \sqrt{q})(2A\alpha\mu - p + \sqrt{q} + 2\mu)}{4\mu^2\gamma}, Y_2^* = \frac{(2\gamma\mu + p + \sqrt{q})(2A\alpha\mu - p + \sqrt{q} + 2\mu)}{4\mu^2\gamma}$$

Titik kesetimbangan E^* bernilai real positif, jika $E_3(X_1^*, Y_1^*)$ dengan syarat $p < \sqrt{q}$, $E_4(X_2^*, Y_2^*)$ dengan syarat $p < -\sqrt{q}$ dan syarat nilai q yaitu $\varepsilon^2 + A^2\mu^2\alpha^2 + 2A\alpha\mu^2 + 4A\mu\beta + \mu^2 + \beta^2 > (2A\alpha\mu + 2\beta + 2\mu)\varepsilon + 2A\alpha\beta\mu + 2\beta\mu$. Titik kesetimbangan E^* disebut titik kesetimbangan interior, yaitu titik ketika kedua populasi mangsa dan pemangsa hidup berdampingan.

Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan

Untuk mendapatkan kestabilan dari masing-masing titik kesetimbangan maka dilakukan pelinieran. Kestabilan sistem pada setiap titik kesetimbangan ditentukan dengan mencari nilai eigen atau akar-akar dari persamaan karakteristik.

$$F(X, Y) = X \left(1 - \frac{X}{\gamma}\right) - \frac{XY}{1 + \alpha A + X}$$

$$G(X, Y) = \frac{\beta(X+A)Y}{(1 + \alpha A + X)} - \varepsilon Y - \mu XY$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial X} & \frac{\partial F}{\partial Y} \\ \frac{\partial G}{\partial X} & \frac{\partial G}{\partial Y} \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2X}{\gamma} - \frac{Y}{1 + \alpha A + X} + \frac{Y}{(1 + \alpha A + X)^2} & -\frac{X}{1 + \alpha A + X} \\ \frac{\beta Y}{1 + \alpha A + X} - \frac{\beta(X+A)Y}{(1 + \alpha A + X)^2} - \mu Y & \frac{\beta(X+A)}{1 + \alpha A + X} - \varepsilon - \mu X \end{pmatrix} \quad (16)$$

1. Kestabilan di titik setimbang kepunahan mangsa pemangsa (E_1)

Matriks jacobian model (3) dan (4) pada $E_1(0,0)$ adalah :

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\beta A}{1 + \alpha A} - \varepsilon \end{pmatrix}$$

Berdasarkan matriks jacobian maka diperoleh persamaan karakteristik di titik keseimbangan E_1 sebagai berikut :

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & \frac{\beta A}{1 + \alpha A} - \varepsilon - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(1 - \lambda) \left(\frac{\beta A}{1 + \alpha A} - \varepsilon - \lambda \right) = 0$$

diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = \frac{\beta A}{1 + \alpha A} - \varepsilon$.

Karena $\lambda_1 = 1 > 0$ dan λ_2 ,

i) Negatif jika $A < \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha\varepsilon}$, maka titik kesetimbangan E_0 saddle tidak stabil

ii) Positif jika $A > \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha\varepsilon}$, maka titik kesetimbangan E_0 node yang tidak stabil.

2. Kestabilan di titik setimbang kepunahan predator (E_2)

Matriks jacobian model (3) dan (4) pada $E_2(\gamma, 0)$ adalah :

$$J(E_2) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{\gamma}{1 + \alpha A + \gamma} \\ 0 & \frac{\beta(\gamma + A)}{1 + \alpha A + \gamma} - \varepsilon - \mu\gamma \end{pmatrix}$$

Berdasarkan matriks jacobian maka diperoleh persamaan karakteristik di titik keseimbangan E_2 sebagai berikut :

$$\det \begin{pmatrix} -1 - \lambda & -\frac{\gamma}{1 + \alpha A + \gamma} \\ 0 & \frac{\beta(\gamma + A)}{1 + \alpha A + \gamma} - \varepsilon - \mu\gamma - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(-1 - \lambda) \left(\frac{\beta(\gamma + A)}{1 + \alpha A + \gamma} - \varepsilon - \mu\gamma - \lambda \right) = 0$$

diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = -1$ dan $\lambda_2 = \frac{\beta(\gamma + A)}{1 + \alpha A + \gamma} - \varepsilon - \mu\gamma$. Karena $\lambda_1 = -1 < 0$ dan λ_2 ,

i) Negatif jika $A < \frac{\mu\gamma^2 + \mu\gamma + \varepsilon\gamma - \beta\gamma + \varepsilon}{\beta - \alpha\varepsilon - \mu\alpha\gamma}$, maka titik kesetimbangan E_2 node yang stabil.

