GRaf Yang terkait dengan *Up-aljabar*

Nurul Amalia

Prodi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya

e-mail: nurul.17030214036@mhs.unesa.ac.id

Agung Lukito

Prodi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya

e-mail korespondensi: agunglukito@unesa.ac.id

Abstrak

Dalam artikel ini dikenalkan konsep graf sederhana tak berarah yang berkaitan dengan UP-aljabar komutatif, disebut graf UP-aljabar, dengan himpunan titiknya merupakan himpunan elemen UP-aljabar komutatif. Juga dikenalkan graf kelas ekuivalensi dari UP-aljabar komutatif dan dibuktikan beberapa hasil terkait berdasarkan sifat graf UP-aljabar. Di samping itu, ditunjukkan bahwa jika graf UP-aljabar adalah bipatrit lengkap, maka graf kelas ekuivalensi dari UP-aljabar merupakan sebuah sisi. Demikian pula, akan disajikan satu algoritma untuk memeriksa apakah suatu himpunan dengan operasi biner tertentu merupakan UP-aljabar atau bukan.

**Kata Kunci:** UP-aljabar, UP-ideal, ideal annihilator, graf kelas ekuivalensi.

Abstract

*This article introduces the concept of undirected simple graphs related to commutative UP-algebra, called a UP-algebraic graph, which the vertex set is the set of elements of commutative UP-algebra. Also introduces the graph of equivalence classes of commutative UP-algebra and prove some related results based on the algebraic properties of the graph. In addition, it is shown that if UP-algebraic graphs is a complete bipatrite then the equivalence classes of UP-algebra is an edge. Similarly, an algorithm will be presented to check whether a set with certain binary operations is an UP-algebra or not.*

***Keywords:*** *UP-algebra, UP-ideal, annihilator ideal, graph of equivalence classes.*

Pendahuluan

Aljabar klasik, non-klasik, dan aljabar logis secara luas telah digunakan sebagai alat yang ampuh untuk menyelesaikan permasalahan dalam sistem informasi dan beberapa cabang lain dari ilmu komputer, seperti informasi fuzzy dengan konsep kasar dan lunak. Pada tahun 1966, Iseki memperkenalkan dua kelas aljabar logis yaitu BCK dan BCI aljabar (Iseki, 1966). BCH aljabar dikenalkan oleh Hu dan Li sebagai aljabar logis lainnya. KU-ideal dikenalkan oleh Prabpayak dan Leerawat sebagai ide yang menarik dalam aljabar logis (Prabpayak & Leerawat, 2009). Yaqoob dkk. memperkenalkan KU-ideal kubik dari KU-aljabar (Yaqoob dkk., 2013). Kekasaran pada KU-aljabar dipelajari oleh Moin dan Ali (M. A. Ansari & Koam, t.t.), sedangkan teori himpunan kasar telah diterapkan pada UP-aljabar oleh Moin dkk (M. A. Ansari dkk., t.t.). Lebih lanjut, Mostafa dkk. mendefinisikan graf KU-aljabar komutatif (Mostafa dkk., t.t.). Oleh karena itu diperlihatkan bahwa UP-aljabar merupakan perumunan dari KU-aljabar. Iampan memperkenalkan konsep UP-aljabar (Iampan, 2017), sedangkan Senapati dkk. menyajikan UP-aljabar dalam lingkungan *Fuzzy intuitionistic* antar-nilai (Senapati dkk., t.t.). Akram dan Dudek menunjukkan Graf Fuzzy bernilai interval (Akram & Dudek, 2011). Akram dan Davvaz mendefinisikan konsep graf *fuzzy intuitionistic* kuat. Jenis-jenis graf fuzzy bipolar tak beraturan dan aplikasinya dikaji oleh Akram.

Dalam artikel ini, diperkenalkan graf sederhana tak-berarah yang berkaitan dengan UP-aljabar komutatif yang himpunan titiknya merupakan himpunan elemen UP-aljabar tersebut dengan syarat tertentu. bahwa titik-titiknya a, b ∈ A membentuk sisi di antara keduanya jika dan hanya jika a b ∈ A = 0. Selanjutnya, ditunjukkan bahwa graf kelas ekivalensi dari A yaitu, dinyatakann dengan (M. Ansari dkk., 2018).

Kajian Teori

Pada bagian ini, akan dibahas definisi himpunan terurut parsial (Poset), konsep , , .