ii) Positif jika $A > \frac{\mu\gamma^2 + \mu\gamma + \varepsilon\gamma - \beta\gamma + \varepsilon}{\beta - \alpha\varepsilon - \mu\alpha\gamma}$, maka titik kesetimbangan E_2 saddle tidak stabil.

3. Kestabilan di titik kesetimbangan kedua populasi berinteraksi (E_3)

Matriks Jacobian model (3) dan (4) pada $E_3(X_1^*, Y_1^*)$ adalah :

$$X_1^* = -\frac{(p - \sqrt{q})}{2\mu},$$

$$Y_1^* = \frac{(2\gamma\mu + p - \sqrt{q})(2A\alpha\mu - p + \sqrt{q} + 2\mu)}{4\mu^2\gamma}$$

Bentuk matriks Jacobian $E_3(X_1^*, Y_1^*)$ dapat ditulis,

$$J(E_3) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

dengan,

$$a_{11} = \frac{((\mu\gamma + p - \sqrt{q})(2A\alpha\mu - p + \sqrt{q} + 2\mu) + (2\gamma\mu + p - \sqrt{q})(p - \sqrt{q} - 2A\alpha\mu))}{(2A\alpha\mu + \sqrt{q} - p + 2\mu)2\mu\gamma}$$

$$a_{12} = \frac{(p - \sqrt{q})}{2\mu + 2A\alpha\mu - p + \sqrt{q}}$$

$$a_{21} = \frac{(2\beta\gamma\mu + \beta(p - \sqrt{q}))(2\mu + p - \sqrt{q} + 2A\mu) + (4\mu^3\gamma + 2\mu^2p - 2\mu^2\sqrt{q})\left(1 + A\alpha - \frac{1}{2\mu}(p - \sqrt{q})\right)^2}{(2A\alpha\mu + \sqrt{q} - p + 2\mu)2\mu\gamma}$$

$$a_{22} = \frac{(2A\beta\mu - \beta(p - \sqrt{q}) + (2\mu + 2A\alpha\mu - p + \sqrt{q})\left(\frac{1}{2}(p - \sqrt{q}) - \varepsilon\right))}{2\mu + 2A\alpha\mu - p + \sqrt{q}}$$

Kemudian mencari nilai eigen E_3 dengan $\det(J - \lambda I) = 0$ didapat persamaan karakteristik,

$$\lambda^2 + \omega_1\lambda + \omega_2 = 0,$$

dengan $\omega_1 = -(a_{11} + a_{22}), \omega_2 = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Berdasarkan kriteria Routh Hurwitz, titik kesetimbangan E_3 dikatakan stabil asimtotik jika semua elemen pertama pada tabel Routh Hurwitz tidak berubah tanda dengan syarat $\omega_1 > 0$ dan $\omega_2 > 0$.

4. Kestabilan di titik kesetimbangan kedua populasi berinteraksi (E_4)

$$X_2^* = -\frac{(p+\sqrt{q})}{2\mu},$$

$$Y_2^* = \frac{(2\gamma\mu+p+\sqrt{q})(2A\alpha\mu-p-\sqrt{q}+2\mu)}{4\mu^2\gamma}.$$

Bentuk matriks Jacobian $E_4(X_2^*, Y_2^*)$ dapat ditulis,

$$J(E_4) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

dengan,

$$a_{11} = \frac{((\mu\gamma+p+\sqrt{q})(2A\alpha\mu-p-\sqrt{q}+2\mu)+(2\gamma\mu+p+\sqrt{q})(p+\sqrt{q}-2A\alpha\mu))}{(2A\alpha\mu-\sqrt{q}-p+2\mu)2\mu\gamma},$$

$$a_{12} = \frac{(p+\sqrt{q})}{2\mu+2A\alpha\mu-p-\sqrt{q}},$$

$$a_{21} = \frac{(2\beta\gamma\mu+\beta(p+\sqrt{q}))(2\mu+p+\sqrt{q}+2A\mu)+(4\mu^3\gamma+2\mu^2p+2\mu^2\sqrt{q})(1+A\alpha-\frac{1}{2\mu}(p+\sqrt{q}))^2}{(2A\alpha\mu-\sqrt{q}-p+2\mu)2\mu\gamma},$$

$$a_{22} = \frac{2A\beta\mu-\beta(p+\sqrt{q})+(2\mu+2A\alpha\mu-p-\sqrt{q})(\frac{1}{2}(p+\sqrt{q})-\epsilon)}{2\mu+2A\alpha\mu-p-\sqrt{q}}.$$

Kemudian mencari nilai eigen E_4 dengan $det(J - \lambda I) = 0$ didapat persamaan karakteristik,

$$\lambda^2 + \omega_1\lambda + \omega_2 = 0,$$

dengan $\omega_1 = -(a_{11} + a_{22}), \omega_2 = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Berdasarkan kriteria Routh Hurwitz, titik kesetimbangan E_3 dikatakan stabil asimtotik jika semua elemen pertama pada tabel Routh Hurwitz tidak berubah tanda dengan syarat $\omega_1 > 0$ dan $\omega_2 > 0$.

Simulasi Numerik

Simulasi numerik digunakan untuk melihat kesesuaian dengan hasil analisis yang telah dilakukan. Simulasi dilakukan menggunakan software Pplane dan Matcont Matlab R2022a yang menampilkan gambar dinamika model mangsa pemangsa dengan makanan tambahan dan perilaku anti pemangsa. Berikut merupakan parameter yang digunakan dalam simulasi numerik.

Parameter	Keterangan	Nilai	Sumber
α	Rasio antara waktu penanganan terhadap	0.2	Asumsi

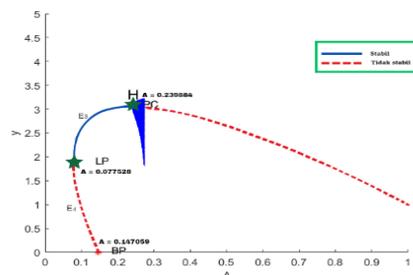
	makanan tambahan dan mangsanya		
β	Laju pertumbuhan maksimum pemangsa	0.5	Prasad, 2019.
γ	Daya dukung lingkungan	10	Ali Kusnanto, 2017
ϵ	Laju kematian pemangsa	0.4	Prasad, 2019
μ	Perilaku anti pemangsa	0.006	Asumsi
A	Makanan tambahan	0.14	Asumsi

Berdasarkan nilai parameter yang digunakan pada tabel 4.1 terdapat empat titik kesetimbangan, yaitu

$E_1(0,0), E_2(10,0), E_3(5.751651755, 2.880232164)$, dan $E_4(9.887014912, 0.1233233919)$. Berdasarkan analisis untuk syarat eksistensi titik kesetimbangan interior E_3 terpenuhi ketika $p < \sqrt{q}$ dan E_4 terpenuhi ketika $p < -\sqrt{q}$ diperoleh $-0.093832 < 0.02481217846$ dan $-0.093832 < -0.02481217846$.

Selanjutnya, dalam penelitian ini akan dilakukan kontinuitas terhadap nilai parameter makanan tambahan yang bertujuan untuk melihat perubahan perilaku sistem akibat adanya makanan tambahan pada pemangsa. Proses kontinuitas parameter dilakukan menggunakan Matcont pada software Matlab R2022a.

Simulasi model mangsa pemangsa dengan fungsi respon Holling tipe II, makanan tambahan, dan perilaku anti pemangsa pada persamaan 4.1 dan 4.2 dengan menjalankan A , terjadi perubahan perilaku kestabilan dari sistem yang dapat ditunjukkan pada diagram bifurkasi berikut :