**Definisi 2.1** (Himpunan Terurut Parsial)

Misalkan himpunan tak-kosong dan misalkan relasi biner pada . Pasang disebut *himpunan terurut parsial* (POS) jika tiga sifat berikut berlaku untuk semua :

1. (*refleksif*)
2. (*anti-simetris*)
3. (*transitif*)

(Sukardjono, 2002)

**Definisi 2.2** ()

Himpunan tak-kosong dengan operasi biner dan elemen istimewa dimana , disebut jika untuk setiap berlaku identitas berikut:

1. ,

**Definisi 2.3** (Relasi urutan pada )*Definisikan relasi biner pada sebagai berikut:*

 (1.1)

*untuk semua* .

Dengan relasi , dengan mudah dapat ditunjukkan Proposisi 2.4.

Sebagai akibat langsung dari Definisi 2.2 dan Definisi 2.3 diperoleh proposisi berikut.

**Proposisi 2.4** *Misalkan Maka berlaku, untuk semua ,*

**Proposisi 2.5** *Misalkan . Di bawah relasi dalam Definisi 2.3, A membentuk himpunan terurut parsial* (*POS*)*.*

**Bukti**: (a) POS1. Dengan substitusi pada (UP1) diperoleh

Dengan (UP2) diperoleh

Dari definisi didapat

(b)POS2. Jika maka dan maka . Dengan menggunakan (UP4) diperoleh

(c)POS3. Jika maka dan maka . Dengan substitusi

Karena dan , diperoleh

Dengan (UP2) didapat

Dari definisi diperoleh

**Proposisi 2.6** *Dalam , sifat-sifat berikut berlaku untuk setiap :*

**Bukti**: (a) Dari (UP1)

menurut (UP2) dan (UP3) hubungan ini setara dengan

(b) Dengan (UP2) diperoleh hubungan

Dengan sebab , diperoleh hubungan

sehingga substitusi pada (UP1) mengakibatkan

Dengan kata lain, dari definisi ,

(c) Proposisi 2.4 (UP1’) memberikan

dan dengan (sebab ), hubungan ini setara dengan

sehingga dengan (UP2) mengakibatkan

(d) Dengan (UP2) diperoleh hubungan

Hubungan ini, dengan (UP3), setara dengan

sehingga substitusi pada (UP1) mengakibatkan

Jadi, berdasarkan definisi , hubungan terakhir menyatakan .

(e) () Dengan hasil (d) dan (UP4), diperoleh .

() Dengan hasil (a), diperoleh .

(f) Berdasarkan definisi , (UP3), dan hasil (a), diperoleh .

**Contoh 2.7** Misalkan dengan operasi biner yang didefinisikan dengan tabel Calyey berikut.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

(UP1.)

(UP2.)

(UP3.)

(UP4.)

Dengan bantuan Excel, dapat ditunjukkan bahwa merupakan

**Definisi 2.8** *Misalkan . Maka subhimpunan dari disebut dari jika dan itu sendiri membentuk* .

Jelaslah bahwa dan merupakan .

**Proposisi 2.9** *Misalkan dan . Jika* ,*maka*.

**Bukti:** Dari (UP1), diperoleh hubungan

dan berdasarkan hipotesis, hubungan ini setara dengan

sehingga Definisi 2.3 dapat disimpulkan bahwa *.*

**Definisi 2.10** *Misalkan . Maka subhimpunan dari disebut dari jika memenuhi*:

1. *dan*
2. *untuk semua* , .

Jelaslah bahwa dan adalah dari .

**Contoh 2.11** Misalkan dengan operasi yang didefinisikan dengan tabel Calyey berikut.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Dengan bantuan Excel, dapat ditunjukkan merupakan . Mudah diperiksa bahwa dan merupakan dari .

**Definisi 2.12** *Misalkan dan definisikan untuk semua . Maka dikatakan komutatif jika untuk semua .*

**Teorema 2.13** *Untuk , tiga pernyataan berikut ekuivalen:*

1. *A komutatif*
2.
3. .

Untuk setiap

**Bukti**:

 Misalkan berlaku untuk semua . Dengan mengganti dan pada hubungan ini, diperoleh bahwa .

 Misalkan valid untuk semua . Gantikan dan pada hubungan ini untuk memperoleh . Berdasarkan UP3’, kedua hubungan tersebut mengakibatkan bahwa . Dengan kata lain, komutatif.

**Lemma 2.14** *Misalkan komutatif. Maka berlaku*

**Bukti**: Karena komutatif, maka dengan Proposisi 2.9 diperoleh

dan dengan Proposisi 2.6(d) juga diperoleh

Jadi,

Untuk kebalikannya, Proposisi 2.9 dan Proposisi 2.6(d) menghasilkan

Jadi, . Oleh karena itu, .

Pada pembahasan selajutnya, asumsikan bahwa merupakan komutatif kecuali dinyatakan lain.

**Definisi 2.15** *Misalkan dari . A didefinisikan sebagai*

Subhimpunan ini dikenal sebagai . Jika , maka ditulis

**Lemma 2.16** *Misalkan subhimpunan dari . Maka adalah dari* .

**Bukti**: Jelaslah , sebab untuk semua .

Selanjutnya, misalkan . Maka untuk semua berlaku

yang berarti bahwa .

Oleh karena itu, merupakan dari .

**Lemma 2.17** *Jika , maka tiga pernyataan berikut valid.*

**Bukti**: (1) Misalkan . Maka

Akan tetapi , sehingga .

Artinya,. Dengan demikian, .

(2) Karena dan , dengan bagian (1) diperoleh

Sebaliknya, jika , maka

 dan , Untuk setiap , berlaku atau dan karenanya, , , sehingga .

Jadi, Kombinasi kedua hasil ini mengakibatkan

(3) Karena dengan bagian (1) diperoleh
dan

sehingga

**Lemma 2.18** *Jika* *dan* , *maka*

**Bukti**: Berdasarkan Lemma 2.17 (2) dan diperoleh,

**Definisi 2.19** *Definisikan relasi* *pada* *sebagai* .

Dari definisi di atas, lemma berikut ini valid.

**Lemma 2.20** *Relasi merupakan relasi ekivalensi pada* .

**Bukti:** Jelaslah bahwa sebab .

Jika , maka , dan jelaslah setara dengan . Karena itu, .

Misalkan dan , maka dan sehingga . Oleh karena itu, .

**Catatan 2.21**: Setiap relasi ekuivalensi pada suatu himpunan mempartisi himpunan tersebut menjadi kelas-kelas ekuivalensi yang saling lepas, sebab dua kelas ekuivalensi berbeda pasti saling lepas.

Dalam konteks Lemma 2.20, dengan dan bila , maka .

**Proposisi 2.22** Jika , maka .

**Bukti**: Misalkan . Berdasarkan definisi relasi , diperoleh , dan akibatnya,

3. Graf UP-Alajbar Komutatif

Graf adalah sepasang himpunan titik dan himpunan sisi . Setiap sisi di merupakan pasang tak terurut titik di . Graf dikatakan *terhubung* bila terdapat suatu lintasan antara setiap dua titiknya, bila tidak, dikatakan *tak-terhubung*. Lebih dari, graf dikatakan lengkap bila setiap dua titik berbedanya membentuk tepat satu sisi. Graf dikatakan *bipartit* bila himpunan titik dapat dipartisi ke dalam dua subhimpunan saling lepas dan sedemikian hingga setiap sisi menghubungkan titik di dengan titik di . Graf dikatakan *bipartit* *lengkap* jika setiap titik dalam satu subhimpunan bipartisinya terhubung ke setiap titik dalam subhimpunan bipartisi lainnya. Jarak, menyatakan panjang lintasan terpendek dari titik ke titik . Jika tidak ada lintasan demikian antara dan , didefinisikan . Diameter graf dituliskan sebagai

Diameter adalah nol jika hanya memiliki satu titik.

*Persekitaran* *titik* adalah himpunan semua titik di yang berhubungan langsung dengan dan dilambang dengan . Dengan kata lain,

Graf disebut *subgraf* dari graf jika . Dua graf dan dikatakan *isomorfik* jika ada fungsi bijektif sedemikian hingga hingga untuk setiap ; jika tidak, dua graf tersebut dikatakan *non*-*isomorfik*. Graf kipas adalah graf yang dibentuk dari lintasan dan satu titik dengan terhubung langsung ke semua titik lintasan .

**Definisi 3.1** *Misalkan* *komutatif*. *adalah graf dengan himpunan titiknya semua elemen dan dua titik berbeda membentuk sisi jika* .

**Teorema 3.2** Graf terhubung dengan .

**Bukti**: Misalkan dua titik berbeda di . Terdapat dua kasus.

Kasus I: . Maka . (Definisi 3.1)

Kasus II: . Dari bukti Lemma 2.15, untuk semua dan karena komutatif, setiap titik di berhubungan langsung dengan . Karena dan maka dan Sehingga, .