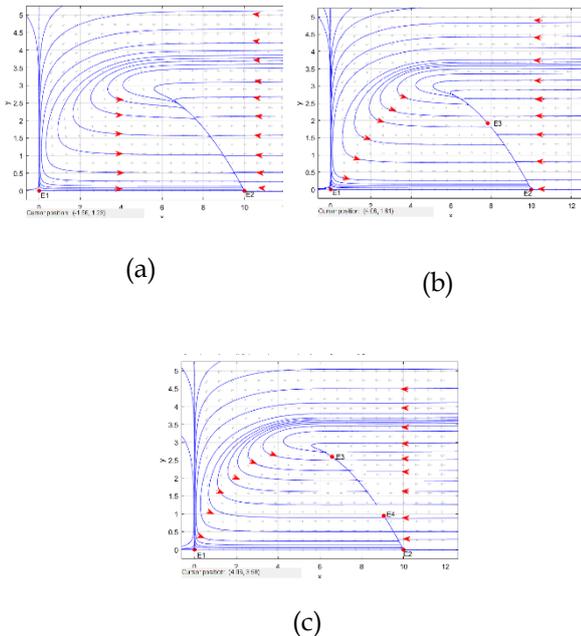
Gambar 5. Diagram Bifurkasi Y terhadap A

Gambar 5, menunjukkan keseluruhan perubahan kestabilan dari sistem akibat adanya perubahan terhadap nilai parameter A . Perubahan kestabilan terjadi dari titik LP (*Limit Point*) yaitu batas kestabilan titik kesetimbangan E_3 dan E_4 ketika $A = 0.077528$ yang merupakan titik bifurkasi *saddle node*.

Perubahan kestabilan setelah kontinuitas terdapat dua solusi kestabilan, yaitu titik kesetimbangan E_3 yang dikontinuasi maju menghasilkan titik *nodal sink* yang stabil sampai titik $A = 0.239884$ yang merupakan titik *Hopf* dan dikontinuasi mundur titik kesetimbangan E_4 menjadi tidak stabil sampai titik $A = 0.147059$ yang merupakan titik BP (*Branch Point*).

Perubahan kestabilan setelah bifurkasi *Hopf* berubah dari stabil dengan titik *nodal sink* menjadi tidak stabil yang bersamaan dengan solusi *limit cycle*.

Perilaku kestabilan model sistem interaksi mangsa pemangsa dengan fungsi respon Holling tipe II, makanan tambahan, dan perilaku anti pemangsa diperjelas di masing-masing titik kesetimbangan, yang akan digambarkan dalam potret fase sebagai berikut :



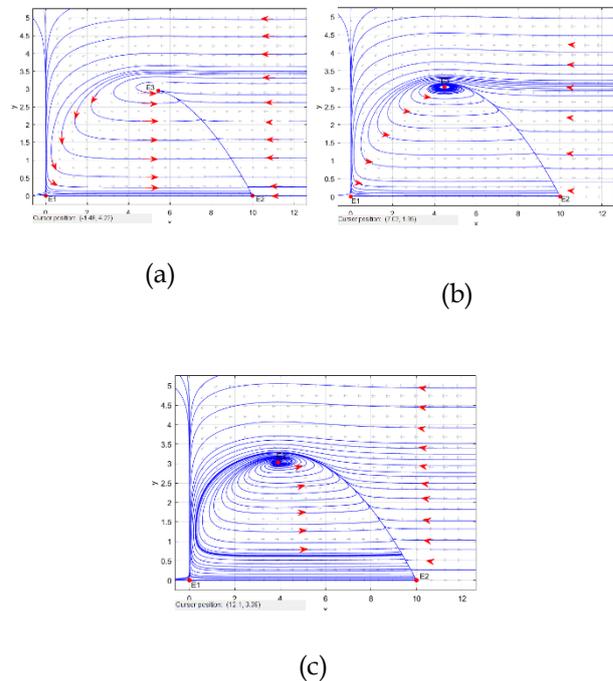
Gambar 6. (a) Potret fase sistem di $A = 0.02$ (b) Potret fase sistem di $A = 0.077528$ (c) Potret fase sistem di $A = 0.1$

Gambar 6a, menjelaskan bahwa ketika $A = 0.02$ tidak ada solusi kesetimbangan interior dan hanya terdapat dua solusi titik kesetimbangan yaitu $E_1(0,0)$ dengan jenis titik kesetimbangan *saddle point* dan bersifat tidak stabil dan $E_2(10,0)$ dengan jenis titik kesetimbangan *nodal sink* dan bersifat stabil.