**Contoh 3.3.** Misalkan dengan operasi yang ditunjukkan oleh tabel Calyey berikut.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

**Algoritma 1**: Algoritma untuk -aljabar

**Algoritma untuk -aljabar**

function isUPAlgebra = checkUPAlgebra(A)

 if isempty ismember

isUPAlgebra false;

return;

 end

 Stop false;

 n numel;

 for

 if

Stop true;

break;

 end

end

for

 if Stop

 break;

 end

 for

 if

 Stop true;

 break;

 end

 end

 end

 for

if Stop

 break;

end

for

if Stop

 break;

end

for

 if

 Stop true;

 break;

 end

end

end

 end

 if Stop

disp;

isUPAlgebra false;

 else

disp;

isUPAlgebra true;

 end

end

Dengan menggunakan Algoritma 1, jelas bahwa merupakan -aljabar komutatif. Dengan himpunan titik disajikan dalam Gambar 3.1.

**Gambar** **3.1.**

4. Graf Kelas Ekuivalensi dari UP-Alajbar Komutatif

Pada bagian ini akan dibahas mengenai definisi graf , graf kelas ekuivalensi UP-Aljabar komutatif, juga akan membahas jika graf merupakan graf lengkap atau graf kipas dan jika graf merupakan graf bipatrit lengkap maka merupakan sebuah sisi.

**Definisi 4.3.** Graf didefinisikan sebagai graf sederhana dengan himpunan titiknya koleksi semua kelas ekuivalensi , dan dua kelas berbeda berhubungan langsung bila

Graf disebut graf kelas ekuivalensi dari .

**Contoh 4.4** Misalkan dengan operasi yang disajikan oleh tabel Calyey berikut.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

Maka, himpunan titik dan sisi graf didefinisikan oleh

 Karena

, , ,.

Jadi, dan

karena

dan ,

**Gambar** **4**.1. (a) Graf , (b) Graf

**Lemma 4.5.** Dalam , merupakan subgraf dari .

**Bukti**: Definisikan fungsi dengan untuk setiap . Jelaslah injektif berdasarkan Catatan 2.21. Misalkan dan berhubungan langsung; yakni, Karena , jelaslah bahwa . Dengan kata lain, dan berhubungan langsung di . Jadi, isomorfik dengan subgraf dari .

**Teorema 4.6** Misalkan . Jika dan berhubungan langsung, maka .

**Bukti:**Andaikan . Dengan Proposisi 2.22, sehingga dan tidak berhubungan langsung di sebab graf sederhana.

**Teorema 4.7** Jika lengkap atau merupakan graf kipas dengan , maka .

**Bukti:** Misalkan . Jika lengkap, maka setiap dua titik berbeda dari berhubungan langsung. Karena itu, diperoleh

 untuk

sehingga untuk semua dan . Jadi, untuk semua . Karena itu, setiap kelas ekuivalensi hanya memuat elemen tunggal. Dengan kata lain,

Karena graf lengkap, setiap pasang titik berbeda membentuk sisi . Dari Definisi 3.1 diperoleh , sehingga sebab setiap kelas ekuivalensi hanya memuat elemen tunggal. Jadi, dan membentuk sisi di E dan karenanya, graf lengkap. Karena dan memiliki order yang sama, kedua graf isomorfik.

Selanjutnya, misalkan graf kipas. Maka terdiri atas lintasan dan satu titik sehingga terhubung langsung ke semua titik lintasan . Jelaslah,

,

,

sehingga untuk semua dengan . Jadi, setiap kelas ekuivalensi hanya memuat elemen tunggal.

Sekarang, definisikan fungsi dengan untuk semua Jelaslah bahwa jika dan hanya jika , jika dan hanya jika Karena setiap kelas hanya memuat 1 elemen . Dengan kata lain, .

**Teorema 4.8** Jika graf bipartit lengkap, maka merupakan sebuah sisi.

**Bukti:** Jika adalah bipartit lengkap, himpunan titik dengan , dan

 Maka

Oleh karena itu, dan sehingga ada tepat dua kelas ekuivalensi beda, yaitu dan di yang berhubungan langsung. Jadi, merupakan sebuah sisi.

**Teorema 4.9** Misalkan dan komutatif. Jika , maka .

**Bukti:** Misalkan dan . Misalkan isomorfisme graf dengan untuk setiap Definisikan dengan . Perhatikan bahwa jika , maka . Definisi 3.1 memberikan , sehingga dan mengakibatkan , sebab . Lagi, Definisi 3.1 memberikan , sehingga dan mengakibatkan .

Jadi, merupakan isomorfisme graf, sehingga .

Kebalikan teorema ini tidak benar, sebagaimana ditunjukkan contoh berikut. Meskipun , tetapi

**Contoh 4.10 (a).** Misalkan dengan operasi yang ditunjukkan oleh tabel Calyey berikut.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Dengan menggunakan Algoritma 1, jelas bahwa merupakan -aljabar komutatif. Graf-graf yang bersesuaian dengan ditunjukkan pada Gambar 4.2.