Gambar 6b, menjelaskan bahwa ketika $A = 0.077528$ terdapat satu solusi titik kesetimbangan interior yaitu $E_3(7.823576283, 1.923758745)$ tepat di titik bifurkasi *saddle node* dan $E_2(10,0)$ dengan jenis titik kesetimbangan *nodal sink* dan bersifat stabil.

Gambar 6c, menjelaskan bahwa ketika $A = 0.1$ terdapat dua solusi titik kesetimbangan interior yaitu di $E_3(6.583221331, 2.597852446)$ dengan jenis titik *nodal sink* yang bersifat stabil dan $E_4(9.063445335, 0.9443697764)$ dengan jenis titik kesetimbangan *saddle point* dan bersifat tidak stabil, sedangkan titik kesetimbangan $E_1(0,0)$ bersifat tidak stabil dengan jenis *saddle point* dan $E_2(10,0)$ dengan jenis titik kesetimbangan *nodal sink* dan bersifat stabil.

Hal ini menunjukkan bahwa kestabilan ekosistem terjadi ketika populasi mangsa mengalami kepunahan dan terjadi juga ketika mangsa dan pemangsa hidup berdampingan dengan adanya makanan tambahan dan perilaku anti pemangsa pada mangsa.



Gambar 7. (a) Potret fase sistem di $A = 0.16$ (b) Potret fase sistem di $A = 0.239884$ (c) Potret fase sistem di $A = 0.3$

Gambar 7a, menjelaskan bahwa ketika $A = 0.1$ terdapat satu solusi titik kesetimbangan interior yaitu di $E_3(5.441615804, 2.950922797)$ dengan jenis titik *nodal sink* yang bersifat stabil, sedangkan titik kesetimbangan $E_1(0,0)$ bersifat tidak stabil dengan

jenis *saddle point* dan $E_2(10,0)$ dengan jenis titik kesetimbangan *nodal sink* dan bersifat stabil.

Gambar 7b, menjelaskan bahwa ketika $A = 0.239884$ yaitu tepat di titik terjadinya bifurkasi *Hopf*, terdapat satu solusi titik kesetimbangan interior, yaitu $E_3(4.476016024, 3.051444784)$ dengan jenis titik spiral *sink* yang stabil, namun dalam waktu yang lama. Sedangkan titik kesetimbangan $E_1(0,0)$ dan $E_2(10,0)$ dengan jenis titik kesetimbangan *saddle point* dan bersifat tidak stabil.

Gambar 7c, menjelaskan bahwa ketika $A = 0.3$ terdapat satu solusi titik kesetimbangan interior yaitu $E_3(4.476016024, 3.051444784)$ dengan jenis titik kesetimbangan *spiral source* dan bersifat tidak stabil yang bersamaan dengan *limit cycle* stabil. Sedangkan $E_1(0,0)$ dan $E_2(10,0)$ dengan jenis titik kesetimbangan *saddle point* dan bersifat tidak stabil.

Hal ini menunjukkan bahwa dengan adanya makanan tambahan dapat mempengaruhi ekosistem sehingga mangsa dan pemangsa hidup berdampingan meskipun terdapat perilaku anti pemangsa pada mangsa.

Hasil simulasi menunjukkan bahwa makanan tambahan pada pemangsa dan perilaku anti pemangsa pada mangsa berpengaruh terhadap keseimbangan populasi antara mangsa dan pemangsa. Perubahan dalam populasi salah satu spesies dan perubahan faktor lingkungan sangat berpengaruh terhadap pasokan makanan tambahan sehingga memiliki efek yang signifikan terhadap keseimbangan ekosistem keseluruhan.

PENUTUP

Simpulan

Pada model interaksi mangsa pemangsa dengan fungsi respon Holling tipe II serta pemberian makanan tambahan dan adanya perilaku anti pemangsa. Berdasarkan hasil analisis penentuan solusi setimbang diperoleh empat titik kesetimbangan dengan jenis kestabilannya dengan syarat. Pemilihan parameter A sebagai parameter makanan tambahan yang dikontinuasi secara numerik memiliki pengaruh terhadap kestabilan masing-masing solusi sistem.

Hasil analisis numerik menunjukkan kesesuaian dengan hasil analisis untuk jenis kestabilan masing-masing solusi setimbang. Perubahan kestabilan pada titik kesetimbangan E_3 terjadi pada titik bifurkasi *saddle node* yang menghasilkan satu solusi titik ketika

$A = 0.077528$, kemudian dikontinuasi ke kanan terdapat dua kestabilan, yaitu titik kesetimbangan E_4 tidak stabil hingga titik BP (*Branch point*) saat $A = 0.147059$ dan titik kesetimbangan E_3 stabil hingga titik H (*Hopf*) di $A = 0.239884$. Setelah terjadi bifurkasi *Hopf* kestabilan berubah dari spiral stabil menjadi tidak stabil dan juga terdapat *limit cycle* stabil. Hasil simulasi menunjukkan bahwa adanya makanan tambahan dengan perubahan faktor biologis dalam ekosistem dapat mempengaruhi kestabilan populasi mangsa dan pemangsa.

Saran

Setelah dilakukan penelitian ini, diperoleh bahwa makanan tambahan dan perilaku anti pemangsa sangat berpengaruh pada ekosistem. Oleh karena itu, saran yang dapat diberikan untuk penelitian selanjutnya adalah Mengontruksi model dengan perluasan dari adanya faktor-faktor lingkungan dan interaksi antar populasi dalam ekosistem, menggunakan pola interaksi dengan fungsi respon Holling yang berbeda, mengeksplorasi kemungkinan-kemungkinan bifurkasi yang dapat terjadi.

DAFTAR PUSTAKA

- Barbosa, P., & Castellanos, I. (2005). *Ecology of Predator Prey Interactions*. Oxford, University Press. Inc.
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2012). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems (10th Edition)*. John Wiley & Sons, Inc.
- Brauer, F., & Castillo-Chavez, C. (2011). *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology, Second Edition* (Second). Springer. <http://www.springer.com/series/1214>
- Ekawati Ningrum, R., Abadi, & Puji Astuti, Y. (2019). Model Matematika Mangsa Pemangsa Dua Spesies dengan Fungsi Respon Holling Tipe II dan Perilaku Anti Pemangsa. *MathUnesa*, 7(Prey Predator).
- Haqee, M. (2011). A detailed study of the Beddington-DeAngelis predator-prey model. *Mathematical Biosciences*, 234(1), 1–16. <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2011.07.003>
- Hermawan, R. F. (2012). *Prosiding: Peran dan Tantangan Entomologi di Era Global* (A. Ridwan (ed.); p. 171).
- Howard, A., & Rorres, C. (2010). *Elementary Linear Algebra 10th edition* (Tenth). John Wiley & Sons, Inc.
- Kreyszig, E. (2011). *Advanced Engineering Mathematics*

- (10th Edition). www.ieee.org.
- Kusnanto, A., Ammariah, H., & Khatizah, E. (2017). Pengaruh Makanan Tambahan Dalam Model Mangsa Pemangsa Beddington DeAngelis. *Universitas Airlangga*, 24.
- Logan, J. D. (2015). *A First Course in Differential Equations Third Edition*. Springer-Verlag.
- Mortoja, S. G., Panja, P., & Mondal, S. K. (2018). Dynamics of a predator-prey model with stage-structure on both species and anti-predator behavior. In *Informatics in Medicine Unlocked* (Vol. 10, pp. 50–57). Elsevier Ltd. <https://doi.org/10.1016/j.imu.2017.12.004>
- Olsder, G. J., & Woude, J. W. van der. (1998). *Mathematical Systems Theory, Second edition*. Delft University Press.
- Prasad, K. D., & Prasad, B. S. R. V. (2019). Qualitative analysis of additional food provided predator-prey system with anti-predator behaviour in prey. *Nonlinear Dynamics*. <https://doi.org/10.1007/s11071-019-04883-0>
- Ratnasari, N. M. D. (2016). *Kelimpahan Populasi Tungau Pada Tanaman Apel Varietas Manalagi Di Pola Tanam Monokultur Dan Tumpangsari*.
- Rodriguez-Perez, M. A. (2012). *Biological Control of Dengue Vectors*. InTech. <https://doi.org/10.5772/31589>
- Saadah, S., Abadi, & Savitri, D. (2020). Bifurkasi Pada Model Interaksi Mangsa Pemangsa Dengan Perilaku Anti Pemangsa. *Prosiding Seminar Nasional Matematika*, 2, 95–103. <https://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/prisma/>