**(b).** Misalkan dengan operasi yang didefinisikan tabel Calyey berikut.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Dengan Algoritma 1, jelaslah bahwa merupakan -aljabar komutatif. ditunjukkan oleh tabel Graf dan dapat ditunjukkan pada Gambar 4.3. Jelaslah bahwa sedangkan

**Gambar** **4.3**. Graf ,

**(a)**

**(b)**

Simpulan

**(b)**

**Gambar 4.2.**  Graf ,

**(a)**

c

0

b

Pada artikel ini diperkenalkan graf sederhana tak berarah yang berkaitan dengan aljabar komutatif dan membahas sifat-sifat aljabar. Juga dikenalkan graf kelas ekuivalensi dari - aljabar komutatif. Dengan mengambil dua graf dan sebagai graf dan graf ekuivalensi. Sebagai contoh hasil yang telah ditunjukkan. Jika lengkap atau merupakan graf kipas, maka . Selanjutnya, jika adalah graf bipartit lengkap, maka merupakan sebuah sisi. Untuk sembarang Komutatif dan jika maka . Akan tetapi, kebalikannya tidak berlaku secara umum. Akibatnya dapat dikatakan bahwa konsep yang sama dapat dipelajari dalam berbagai jenis aljabar logis.

Saran

Dalam artikel ini, telah dibahas graf sederhana tak berarah yang berkaitan dengan aljabar komutatif. Juga dikenalkan graf kelas ekuivalensi dari - aljabar komutatif. Karena pada artikel ini telah diperlihatkan bahwa UP-aljabar merupakan perumunan dari KU-aljabar. Maka dengan demikian saran untuk penelitian selanjutnya yaitu membahas graf yang bisa dibangun oleh struktur aljabar lainnya misalnya - aljabar dan apakah sifat-sifat yang sama berlaku.

Daftar Pustaka

Akram, M., & Dudek, W. A. (2011). Interval-valued fuzzy graphs. *Computers and Mathematics with Applications*, *61*(2), 289–299. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2010.11.004

Ansari, M. A., & Koam, A. N. A. (t.t.). ROUGH APPROXIMATIONS IN KU-ALGEBRAS. Dalam *ITALIAN JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS-N* (Vol. 40, Nomor 2018). Diambil 18 Juli 2023, dari https://ijpam.uniud.it/online\_issue/201840/55-Ansari-Koam.pdf

Ansari, M. A., Koam, A. N. A., & Haider, A. (t.t.). Rough set theory applied to UP-algebras. Dalam *ITALIAN JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS*. Diambil 18 Juli 2023, dari https://ijpam.uniud.it/online\_issue/201942/33%20Ansari-Koam-Haidar.pdf

Ansari, M., Haidar, A., & Koam, A. (2018). On a Graph Associated to UP-Algebras. *Mathematical and Computational Applications*, *23*(4), 61. https://doi.org/10.3390/mca23040061

Iampan, A. (2017). A NEW BRANCH OF THE LOGICAL ALGEBRA: UP-ALGEBRAS. Dalam *Journal of Algebra and Related Topics* (Vol. 5, Nomor 1). https://jart.guilan.ac.ir/article\_2403\_1c3ccde59fb8f4d45495220124df4b3a.pdf

Iseki, K. (1966). *Algebra Related with a Propositional Calculus* (Vol. 42). https://www.jstage.jst.go.jp/article/pjab1945/42/1/42\_1\_26/\_pdf/-char/en

Mostafa, S. M., Radwan, A. E., Ibrahem, F. A., & Kareem, F. F. (t.t.). *THE GRAPH OF A COMMUTATIVE KU-ALGEBRA*. http://scik.org

Prabpayak, C., & Leerawat, U. (2009). On ideas and congruences in KU-algebras. Dalam *Scientia Magna* (Vol. 5, Nomor 1).

Senapati, T., Muhiuddin, G., & Shum, K. P. (t.t.). REPRESENTATION OF U P-ALGEBRAS IN INTERVAL-VALUED INTUITIONISTIC FUZZY ENVIRONMENT. Dalam *ITALIAN JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS*. Diambil 18 Juli 2023, dari https://ijpam.uniud.it/online\_issue/201738/42-Tapan%20Senapati-Muhiuddin-Shum.pdf

Sukardjono. (2002). *Teori Latis*. Andi Yogyakarta.

Yaqoob, N., Mostafa, S. M., & Ansari, M. A. (2013). On Cubic KU-Ideals of KU-Algebras. *ISRN Algebra*, *2013*, 1–10. https://doi.org/10.1155/2013/935905